

A Robot Engineering Textbook

Mohsen Shahinpoor

University of New Mexico

HARPER & ROW, PUBLISHERS, NEW YORK

М. Шахинпур

Курс

робототехники

Перевод с английского
С. С. Дмитриева

под редакцией канд. техн. наук С. Л. Зенкевича



Москва «Мир» 1990

ББК 32.816
Ш31
УДК 681.5

Шахинпур М.
Ш31 Курс робототехники. Пер. с англ.— М.: Мир, 1990.—
527 с., ил.
ISBN 5-03-001375-X

В книге специалиста из США представлены фактически все основные разделы робототехники: кинематика и динамика исполнительных механизмов, управление приводами, сенсорные системы, программирование роботов на проблемно-ориентированных языках. Излагаемый материал иллюстрируется большим количеством примеров. Приводятся задачи для самостоятельного решения.

Для научных работников и инженеров, специализирующихся в области робототехники, а также студентов старших курсов соответствующих специальностей вузов.

ИД 240202000—251 129—90
041(01)—90

ББК 32.816

Редакция литературы

ISBN 5-03-001375-X (русск.)
ISBN 0-06-045931-X (англ.)

© 1987 by Harper & Row, Publishers, Inc.
© перевод на русский язык,
С. С. Дмитриев

Предисловие редактора перевода

Робототехника как наука возникла совсем недавно. Однако уже за последние годы появилось много книг, посвященных этой проблематике. Книга, предлагаемая вниманию читателей, имеет ряд особенностей, которые делают ее заметным явлением в ряду аналогичных по содержанию книг.

Прежде всего это широта охвата материала. Фактически здесь охвачены все вопросы, относящиеся к исследованию и проектированию робототехнических систем. Детально обсуждаются проблемы синтеза регуляторов приводов с учетом взаимовлияния звеньев манипулятора, рассматриваются прямая и обратная задачи кинематики и динамики, вопросы планирования траектории. Большое внимание уделяется рассмотрению сборочных операций и в связи с этим роли и месту сенсорных систем. Касается автор и вопросов программирования роботов. Книга охватывает практически все специальные курсы по робототехнике, которые читаются в вузах.

Материал книги хорошо изложен с методической точки зрения. Наличие большого числа примеров и задач для самостоятельного решения существенно облегчает изучение излагаемого материала.

Следует отметить, что описание всех подходов к решению тех или иных задач сопровождается применением адекватных математических методов, которые, с одной стороны, отражают современный уровень используемого в робототехнике математического аппарата, а с другой стороны, позволяют проследить за ходом доказательств.

При переводе книги мы стремились придерживаться по возможности терминологии, используемой автором, хотя зачастую она не совпадает с принятой у нас. В процессе перевода был устранен ряд неточностей и ошибок, в основном в математических выкладках, хотя их полное отсутствие гарантировать нельзя.

Книга несомненно будет полезна инженерам и научным работникам, деятельность которых связана с робототехникой, а также студентам и аспирантам соответствующих специальностей вузов.

С. Зенкевич

Предисловие

Эта книга была написана как начальный курс по робототехнике для студентов инженерных специальностей. *Робототехника* представляет собой исследование и функциональное проектирование роботов, манипуляторов и гибких производственных систем. Книга появилась в результате чтения лекций по курсу «Основы робототехники. Проектирование и управление промышленными роботами» для студентов и аспирантов. Одной из причин написания книги явилось то, что эта тематика представляет для автора большой интерес; однако, пожалуй, основными причинами были растущее понимание профессорами важности изучения робототехники в университетах, а также необходимость повышения производительности труда. Робототехника — сложный предмет и требует разнообразных технических знаний. Все, для кого эта книга будет первым учебником по робототехнике, должны иметь хорошие знания в таких областях, как статика, аналитическая динамика, теория механизмов и машин, управление, дифференциальное исчисление, матричный анализ, программирование, цифровая электроника, микропроцессорная техника. В книге описывается также применение теории связанных графов для моделирования динамики робототехнических систем в расчете на студентов, которые знакомы с моделированием сложных систем с помощью связанных графов. Робототехника включает такие специфические дисциплины, как проектирование преобразователей, анализ сцен и очувствление. Эти области образуют фундамент для практического использования результатов, полученных в области робототехники. Многие специалисты-робототехники согласны с тем, что робототехника охватывает больше математических дисциплин, чем любая другая инженерная дисциплина. Пожалуй, единственной областью, сравнимой в этом смысле с робототехникой, является инженерное проектирование.

В каждой главе используются результаты, полученные в предыдущих главах, поэтому лучше всего читать книгу в том порядке, в каком она написана.

В гл. 1 дано общее введение в робототехнику. В ней описаны манипуляционные роботы, управляемые от компьютеров, указаны области их применения, дана история эволюционного и революционного развития робототехники, рассмотрены геометрия манипулятора и его рабочего пространства, конструкции запястья и кисти, система приводов манипулятора, подчеркнута важность таких понятий, как разрешающая способность, точность и повторяемость, а также приведено несколько примеров и задач. Материал, изложенный в этой главе, необходим студентам, чтобы познакомиться с основами робототехники и тенденцией ее развития. Остальные главы расположены в соответствии со следующим принципом:

Целью инженерного образования является подготовка для деятельности, связанной с анализом и проектированием или конструированием и производством с полным знанием соответствующих структур, устройств и процессов.

В гл. 2 рассматривается кинематика манипуляторов, подчеркивается важность преобразований координат. Описаны однородные преобразования координат и представление Денавита — Хартенберга. Для того чтобы показать студентам важность кинематики в робототехнике, глубоко рассматриваются прямая и обратная задачи кинематики. Представлено большое число иллюстративных примеров для различных типов роботов. Решено много обратных задач кинематики, которые очень важны в автоматизированном производстве.

Глава 3 знакомит студентов с дифференциальными преобразованиями, которые необходимы тогда, когда мы встречаемся с подвижными объектами и подвижным манипулятором. Это важная глава, в которой основное внимание уделяется рассмотрению проблем, связанных с задачами слежения в робототехнике, когда цифровая телевизионная камера установлена либо непосредственно на манипуляторе, либо где-то в другом месте. Здесь, как и ранее, приводится несколько примеров.

Глава 4 посвящена рассмотрению математических аспектов рабочего пространства и рабочей поверхности манипулятора, ограничений, имеющих место на границах рабочих зон сочленений манипулятора, а также вопросам построения рабочих пространств. Детально обсуждается планирование траектории манипулятора, описывается общий алгоритм построения полиномиальных траекторий, а также приводятся соответствующие данные для манипулятора с шестью степенями подвижности. Важно, что студенты, получая небольшие теоретические знания относительно построения рабочих пространств, планирования траекторий и формирования описания заданий для робота, должны самостоятельно решать много задач, связанных с этими вопросами.

Динамика манипуляционных роботов описана в гл. 5. Это чрезвычайно важная и сложная тема робототехники. В курсе основ робототехники, который читается студентам, большую часть этой главы можно опустить. Однако для аспирантов, специализирующихся в области проектирования и управления промышленными роботами, эта глава должна быть прочитана полностью. Причина состоит в том, что для студентов материал этой главы очень сложен для восприятия. Для того чтобы компенсировать недостаток знаний в этой области, студентам следует предложить провести практические занятия в робототехнической лаборатории. В этой главе рассматриваются также три различных метода получения уравнений динамики манипуляторов. Первый и, по-видимому, самый простой метод — это использование связанных графов. Он требует некоторого предварительного знакомства с моделированием сложных систем на основе связанных графов (которого некоторые студенты могут не иметь). Этот метод применяется далее с целью получения уравнений динамики для некоторых манипуляторов. Затем описывается метод Лагранжа и приводится несколько примеров его использования. Далее детально рассматривается метод Ньютона — Эйлера и, кроме того, обсуждается значение рекурсивных уравнений и решается несколько иллюстративных задач. Рассматривается также обратная задача динамики и ее связь с обратной задачей кинематики.

В гл. 6 главное внимание уделяется управлению движением манипулятора, его скоростью и ускорением. Очевидно, что управление роботом составляет основу гибкой автоматизации, и поэтому оно заслуживает детального рассмотрения. Задачи управления роботом являются в основном нелинейными, и поэтому они трудны для студентов. Однако эти задачи рассматриваются здесь на уровне, доступном как для студентов, так и для аспирантов. Сначала обсуждаются разомкнутые и замкнутые системы управления манипуляторами, а затем описывается способ управления по ошибке. Далее приводится структура усилителя, описываются обобщенный алгоритм управления медленными движениями манипулятора, а также методы, связанные с управлением моментом. После этого обсуждаются важные проблемы управления координированными движениями сочленений. В конце главы описываются методы управления моментом в сочленении манипулятора. В целом эта глава является обязательной частью любого современного учебника по робототехнике, и описанный в ней подход может быть использован для начального курса робототехники.

В гл. 7 обсуждаются такие важные для робототехники понятия, как силы, моменты, а также обратные задачи статики и

податливое движение манипулятора. Эти темы являются очень важными для проектирования манипуляторов с высокой нагрузочной способностью и обладающих гибкостью по отношению к возмущающим силам, появляющимся при выполнении сборочных операций. Данная глава также должна быть включена в любой вводный курс по робототехнике. Проблема податливости не может быть не рассмотрена, и ей должен быть предоставлен высший приоритет. Это достигается в главе за счет решения большого количества задач. В эту главу включены также такие вопросы, как равновесие сил и моментов, обратная задача статики, податливость, кинематически ограниченные движения и силомоментные сенсорные системы. В конце главы рассматриваются вопросы, связанные с заклиниванием, а также приведен критерий заклинивания Симуновича.

В гл. 8 описываются сенсорные системы — важный дополнительный материал для любого вводного курса по робототехнике. Студенты должны приобрести основные знания, касающиеся того, каким образом робот, оснащенный сенсорными устройствами, становится интеллектуальным. Такими устройствами являются силомоментные датчики, цифровые ТВ-камеры. Для того чтобы познакомить студентов с современной технологией систем осязания робота, в главе описываются используемые в настоящее время тактильные, силомоментные и зрительные системы. Очевидно, что для более детального знакомства с этим предметом студенты должны прослушать курс по осязанию роботов.

В гл. 9 рассматриваются вопросы программирования роботов. Сначала обсуждаются методы ручного обучения. Затем описываются языки программирования роботов и их эволюция; приводятся программы сопряжения вала с отверстием, написанные на таких языках, как MINI, WAVE, AL, VAL, AML. В конце дан полный набор программ для операции сборки. Эти программы включают такие модули, как УСТАНОВКА, ТЕСТ, СОЗДАНИЕ ФАЙЛА ДВИЖЕНИЯ, ИСПОЛНЕНИЕ ФАЙЛА ДВИЖЕНИЯ, РЕДАКТИРОВАНИЕ ФАЙЛА ДВИЖЕНИЯ, ОБРАТНАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА, и предназначены для управления роботом.

Я хотел бы поблагодарить моих коллег и студентов Центра робототехники Университета Кларксона, а также робототехнической лаборатории Университета Нью-Мексико, без чьей помощи этот учебник не мог бы быть написан. Среди них проф. Р. А. Шиллинг из Университета Кларксона, проф. М. Жамшиди из Университета Нью-Мексико и д-р Х. Серажи из лаборатории реактивных двигателей, которые помогли мне, предоставив некоторые материалы для шестой главы, проф. Г. Старр из

Университета Нью-Мексико и аспиранты Али Мегхдари, Али Акбарзаде, Али Табеш, Майк Капорали, Давид Кэмпбелл, Роберт Кук, Янг Тао Ким и Бинг Хун Чу. Я также благодарю моих секретарей Гейлу Анджел, Терри Грэндон и Ронду Прайс за подготовку рукописи; м-ра Массуда Ахгар за рисунки, выполненные с помощью системы CADAM. Наконец, я хочу выразить признательность м-ру Клиффу Робичауду за его одобрение и поддержку, Томасу Ферреллу за его блестящее техническое руководство, персоналу издательства Харпер и Роу, который провел большую работу по подготовке окончательного варианта книги.

Мо Шахинпур

Общие сведения о манипуляционных роботах

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Человечество, по-видимому, находится на пороге очередной промышленной революции, которая повлечет распространение и использование все более гибких, разумных, чувствительных и эффективных роботов на фабрике, в поле, в учреждении и во всех других областях нашей повседневной жизни. Этот факт в сочетании с более острым осознанием вопросов безопасности человека способствовал возникновению потребности в большем количестве манипуляционных роботов. Как результат в последние годы быстро расширялось использование роботов, особенно в промышленной сфере, где первостепенным являлось требование большей производительности и более строгого контроля качества в связи с интенсивной международной конкуренцией.

Слово «робот», кажется, впервые стало широко использоваться, после того как пьеса чешского драматурга Карела Чапека, названная «Р. У. Р.» («Россумские универсальные роботы»), впервые была поставлена в Париже, во Франции, в 1920-х годах. В этой пьесе маленькие искусственные антропоморфные создания строго подчинялись приказам своих хозяев. По-чешски и по-русски эти создания называются «роботник», от слова «робота», которое означает по-чешски и по-русски «нудная, тяжелая работа». В пьесе «Р. У. Р.» роботы в конце концов восстали против своих создателей, но при этом они положили начало стадии своего собственного разрушения с появлением двух роботов, Примуса и Хелины, которые полюбили друг друга. Читателя, интересующегося фольклорной историей робототехники, отсылаем к работам Козна [18], Като [52] и статье [92].

Первые роботы представлялись как зловещие человекоподобные машины. В 70-х годах Айзек Азимов ввел идею роботов,

служащих добру, которых он назвал дроидами, а также популяризировал слово «робототехника». Некоторые дроиды, такие, как R2-D2 и C3-PO, стали знамениты в последние годы благодаря киноиндустрии. Недавно реальные дроиды были созданы в США (Heath's Hero) и Японии (Sumitomo's Android; см. [19]).

В словаре Вебстера *робот* определяется как «автоматический аппарат или устройство, которое выполняет функции, обычно приписываемые человеку». Однако мы все знаем, что это не очень точное описание. В действительности многие роботы могут выполнять некоторые задания гораздо лучшим и более сложным способом, чем люди. Также верно и то, что по приведенному выше определению даже стиральные машины могут рассматриваться как программируемые роботы. Таким образом, необходимо дать общее определение для манипуляционных роботов. В этой книге мы примем следующее определение:

Робот — это перепрограммируемый многофункциональный манипулятор, созданный для перемещения материалов, деталей, орудий или специализированных устройств посредством разнообразных программируемых движений для выполнения широкого круга задач¹⁾.

Это определение охватывает широкий спектр манипуляционных роботов и включает различные классы роботов, а именно:

1. *Автоматическое или гибкое производство.* Эти «промышленные» роботы применяются в широком круге производственных процессов, включая сборку и инспекцию, перенос материалов, сварку и окраску тканей.

2. *Удаленные исследования.* Этот класс роботов-манипуляторов проектируется для работы в условиях, которые люди не могут выдержать. Они могут использоваться для исследования непознанного — от края нашей солнечной системы до глубин земных океанов.

3. *Протезирование и биомедицина.* Робототехническая технология и связанная с ней технология сенсоров могут быть объединены для обеспечения сенсорного очувствления протезов конечностей. Когда-нибудь миниатюрные роботы под управлением хирурга смогут зондировать тело человека для проведения операций на пациентах изнутри их тела.

4. *Манипулирование опасными веществами.* Роботы этого класса применяются для уборки бомб и манипулирования опасными веществами.

5. *Обслуживание.* Некоторые из современных приложений обслуживающих роботов включают роботы, обеспечивающие

¹⁾ В соответствии с принятой у нас терминологией манипулятор является частью робота, в состав которого входит еще и система управления. Автор в дальнейшем пользуется терминами «робот» и «манипулятор» как синонимами. — *Прим. ред.*

безопасность, уборку, доставку почты, пожароохрану, пожаротушение и выполнение поручений по команде голосом. Использование обслуживающих роботов будет расти по мере развития технологии и снижения затрат на их производство.

1.2. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ТЕЛЕОПЕРАТОРОВ И МАНИПУЛЯТОРОВ

Дебют роботов-манипуляторов связан с началом ядерной эпохи. Первые манипуляторы назывались телеоператорами. Такие устройства позволяли оператору проводить на безопасном расстоянии такие работы, как перемещение радиоактивных веществ [39]. Первый автоматический электромеханический телеоператор разработан в 1947 г. Он сконструирован таким образом, что оператор управляет манипулятором посредством задающего устройства, т. е. манипулятор повторяет движения, выполняемые оператором. Этот первый манипулятор не обеспечивал никакой обратной связи по силе, вследствие чего операции типа вращения гаечного ключа или позиционирования предметов на поверхности были трудновыполнимы. В 1948 г. фирма General Electric разработала телеоператор (Handy Man), в котором силовая обратная связь обеспечивалась отработкой приводами задающего устройства сил, воздействующих на манипулятор [39]. Основная идея, реализованная в этом телеоператоре, была вновь использована фирмой General Electric в конструкции манипулятора Man-Mate [57]. Оператор мог перемещать этим манипулятором тяжелые или опасные объекты, манипулируя маленьким рычажком. Информация с рычажка преобразовывалась в сигналы управления исполнительным механизмом. Благодаря силовой обратной связи оператор также воспринимал силы, воздействующие на схват.

Управление телеоператорами осуществлялось человеком непосредственно. Цифровые управляющие устройства, используемые в роботах в настоящее время, появились сначала в станках с числовым программным управлением (ЧПУ). В 1953 г. Массачусетский технологический институт представил первый фрезерный станок с ЧПУ, разработанный при поддержке ВВС США [83]. Информация о размерах обрабатываемой детали хранилась в цифровой форме на бумажной ленте, а оптический считыватель преобразовывал закодированную информацию в сигналы управления станком. Главная особенность новой технологии заключалась в том, что для обработки новой детали требовалось немногим больше действий, чем просто зарядить в станок новую перфоленту. Это событие ознаменовало рождение

тибкой технологии, при которой оборудование просто перепрограммировалось для выполнения множества задач [27]. Принципы цифрового управления и силового очувствления были сведены воедино Эрнстом [28] в концепции «Механическая рука, управляемая от ЭВМ». Телеоператор, снабженный тактильными датчиками, выполнял задачу под управлением ЭВМ, обрабатывавшей информацию, поступающую с этих датчиков.

Вслед за созданием этого робота последовала разработка роботов, способных повторять конечный набор заранее запрограммированных движений в течение неограниченного времени. Эти роботы с ограниченной последовательностью действий могли использоваться на загрузочно-разгрузочных операциях [76]. Для этого такие операции должны быть подробно описаны. Поступающие на операцию детали должны размещаться перед роботом одинаковым образом; детали должны быть заранее проверены на отсутствие отклонений, а в процессе операций они не должны повреждаться. Несмотря на большое количество ограничений и условий, роботы с ограниченной последовательностью действий применяются для операций типа переноски, упаковки, несложной сборки.

Набор функций, выполняемых описанными роботами с простой последовательностью действий, ограничивает их использование кругом задач, в которых условия работы близки к идеальным. К сожалению, зачастую это не так. В 1962 г. Томорич и Бони [95] создали манипулятор, снабженный датчиками давления и способный определять размер и вес объектов, а Ресвик и Мейлер [80] разработали аппарат, который позволял инвалидам с параличом всех конечностей манипулировать предметами. В 1963 г. Робертс [81, 82] осуществил обработку цифровых полутоновых изображений посредством однородных преобразований. В 1966 г. Маккарти в Лаборатории искусственного интеллекта Станфордского университета (SAIL) создал робот-манипулятор с визуальным (ТВ-камеры) и слуховым (микрофоны) очувствлением, который выполнял команды, подаваемые голосом [64]. Дальнейшее развитие технического зрения было сделано Уичмэном [102]. Пипер [75] разработал методику решения обратной задачи кинематики на основе теории замкнутых кинематических цепей и однородных преобразований.

Среди первых применений манипуляторов было использование механических исполнительных устройств на погружаемом аппарате при подводной прокладке силовых кабелей (см. [19]).

В начале 70-х годов в Станфордском университете при помощи робота, оборудованного цифровой телекамерой и микро-ЭВМ, была решена головоломка по складыванию кубиков с разноцветными гранями в столбик, у которого ни на одной

стороне нет повторяющихся цветов [30]. В Японии Ину [49] впервые создал манипуляционное сочленение с постоянным приводным моментом, используя 10-битовые сигналы в цепях управления и обратной связи по силе. В 1972 г. Болл и Пол продемонстрировали роботизированную сборку автомобильных водяных насосов, при которой применялось силовое и визуальное очувствление (см. [6]). В том же году фирмой IBM для сборки узлов печатных машинок, состоявших из двадцати деталей, был разработан манипулятор, снабженный тактильными и силовыми датчиками. Новым шагом вперед было создание в Японии робота, способного осуществлять автоматическую сборку по чертежам [25]. Вслед за работой Ину [49] Пол [72] разработал систему с выбором при помощи компьютера активируемых приводов манипуляторов, управление которыми велось по вектору силы, а не по положению.

С улучшением технологии роботы стали рассматриваться как реальное средство расширения возможностей манипулирования объектами при использовании как 12-метрового, так и 20-сантиметрового манипулятора [32].

Константинов и Занков [56] отметили постепенный переход в промышленности от обычного кузнечного производства к полностью автоматизированному. Использование манипуляторов анализировалось как в массовом, так и в мелкосерийном производстве.

В работе [24] описан метод простой, быстрой и экономичной машинной сборки. Роботу отводилась функция транспортировки деталей, инструментов и готовых изделий. В демонстрационном примере проводилась сборка из 17 деталей автомобильной коробки передач, детали и инструмент для которой доставлялись роботом с четырьмя степенями подвижности.

Фаварето [29] описал конструкцию и работу промышленного робота POLAR 6000, разработанного специально для операций точечной сварки.

Вопросы применения роботов для целей контроля промышленных изделий рассмотрены Киршем [53]. Отмечалось, что использование неконтактных оптических датчиков в сочетании с управляемыми от компьютера роботами с контурной системой управления обеспечивает большую надежность контроля и достоверность принятия решений, чем может достигнуть человек. Робот обладает возможностью переносить камеру к любой нужной точке обследуемой детали и в этой позиции выполнять визуальные измерения. Контроль размеров стал возможен благодаря повторяемости позиционирования робота. В роботизированной системе контроля, описанной в работе, точность позиционирования составляла ± 0.025 мм.

В работе Бойкина и Уоррена [8] высказывается мнение, что в связи с ужесточением ограничений допустимых доз радиации для ремонтного персонала все работы, связанные с радиоактивностью, могли бы выполняться в будущем с использованием дистанционно управляемых манипуляторов и робототехнических устройств.

Несомненно, одним из самых известных роботов является манипулятор, установленный на корабле многоазового использования «Шаттл» (Remote Manipulator System). Конструкция исполнительного механизма этого дистанционно управляемого манипулятора, описанная Борроуменом [7], копирует строение руки человека. Она позволяет проводить множество операций: транспортировку астронавтов, ремонт и замену спутников. Сам манипулятор имеет длину 15,2 м и может перемещать объекты длиной до 19,3 м и диаметром до 4,6 м. Объект массой 25 000 кг может быть перемещен на расстояние 9 м от корабля за 9 минут.

С дальнейшим улучшением технологии возрастали возможности применения роботов. В работе [14] описано использование роботов DEA PRAGMA A 3000 для сборочных и погрузочно-разгрузочных операций с одновременным выполнением контроля качества. Роботы могут выполнять множество функций, включая такие, как селективная выборка определенных деталей, контроль их размеров, тестирование и сортировка деталей по классам на основе результатов проверки качества. Очевидно, что сборка и контроль качества, производимые одним и тем же роботом с одной и той же системой управления, обеспечивают как улучшение качества продукции, так и экономию временных и финансовых затрат.

Увеличение требований к роботам и автоматическому оборудованию вело к расширению технологических возможностей вновь создаваемых конструкций. Первые роботы использовались лишь для простых операций транспортировки объектов, однако по мере улучшения конструирования и производства роботов требования к ним также возрастали. В результате появлялись новые конструкции схватов и манипуляторов.

Ошеломляющий прогресс в области теоретической и практической робототехники был сделан в Японии. Первым роботом, примененным в Японии, был робот Versatrap закупленный в 1967 г. автомобильной фирмой Toyota. Позже, в 1968 г. фирма Kawasaki Heavy Industries в сотрудничестве с Unimate (США) начал выпускать роботы. Робототехническому буму способствовала большая поддержка новой отрасли со стороны японского правительства, университетов, других отраслей промышленности, в результате чего Япония вышла на первое место в мире по ис-

пользованию роботов и их продаже. Так, фирма FANUC владеет более чем 55 % мирового рынка.

Ниже дан краткий обзор истории промышленной робототехники [105]:

1. В 1920 г. в пьесе «Р.У.Р.» чешского писателя Карела Чапека появилось новое слово «робот».

2. Айзек Азимов написал ряд рассказов о роботах. В 1950 г. они были сведены в книгу «Я, Робот» — сборник из десяти рассказов. Его «Три закона робототехники», разработанные в 1942 г., гласили:

(а) Робот не может нанести вред человеку, или через бездействие допустить нанесение вреда человеку.

(б) Робот должен подчиняться приказам, отдаваемым человеком, если их выполнение не влечет нарушения первого закона.

(в) Робот должен защищать свое собственное существование, если действия, связанные с этим, не противоречат первому и второму законам.

3. В 1954 г. Джордж Девол-мл. подал заявку на патент на программируемое устройство для переноски предметов, или манипулятор.

4. В 1958 г. Девол продал лицензию фирмам Mapping, Maxwell и др. Предварительное техническое задание было разработано для робота фирмы Unimate.

5. В 1958 г. фирма AMF начала НИОКР по созданию робота Versatrap (versatile transfer — программируемая переноска объектов).

6. В 1962 г. AMF выпустила устройства для переноски объектов по непрерывной траектории (Model 102) и из точки в точку (Model 212). Unimate подготовила образец робота Mark I для натурных испытаний.

7. В 1965 г. AMF продала лицензию двум европейским фирмам и начала разработку робототехнической системы Versatrap.

8. В 1966 г. фирмой Versatrap выпущен робот с цикловым управлением Model 301.

9. В 1967 г. фирма Unimate выпустила робот Mark II, 2000, при разработке которого использовался опыт эксплуатации семидесяти установленных на промышленных предприятиях роботов Mark II, 1900. Япония импортировала первый робот Versatrap фирмы AMF, использованный на операциях покраски.

10. В 1968 г. фирма AMF Versatrap выпустила цикловой робот Model 302. В Японии созданы две модели роботов с сервоприводами и импортирован первый робот фирмы Unimate.

11. В 1969 г. первый робот фирмы Unimate начал работу на автомобильном заводе Nissan (Япония).

12. В 1970 г. фирма Unimate выпустила первый промышленный робот с шестью степенями подвижности. Фирма AMF продемонстрировала функционирование улучшенного промышленного робота Model 401 с контурным управлением.

13. В 1970 г. образована фирма AMF Japan Ltd. (Япония). К этому времени на японских предприятиях были размещены и функционировали 26 роботов.

14. В 1971 г. создана Японская ассоциация промышленной робототехники (JIRA).

15. В 1972 г. фирмой IBM разработан робот модели 7565, работающий в декартовой системе координат.

16. В 1973 г. фирмой Hayes-Dapa при поддержке канадского правительства созданы три образца промышленных роботов.

17. В 1974 г. фирма ASEA разработала электромеханический промышленный робот.

18. В 1976 г. на рынке промышленных роботов появилась продукция фирмы Cincinnati Milacron.

19. В 1978 г. фирма Unimate получила заказ от корпорации General Motors на разработку программируемого универсального сборочного робота PUMA.

20. В 1980 г. появились фирмы Automatrix Inc. и Cypotech, которая была совместным предприятием фирм Ransburg и Renault.

21. В 1982 г. фирмы General Electric, Volkswagen и Hitachi подписали соглашение о продаже роботов на рынке США.

22. В 1982 г. фирма Cincinnati Milacron выпустила на рынок промышленного оборудования знаменитые роботы серии T.

23. В 1982 г. General Motors и FANUC (Фуджицу) подписали соглашение о выпуске роботов в США.

24. В 1982 г. фирму Unimation поглотила фирма Westinghouse.

1.3. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ СХВАТОВ РОБОТОВ

В обширном обзоре конструкций схватов Лундстром [62] приводит множество разнообразных конструкций захватных устройств, включая схваты с жесткими и (или) гибкими пальцами, вакуумные, магнитные и специализированные схваты, используемые для манипулирования различными предметами, например большими коробками или листами бумаги. Очевидно, большинство этих схватов являются специализированными устройствами, приспособленными для выполнения специфических операций. Скиннер [89] обратил внимание на то, что вращающиеся пальцы могут быть использованы для захвата объектов, что представляет собой простое, надежное решение задач конструи-

рования манипуляторов. Скиннер описывает два вида таких конструкций пальцев, которые были успешно применены: одна — для промышленного робота, другую использовала NASA на своей пилотируемой космической станции Skylab в середине 70-х годов.

Иная конструкция схвата была предложена Фрэнчем и Айрэйтсом [35] в 1974 г. Исполнительный механизм в сочетании с этим схватом мог манипулировать деталями весом до 2,3 кг (с габаритами до $30 \times 30 \times 30$ см) и имел рабочую область около $3 \times 3 \times 1$ м. Одновременно с созданием этого схвата Мюрата [66] разрабатывал шарнирно сочлененный исполнительный механизм для поднятия сравнительно легких грузов. В своей конструкции Мюрата оптимизировал длину исполнительного механизма на основе требований к рабочему пространству и манипуляционным возможностям. Для уравнивания массы исполнительного механизма и уменьшения инерциального момента, порождаемого исполнительным механизмом при движении, использовались разгрузчики.

Одним из препятствий на пути внедрения промышленных роботов был тот факт, что в некоторых промышленных приложениях требуется набор разных схватов, если робот должен обладать достаточной гибкостью к смене продукции или для адекватного функционирования с разными видами деталей. Константинов [55, 56] предложил применить классификацию схватов в соответствии с движениями губок при схватывании. Эта система вместе с другими подобными системами классификации схватов и деталей предназначена для упрощения задачи выбора подходящих схватов для определенных операций.

В более поздних работах большое внимание было уделено конструкциям пальцев и самих захватных устройств. Роветта в [84] описывает несколько различных конструкций схватов для промышленных роботов. Одной из наиболее интересных упоминаемых им конструкций является хват, моделирующий кисть человека вплоть до механических фаланг и возвратных пружин для имитации взаимодействия мышц и сухожилий. Подобная конструкция, в которой кисть человека моделировалась схватом, имеющим пять пальцев с отстоящим большим пальцем, была предложена Капорали [16] и Капорали совместно с Шахинпуром [17]. К сожалению, этот хват в его настоящем виде довольно громоздкий, однако он демонстрирует универсальность и гибкость, часто присущие конструкциям схватов. Были созданы также и другие многопальцевые конструкции, такие, как Salisbury hand [63] и Hitachi hand [69].

Большая работа по созданию различных конструкций схватов, копирующих форму, строение и движения кисти человека.

проведена в Японии. Окада и Цучия [70] сконструировали схват, использующий подсистему пальцев, очень схожую с кистью человека. Они провели классификацию диапазонов перемещений созданного схвата на основе движений в плечевом, локтевом, а также кистевом шарнирах и движений пальцев и пришли к выводу, что движения в локтевом и плечевом сочленениях в основном служат для совершения сравнительно дальних перемещений кисти, в то время как кистевой шарнир и отдельные пальцы обеспечивают высокую степень точности в более ограниченном диапазоне перемещений. В этой руке использовались только три пальца (два пальца + большой палец), так как полагалось, что три — это минимальное число пальцев, достаточное для точного моделирования движений кисти человека. Хотя механизм управления этой конструкцией оказался более чем громоздким, рука показала высокую гибкость и приспособляемость при выполнении различных задач.

В Японии же Хиросе и Уметани [45] разработали «мягкий» схват, способный охватывать объекты неправильной формы по внешнему контуру и удерживать их, прилагая равномерно распределенное по длине пальцев давление. Каждый палец, напоминаяший по конструкции отрезок велосипедной цепи, приводился в движение тягами, проходившими внутри его и обеспечивавшими волнообразное огибающее движение пальца.

В то время как накапливался опыт по созданию схватов по подобию кисти и руки человека, продолжалась разработка методов расчета параметров конструкций схватов исходя из предполагаемых задач. Энгельбергер [26], называемый отцом современной робототехники, выдвинул идею о необходимости тщательного изучения и анализа круга задач, возлагаемых на проектируемый схват, для улучшения его конструкции. Колпашников и Челпанов [54] продвинули это направление на шаг вперед, представив классификацию захватных устройств по количественным параметрам, таким, как размер, положение, ориентация и усилие схвата. На ее основе определяются другие параметры и ограничения с учетом условий работы робота и выполняемых им функций.

Наряду с большим разнообразием конструкций захватывающих устройств еще большее разнообразие существует в вариантах подхода к их конструированию. Деморе и Жерель [23] предложили один из методов проектирования схватов и исполнительных механизмов, базирующийся на использовании определенных параметров, а именно: частоты рабочего цикла, величины прецессии, диапазонов перемещений и нагрузки. При использовании формул, представленных в их работе, все эти

факторы могут быть сведены в так называемый Q-фактор, являющийся в основном функцией нижней частоты резонанса исполнительного механизма и размеров зоны, внутри которой должен работать манипулятор, но, что довольно примечательно, этот фактор не зависит от размеров руки.

Другой метод, сформулированный Буркхардтом и Жерелем [11], основывался на оценках моментов и жесткостей в шарнирах исполнительного механизма. Этот метод, применимый при проектировании новых манипуляторов, также можно использовать для сравнения уже существующих конструкций. Как доказательство этого Буркхардт и Жерель провели сравнение конструкции промышленного робота Trallfa TR 300W с рукой человека, используя их параметры.

Вышесказанное вовсе не означает, что вся исследовательская и конструкторская работа проводилась на основе одних и тех же базовых положений. В робототехнике, а также в протезировании ведется обширная работа по созданию новых конструкций захватных устройств. Одно из таких ортопедических устройств, «Белградский протез» кисти конструкции Ракича [79], позволяет по-новому взглянуть как на конструирование схвата, так и на создание систем управления им. Хотя «Белградскую кисть» и нельзя непосредственно использовать в робототехнических целях, она представляет собой пятипальцевое устройство, имитирующее кисть человека внешне и по выполняемым функциям. В другой работе Роветта [85] рассматривает механическую кисть, способную захватывать объекты практически любой формы. Эта кисть, состоящая из двух пальцев и подпружиненной подвижной пластины, обеспечивающей третью точку контакта, приводится в движение тягами во взаимодействии с возвратными пружинами. Захватывание предметов производится под действием поджатия подвижной пластины к пальцам. Роветта отмечал, что этот схват можно использовать и в промышленной робототехнике, и для протезирования, особенно в связи с относительной простотой конструкции.

Параллельно с исследованиями в области схватов большая работа была проведена по созданию исполнительных механизмов роботов. Фихтер и Макдауэлл [31] разработали конструкцию исполнительного механизма на основе замкнутой, а не открытой кинематической цепи, предложив альтернативу антропоморфической школе в проектировании роботов. Фрэнк [34] предложил конструкцию запястного шарнира, способного вращаться вокруг трех осей, обладающего качествами очень гибкого запястного сочленения и обеспечивающего выполнение более тонких и сложных задач, чем можно обычно ожидать.

Табеш [93] спроектировал и сконструировал схват с имитацией качательного движения для робота модели GE P50.

Одним из важных аспектов проектирования схватов и манипуляторов является область управления, которую можно подразделить на два класса: первый связан с действительным физическим управлением (вопросы электроники, пневматики, гидравлики и механики), а второй — с математическими приложениями теории управления, а именно: с проектированием и программированием манипуляционных роботов.

В самом раннем простейшем виде физического управления в качестве основного средства энергетического питания манипуляторов и схватов использовалась пневматика. В дополнение к этому имеется много примеров промышленных роботов, в которых используется сочетание пневматики и гидравлики, пневматики и электроники или другие гибридные способы регулирования и управления действиями робота. Один из примеров — канадский промышленный робот [33], в котором используется гидравлика в приводах исполнительного механизма и пневматика для управления схватом. Другой пример использования пневматического управления продемонстрировали Ханафуса и Асада [42]; они разработали пневматическую систему позиционирования, которая включала трехпальцевый схват с пневматическими датчиками на концах пальцев, информация с которых в качестве обратной связи управляла перемещениями всего манипулятора.

Однако с развитием микропроцессорной технологии более простым и, что еще важнее, более продуктивным оказалось электронное управление. Даразан и Джеффри [22] разработали способы использования микропроцессоров для циклового и контурного управления и программирования. На основе созданных ими алгоритмов возможно было запрограммировать пневматический манипулятор для работы в любом из этих двух режимов. Позднее Батур и Кая [3] применили микропроцессоры для управления пневматическим манипулятором, информация о положении которого в аналоговой форме снималась с установленных на манипуляторе потенциометров, преобразовывалась микропроцессором к цифровому виду и обрабатывалась, а затем сигналы управления подавались на управляющие клапаны приводов исполнительного механизма.

Одновременно с этим велась разработка математических алгоритмов для планирования и генерации движений манипуляторов. Один из них, предложенный Лоффом и Сони [59], генерировал движение манипулятора в приращениях для каждого положения механизма. Под управлением программы, использующей рекурсивным образом этот алгоритм, манипулятор пе-

ремещался в конечное положение, избегая столкновений с препятствиями, находящимися на его пути.

Были также разработаны математические модели для описания движений роботов. Бирк [5] получил набор эмпирических соотношений, позволяющих роботу с шестью степенями свободы производить ориентирование и позиционирование деталей. На условия функционирования накладываются следующие ограничения: во-первых, робот может выбрать одну деталь из случайного набора похожих деталей без применения системы технического зрения (СТЗ), и, во-вторых, существуют три точки, из которых можно определить пространственные положения как детали, так и схвата. Манипулятор, работающий по алгоритму Бирка, обучается помещать деталь в наиболее оптимальное положение. Применив другой подход, Мюрата [67] разработал алгоритм для управления манипулятором в реальном масштабе времени, базирующийся более на кинематических зависимостях, чем на динамических, как это обычно бывает. Так как этот алгоритм основан на кинематике, отпадала необходимость решения итеративных уравнений с использованием дифференциальных и алгебраических методов, которые требуются для описания динамики манипулятора. Это в свою очередь обеспечило более быстрое и легкое программирование и более короткое время обработки алгоритма процессором, который управлял роботом.

Применив еще один отличающийся подход, Лю и Уолкер [61] использовали методы линейного программирования для решения задач минимизации времени отработки траектории манипулятором. Они положили в основу своего метода предположение о том, что ограничения на ускорения и скорости в манипуляторе известны, а ограничения на минимальную ошибку позиционирования также могут быть определены или приняты в зависимости от конфигурации манипулятора.

В качестве другого подхода к управлению механическими манипуляторами Рэйберт [77] использовал одну из форм запоминания пространства состояния, в которой можно управлять манипулятором, адаптироваться к изменениям конфигурации механизма и неявным образом выполнять преобразования координат манипуляторов. Это в свою очередь позволяет получить систему уравнений движения, включающих переменные состояния, причем в этих уравнениях используются данные, полученные во время «познавательных» движений, сделанных роботом ранее.

В дополнение к задаче определения положения робота в пространстве и времени важными вопросами являются способность схвата захватывать детали стабильным образом, обеспечение

какой-либо обратной связи по величине прилагаемой силы и в некоторых случаях определение дальности до интересующего объекта. Изучая вопросы стабильного захватывания, Ханафуса и Асада [41] пришли к выводу о том, что оно обеспечивается при использовании определенного условия стабильности, информация о выполнении которого поступает на робот со схвата. Жерель [38], полагая важным вопрос очувствления промышленных роботов, предложил метод управления, в котором некоторое подобие тактильного очувствления обеспечивалось обратной связью по силе. Он предложил использовать датчик усилия для реализации обратной связи по силе, которая в свою очередь применяется для корректировки движения манипулятора.

1.4. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ДАТЧИКОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТАМИ

С начала 70-х годов работы в области робототехники сконцентрировались на разработке датчиков, способных снабдить систему управления робота информацией о выполняемой задаче. Такие датчики можно подразделить на две категории:

Датчики внутренней информации: потенциометры, тахометры, датчики деформации, микропереключатели.

Датчики внешней информации: тактильные, техническое зрение, звуковые, распознавание речи.

Обширные исследования были проведены в области датчиков внешней информации. Эти исследования концентрировались как на конструкциях, так и на программном обеспечении. Като и др. [51] создали датчик визуальной информации, способный различать цвета. Эйгин [1] описал аппаратное и программное обеспечение экспериментальной системы технического зрения, которая может использоваться для распознавания деталей и их позиционирования, проверки деталей и выделения характерных частей изображения. Перед разработчиками СТЗ роботов стоит важная задача: обеспечить решение роботом задач, которые решает человек при сборке и контроле процессов, а именно — распознавание и ориентирование деталей. Не обладая такими возможностями, робот имеет мало преимуществ по сравнению с рабочим, который может легко определить и отбраковать поврежденные детали во время сборки. В настоящее время роботы не обладают возможностью проводить проверку деталей одновременно со сборкой, и собираемые детали должны поставляться роботу в строго определенное место и в определенном положении.

Значительная работа ведется и по созданию видов датчиков, отличных от систем технического зрения. Выпускаются

тактильные датчики, разрешающая способность которых не хуже, чем у человека [58]. Так как структура тактильных матриц все более утончается, возрастает потребность в препроцессорной обработке информации для уменьшения вычислительной нагрузки системы управления. Совмещение микропроцессора и датчика приводит к появлению интеллектуальных сенсоров, которые можно программировать на поиск различных ситуаций в соответствии с выполняемой задачей и соответствующую реакцию на складывающуюся ситуацию. Прimenение многочисленных усложненных интеллектуальных сенсоров требует усложнения архитектуры системы управления роботом с целью поддержки мультипроцессорной обработки информации. Задача распознавания частично видимых предметов с использованием метода фокусировки на локальных деталях рассматривалась в работе [13].

Другой развивающейся технологией очувствления является использование ультразвука. Главное преимущество ультразвуковых систем — возможность измерения расстояния до объектов. СТЗ такой возможностью не обладают. Информация о близости к объекту полезна при выполнении неконтактных работ типа окрашивания аэрозолями и других операций нанесения покрытий. Еще одним преимуществом ультразвуковых систем очувствления является то, что для их работы не требуются ни равномерное освещение, ни контрастность сцены, необходимые современным СТЗ. Кук [20] продемонстрировал микрокомпьютерную ультразвуковую систему построения изображений, способную выполнять построение контуров объектов, обнаружение деталей, их измерение и несложное распознавание. Ультразвуковой приемопередатчик располагался на схвате трехстепенного манипулятора, управляемого от микроЭВМ. Простое устройство сбора данных передавало результаты замеров расстояний в двоичном коде на обработку в ЭВМ, которая дополнительно управляла кинематикой манипулятора. Таким образом, манипулятор мог обрабатывать заданные траектории и избегать столкновений с препятствиями.

В области разработки тактильных систем Сато и др. [86] представили метод идентификации деталей и их контуров, в котором использовалась трехмерная тактильная головка и производилась последующая обработка двоичных изображений. Созданный ими датчик представлял собой матрицу из 8×8 подпружиненных чувствительных элементов, которые при контакте с предметом вырабатывали аналоговый выходной сигнал. Этот сигнал затем преобразовывался в двоичную форму и поступал в управляющую ЭВМ. Благодаря алгоритмам обработки

информации, поступающей с сенсора, было возможно проводить распознавание деталей и контроль их размеров.

Другой подход к конструированию тактильных датчиков был предложен Бриотом (1980). Он разработал «искусственную кожу», представляющую собой печатную плату, в которую были встроены изолированные чувствительные к давлению элементы. При воздействии давления их сопротивление изменялось прямо пропорционально величине давления. По этой информации можно было определить форму пятна контакта губок схвата и детали, а затем идентифицировать деталь, сравнивая с изображениями, полученными ранее и хранящимися в памяти ЭВМ.

Тогда же Бейджи [4] рассматривал применение для целей управления роботами «умных», как он их называл, датчиков дальности, сил и моментов, тактильных параметров и ошибок. Основываясь на этом подходе, Ину [49] использовал обратную связь по силе для коррекции сравнительно малых неточностей размещения собираемых деталей и компенсации ошибок позиционирования исполнительного механизма. Обширный обзор работ по очувствлению роботов и элементам искусственного интеллекта в робототехнике дан в [48].

Предлагались и другие способы управления манипуляторами. Исследуя промышленные роботы, Вукобратович и Стокич [101] пришли к выводу о значительности взаимосвязи степеней подвижности и о возможности прямого измерения этого эффекта. Утверждалось также, что при введении глобальной обратной связи по силе с учетом взаимосвязи степеней подвижности может быть значительно улучшена устойчивость системы и достигнуто улучшение качества управления. Глобальное управление значительными перемещениями манипулятора для получения высоких показателей процесса управления, недостижимых при других видах управления, применили также Такегаки и Аримото [94]. Используя при управлении значительными перемещениями манипулятора линейную обратную связь по обобщенным координатам и скоростям их изменения, они обнаружили, что в дополнение к подобному управлению для тонкой подстройки малых движений манипулятора, результатом которых является конечная ориентация схвата по отношению к детали, можно применить ориентированное на выполнение задачи управление от микрокомпьютера. Важным недостатком этой системы управления является присущая ей сложность, в связи с чем для обработки больших объемов данных необходимо использовать либо мультипроцессорную обработку, либо мощный процессор.

Рэйберт и Крэйг [78] разработали гибридную обратную связь: по положению и силомоментную. Для измерения сил и моментов использовался датчик сил, вмонтированный в запястье

манипулятора; датчики положения размещались в сочленениях манипулятора. Таким образом, управление велось с учетом прилагаемых к манипулятору воздействий.

Хьюитт [43] предложил метод устранения взаимосвязи степеней подвижности в нелинейных динамических системах, подобных тем, которые часто имеются в манипуляционных роботах. На основе этого метода из уравнений движения промышленного робота получается закон управления им. В более поздней работе [44] Хьюитт получил уравнения движения манипулятора без учета взаимосвязи степеней подвижности, используя один из типов управления по силе. При этом для построения управляющего алгоритма, способного работать в реальном масштабе времени, требовалось лишь частичное моделирование управляемой системы.

Большая работа была проведена и в другом направлении — по определению рабочей области пространства, в которой мог функционировать манипулятор. В работе [68] рассматривается машинно-ориентированный алгоритм вычисления параметров рабочего пространства манипулятора при известных геометрических параметрах исполнительного механизма и диапазонах перемещений в сочленениях.

Сугимото и Даффи [90, 91] опубликовали две статьи по вопросу измерения наибольшего радиуса действия манипулятора. В первой из них представлен алгоритм исследования обобщенных манипуляторов с произвольным количеством сочленений. Однако отмечалось, что из-за некоторых допущений, лежащих в структуре алгоритма, он может оказаться неприменимым к некоторым конфигурациям манипуляторов, например с пересекающимися или параллельными осями. Во второй статье эта проблема решается для обобщенных манипуляторов. Это имеет значение в связи с тем, что существуют специализированные промышленные роботы с параллельными и пересекающимися осями, а метод позволяет ускорить расчеты рабочей зоны манипуляторов.

Для синтеза кинематики двухзвенных и трехзвенных манипуляторов Цай и Сони [96] разработали набор проектировочных карт на базе шаблонов траекторий двухзвенных исполнительных механизмов. Эти карты могут быть использованы при определении рабочих зон двухзвенных и трехзвенных манипуляторов.

После определения рабочей области манипулятора возникает задача оптимизации его перемещений внутри этой области. Метод минимизации времени перемещения манипулятора, базирующийся на ограничениях, наложенных на систему, рассмотрен в работе [60]. В основе подхода лежало соображение о том, что при выполнении поставленной задачи робот должен без

столкновений с препятствиями перемещаться по заранее спланированной траектории, что обычно достигается при начальном программировании движений исполнительного механизма в режиме обучения (рис. 1.4.1). Вукобратович и Кирчански разработали метод синтеза оптимальных траекторий [100]. Более подробное описание современных методик см. в [9, 15, 74, 87, 88]. Нужно отметить, что производительность промышленной системы в большой мере зависит от конструктивных особенностей выпускаемой продукции и от способа организации производственного процесса (трудовых, машинных, робототехнических, сырьевых ресурсов). Нет никакой гарантии, что полное

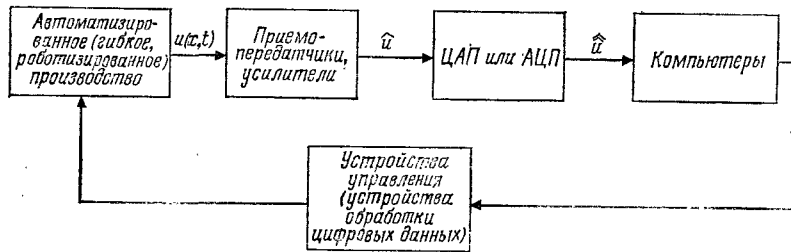


Рис. 1.4.1. Автоматизированное (гибкое, роботизированное) производство с числовым программным управлением.

замещение рабочих роботами значительно повлияет на выпуск продукции какой-либо фирмы или на стоимость продукции, если предварительно не будут тщательно спланированы используемые ресурсы. По этим причинам производительность может повыситься лишь при гибкой автоматизации и внедрении технологии обработки информации при существенном увеличении возможностей для связывания процессов конструирования и производства в единую сеть. Гибкое производство может включать множество разнообразных процессов и видов продукции. Оно может охватывать непрерывный поток производственных процессов, как, например, в химическом производстве. Такие процессы легко управляются системами с замкнутой обратной связью. Другие производственные системы связаны с обработкой партий сырья. Однако акцент в применении гибких производственных систем делается на отрасли промышленности, где проектируются и выпускаются отдельные предметы, а не партии материалов или их потоки. Сюда относятся производство и сборка автомобилей (рис. 1.4.2), ЭВМ, микроэлектронных компонентов ЭВМ (например, полупроводниковых микросхем), самолетов, приборов, одежды, упаковки, строительных материалов, станков, инструментов и даже роботов. Преимущества

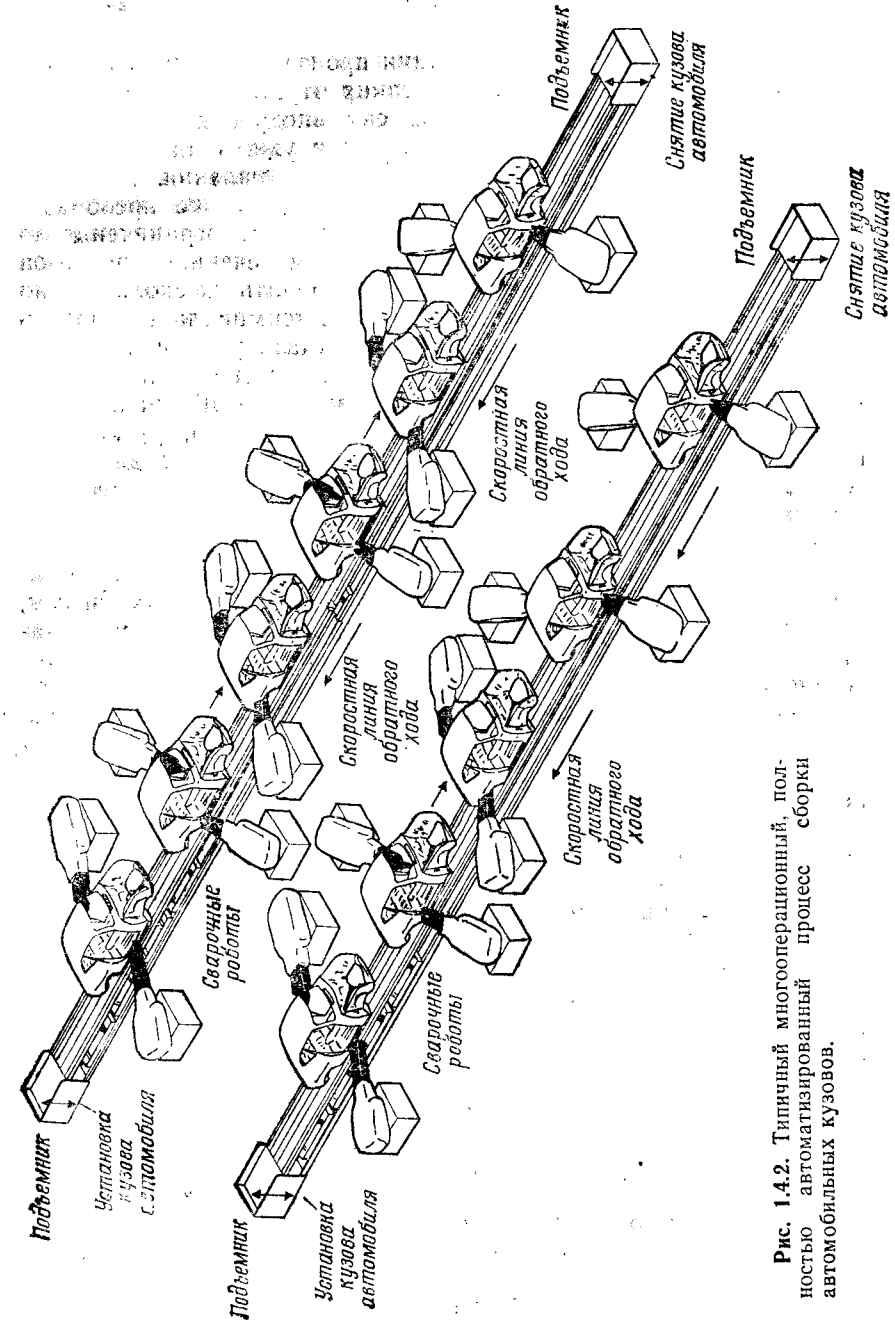


Рис. 1.4.2. Типичный многооперационный, полностью автоматизированный процесс сборки автомобилей.

робототехники и гибкой организации производства наиболее эффективно проявляются именно в таких отраслях с дискретным производственным процессом. Эффект внедрения гибкой технологии проектирования и автоматизации уже наблюдался при автоматизированном проектировании и изготовлении. Программы САПР могут проводить точные геометрические преобразования настолько быстро, что разработчики не ограничены теперь, например, определенным количеством сечений и разрезов проектируемых изделий, а могут рассматривать их сколь угодно много. Проектировщики могут на экране терминала наблюдать вращение детали вокруг любой оси, получать укрупненное изображение предмета для детального рассмотрения или изображение предмета в целом. Использование САПР значительно увеличивает производительность труда. Например, разработка новой конструкции автомобиля, занимавшая ранее два года, теперь может быть проведена менее чем за восемь месяцев, а применение САПР при выпуске деталей из пластических масс увеличивает производительность в среднем в четыре раза.

Автоматизированное изготовление базировалось ранее на использовании автоматических транспортно-складских систем, а также станков с ЧПУ. Первые станки с ЧПУ программировались с использованием бумажных перфолент. Однако с началом установки цифровых вычислительных машин малых размеров непосредственно на станках эта технология была вытеснена. В системах с прямым числовым управлением все связи между оборудованием осуществляются электронным способом, а передача деталей со станка на станок производится либо вручную, либо роботами. Для продукции, производимой в большом объеме, процесс может быть автоматизирован при помощи односторонних (узкопрофильных) станков с ЧПУ. Такие станки бывают весьма дорогими, но достаточно гибкими для выпуска другой продукции. Использование роботов в качестве программируемых устройств для перемещения заготовок и выполнения повторяющихся задач становится в таком случае логичной альтернативой гибких производственных систем. На первый взгляд роботы обладают следующими преимуществами:

- Повышение производительности труда
- Эффективное использование оборудования
- Уменьшение производственных затрат
- Улучшение качества продукции
- Повышение гибкости производственного процесса
- Уменьшение времени запуска производства
- Гибкое и упрощенное программирование
- Способность работать во вредных средах
- Улучшение качества рабочих областей

- Увеличение конкурентоспособности
- Улучшение качества производственных площадей
- Минимальные затраты на диагностику и отладку
- Малые сроки окупаемости
- Высокая прибыль капитальных вложений

Однако они обладают также рядом недостатков. Одной из главных сложностей в роботизировании сборки является то, что робот пока не способен взять случайно ориентированную деталь из бункера без специальной системы зрения. Робот может состязаться в экономическом плане с другими устройствами, лишь если ориентация собираемых деталей фиксирована или сохраняется на разных стадиях процесса сборки.

Современное промышленное использование роботов включает следующие области [27]:

1. *Литье под давлением.* Применение роботов в этой области облегчается присущим этому виду обработки постоянным расположением деталей в штампах и является необходимым в связи с часто неприятными производственными условиями, связанными с литьем.

2. *Точечная сварка.* Выполнение этой работы в первую очередь требуется в автомобильной промышленности, и сейчас на ней занято большинство используемых манипуляторов.

3. *Дуговая сварка.* Использование роботов для дуговой сварки было облегчено тем, что большая часть оборудования ручной дуговой сварки легко может быть адаптирована к использованию роботом.

4. *Литье.* Здесь роботы используются для перемещения деталей.

5. *Ковка.* В основном здесь роботы применяются для переноса горячих металлических заготовок или для работы в зонах высокой температуры. Их применение ограничено из-за производства относительно малых партий продукции и сложности некоторых деталей.

6. *Обработка давлением.* Роботы применяются на этих операциях в первую очередь в автомобильной промышленности на штамповке корпусных деталей. Одним из стимулов их использования было увеличение безопасности рабочих на операциях прессовой штамповки и вырубки.

7. *Окраска пылением и поверхностная обработка.* В этой области широкое применение роботов на производстве обусловлено вредными для человека условиями работы и более высокой повторяемостью и стабильностью технологического процесса нанесения краски, изолирующего покрытия и т. д.

8. *Пластическая формовка.* Роботы используются для загрузки и разгрузки формовочных штампов, а также для

зачистки и снятия заусенцев. Их применение на этих операциях экономически оправдано более коротким временем рабочего цикла и большей, чем у человека, производительностью.

9. *Литьевые операции.* На этих работах роботы часто применяются на заливке металла в формы и на других участках, характеризующихся вредными для человека условиями работы.

10. *Загрузка станков.* Использование роботов в этой области облегчалось предшествующей установкой оборудования с ЧПУ и сравнительной простотой связи робота с таким оборудованием.

11. *Паллетирование.* Здесь роботы применялись для паллетирования деталей и изделий и управления их учетом.

Из этого перечня примеров использования роботов в современном производстве видно, что развитие и применение манипуляционных роботов далеко ушло от их скромного дебюта в качестве копирующих телеоператоров, созданных в 1947 г. в Аргонской национальной лаборатории для манипулирования радиоактивными веществами.

1.5. МАНИПУЛЯЦИОННЫЕ РОБОТЫ С УПРАВЛЕНИЕМ ОТ ЭВМ

Манипуляционные роботы с управлением от ЭВМ, рассматриваемые в этой книге, состоят из следующих основных компонентов (рис. 1.5.1 и 1.5.2):

1. Мини- или микроЭВМ с соответствующими памятью, процессором, внешними устройствами хранения информации и терминалом.

2. n -звенный электромеханический или гидравлический исполнительный механизм с вращательными, поворотными, призматическими и телескопическими сочленениями.

3. Датчики внешней информации типа системы технического зрения (цифровая камера с монитором), датчики силы, приемопередатчики, тактильные датчики.

4. Логический контроллер ввода-вывода для обработки информации в случае использования двигателей постоянного тока с оптическими кодовыми или импульсными датчиками.

С другой стороны, общий набор оборудования робототехнической лаборатории должен включать следующее (рис. 1.5.3):

1. Некоторое количество многостепенных, а именно шести-степенных манипуляторов, таких, как PUMA серии Rhino XR-2, GE P50, IBM 7565 или Cincinnati Milacron T3.

2. Несколько микро- или мини-ЭВМ, подобных ЭВМ серии PDP-11 или IBM PC-AT.

Общие сведения о манипуляционных роботах

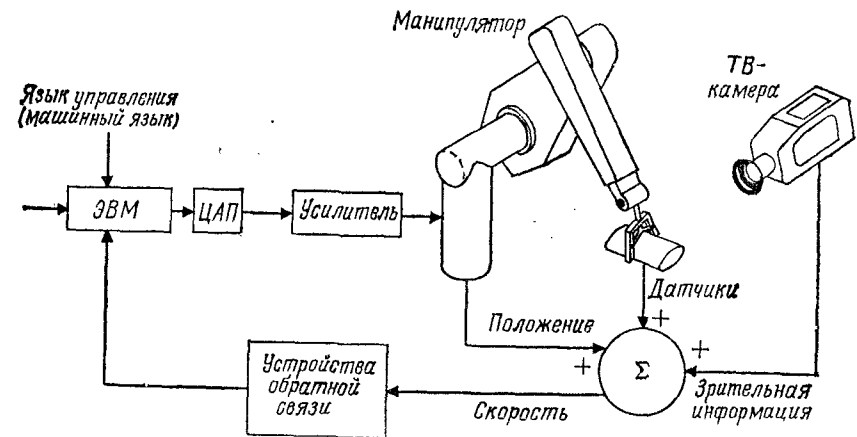


Рис. 1.5.1. Схема организации манипуляционного робота, управляемого от ЭВМ.

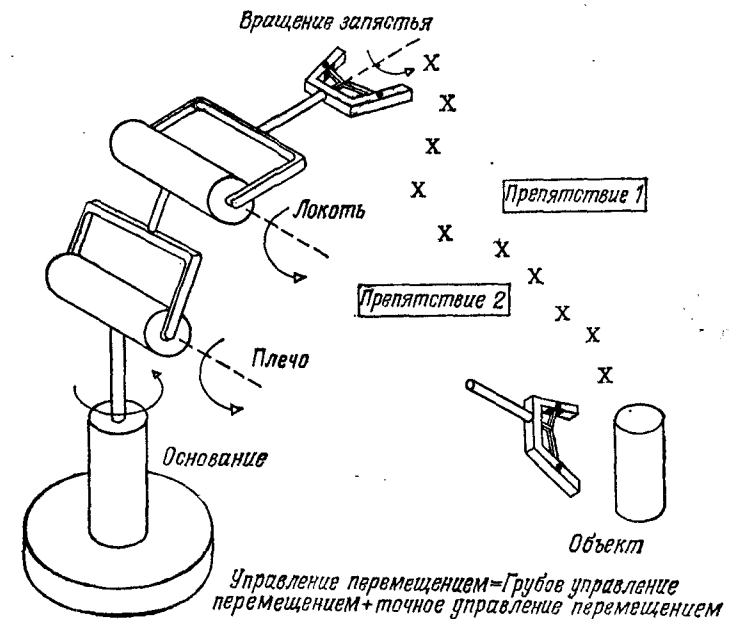


Рис. 1.5.2. Перемещение манипулятора, управляемого от ЭВМ. Для выполнения задачи сборки исполнительный механизм перемещается в системе координат основания в окрестность заданного объекта по запланированной траектории.

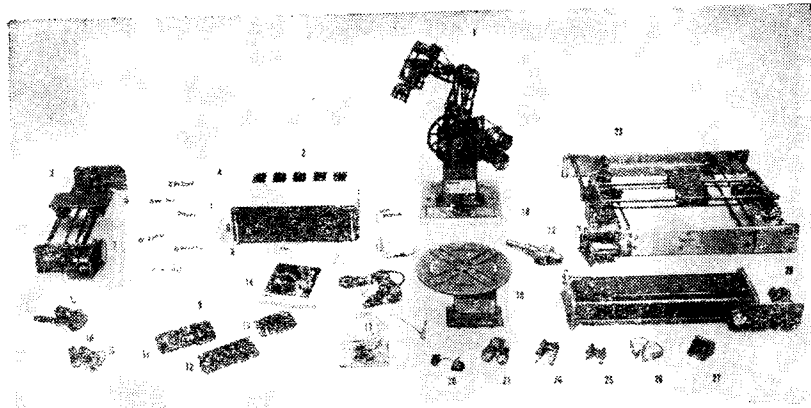


Рис. 1.5.3. Учебный лабораторный набор оборудования по робототехнике.
(С разрешения Rhino Robots.)

1. Манипулятор Rhino XR Mark II.
2. Устройство управления Mark II.
3. Линейно-перемещаемое основание.
4. Руководство по программному обеспечению Rasp 1.04.
5. Rasp 3.04.
6. Программное обеспечение IBM.
7. TRS-80.
8. Руководство по языку программирования.
9. Руководство по пультам обучения.
10. Экспериментальный набор двигателей.
11. Плата ввода-вывода.
12. Плата языка программирования RHINO-Com.
13. Плата CCS 7710A.
14. «Введение в робототехнику».
15. Пульт обучения.
16. Держатель Moto-Dremel.
17. Вакуумные пальцы.
18. Алюминиевое основание.
19. Поворотный стол.
20. Магнитное подъемное устройство.
21. Трехпальцевый схват.
22. Схват Rhino-Rite.
23. Координатный X—Y стол.
24. Схват с особо длинными пальцами.
25. Схват с узкими пальцами.
26. Двухжовшковая насадка.
27. Ковшовая насадка.
28. Цепной ленточный конвейер.

3. Несколько интерфейсных устройств, таких, как АЦП, ЦАП и цифровые логические контроллеры ввода-вывода.

4. Электронные компоненты систем управления приводами, такие, как оптические кодовые датчики, импульсные датчики, усилители тока.

5. Цифровые телевизионные камеры или системы технического зрения.

6. Цифровые микрофоны или технические системы слуха.

7. Ультразвуковые анализаторы изображений и локационные устройства.

8. Большое количество шаговых двигателей, двигателей постоянного тока с оптическими кодовыми датчиками, модулей конвейерного и карусельного типа.

9. Большое количество деталей машин: редукторов, цепей, тяг, цепных колес, приводных ремней, шкивов, стопоров, гибких валов, тросов и муфт.

10. Значительный запас программного обеспечения для осуществления некоторых основных пространственных перемещений роботов и управления.

Этот лабораторный набор представляет средства для проведения как обучения, так и исследований по робототехнике. Конечно же, ему должны сопутствовать соответствующие справочные пособия по робототехнике и руководства к лабораторным работам.

1.6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ РОБОТОВ

Рабочее пространство или объем робота — это область его достижимости; исполнительный механизм и схват могут перемещаться в любую точку внутри ее границ. С точки зрения механики большинство роботов относятся к одной из следующих пяти категорий:

1. Роботы, работающие в декартовой системе координат.
2. Роботы, работающие в цилиндрической системе координат.
3. Роботы, работающие в сферической или полярной системе координат.
4. Роботы с поворотными шарнирами.
5. Многосвязные манипуляторы.

1.6.1. РОБОТЫ, РАБОТАЮЩИЕ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Примерами роботов этого типа являются роботы модели IBM RS-1 и 7565 White Cloud или SIGMA фирмы Olivetti. Движения в них обычно осуществляются вдоль трех взаимно перпендикулярных осей, как показано на рис. 1.6.1 и 1.6.2. Для них достигаются наилучшие разрешение и точностные характеристики внутри рабочей области. Некоторые из преимуществ и недостатков роботов перечислены ниже.

Преимущества

1. Высокая разрешающая способность¹⁾ и отличные точностные характеристики.

¹⁾ Разрешающая способность — это наименьшее расстояние, на которое может быть перемещен схват. — Прим. ред.

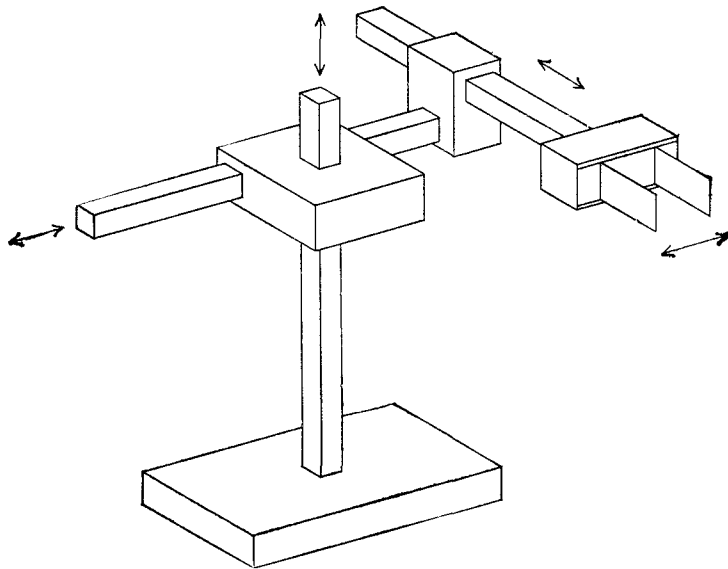


Рис. 1.6.1. Робот, работающий в декартовой, или прямоугольной. системе координат.

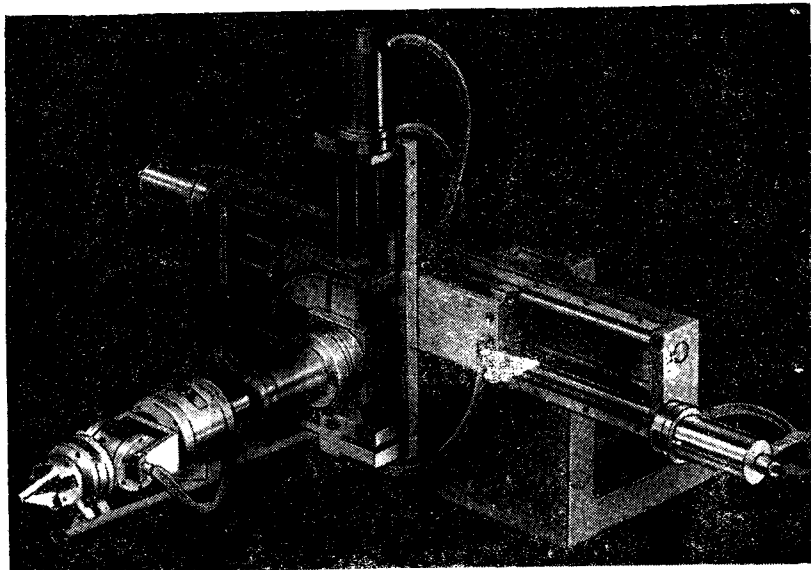


Рис. 1.6.2. Робот, работающий в декартовой системе координат. (С разрешения Mask Corp.)

2. Хорошие возможности по обходу препятствий и предупреждению столкновений.

3. Независимость гравитационной нагрузки, а следовательно, упрощение управления движениями в сочленениях.

Недостатки

1. Большие габариты конструкции.
2. Ограниченная рабочая область.
3. Ограниченная совместимость с другими манипуляторами в общей рабочей области.

4. Усложненная конструкция для осуществления линейных перемещений.

5. Большая занимаемая производственная площадь.

1.6.2. РОБОТЫ, РАБОТАЮЩИЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Примерами роботов этого типа могут служить роботы модели Versatrap Model F600 фирмы Prab и Станфордский манипулятор (см. [74]). Они обычно имеют две поступательные степени подвижности во взаимно перпендикулярных направлениях и одну вращательную степень подвижности (рис. 1.6.3 и 1.6.4). Ниже перечислены преимущества и недостатки роботов этого типа.

Преимущества

1. Почти отсутствует зависимость от гравитационных нагрузок.

2. Движение осуществляется без столкновений.

3. Наличие двух осей линейного перемещения делает механическую конструкцию менее сложной, чем у роботов, работающих в декартовой системе координат.

Недостатки

1. Большое количество составных узлов.

2. Ограниченная совместимость с другими манипуляторами в общей рабочей области.

3. Меньшие точность и разрешение по сравнению с роботами, работающими в декартовой системе координат.

1.6.3. РОБОТЫ, РАБОТАЮЩИЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ ИЛИ ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Примером роботов этого типа является робот модели 2000B, производимый фирмой Unimation Inc. У этих роботов имеются две вращательные и одна поступательная (телескопическая)

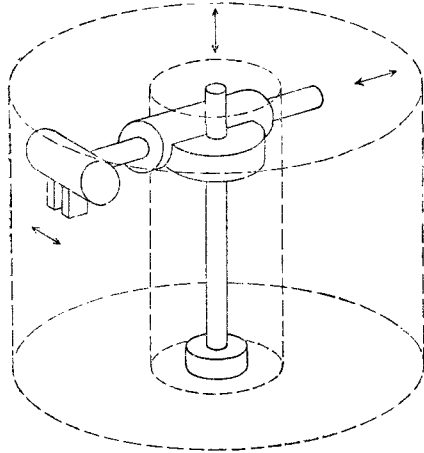


Рис. 1.6.3. Робот, работающий в цилиндрической системе координат.

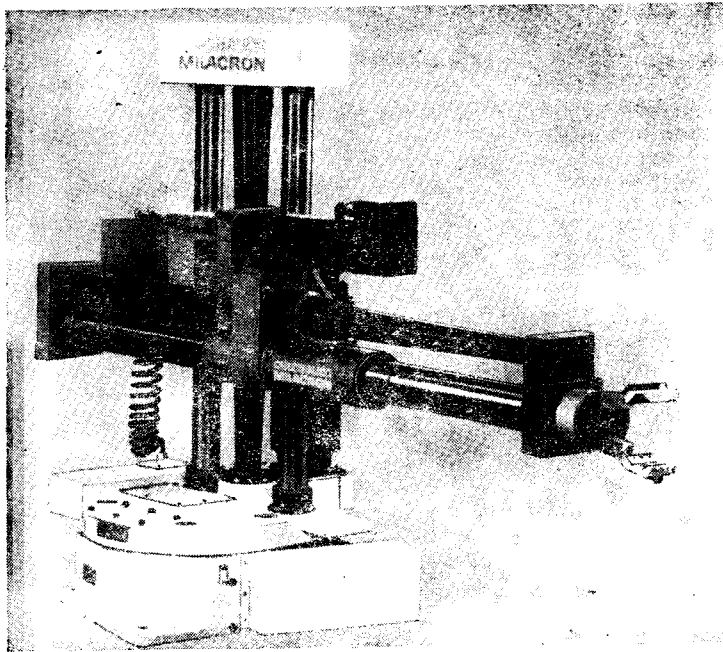


Рис. 1.6.4. Робот, работающий в цилиндрической полярной системе координат. (С разрешения Cincinnati Milacron.)

степень подвижности. Ниже перечислены преимущества и недостатки роботов этого типа.

Преимущества

1. Наименьший вес и минимальная сложность конструкции.
2. Малые движения в сочленениях при выполнении многих движений.
3. Совместимость с другими роботами и оборудованием в общей рабочей области.
4. Хорошее разрешение из-за того, что ошибки позиционирования направлены перпендикулярно друг другу.

Недостатки

1. Значительные переменные моменты во втором и третьем сочленениях исполнительного механизма, что приводит к необходимости решения задачи их сбалансирования.
2. Ограниченная способность избегать столкновений с препятствиями.
3. Ошибка позиционирования пропорциональна радиусу и велика из-за использования вращательных движений.

1.6.4. МНОГОЗВЕННЫЕ РОБОТЫ С ПОВОРОТНЫМИ ШАРНИРАМИ

Это человекоподобные роботы с избыточным количеством степеней свободы¹⁾. Примерами являются роботы моделей PUMA серий 500/600/250 или модели T³ фирмы Cincinnati Milacron (рис. 1.6.7 и 1.6.8). Ниже перечислены их преимущества и недостатки.

Преимущества

1. Гибкость в достижении точек над или под объектом.
2. Совместимость с другими роботами, работающими в той же общей рабочей области.

Недостатки

1. Плохое разрешение и точность, т. е. максимальная ошибка позиционирования.
2. Большие переменные моменты в шарнирах, что приводит к необходимости решения задачи их сбалансирования.

¹⁾ Обычно манипуляторами с избыточным числом степеней свободы называют такие, у которых число степеней свободы больше шести. — Прим. ред.

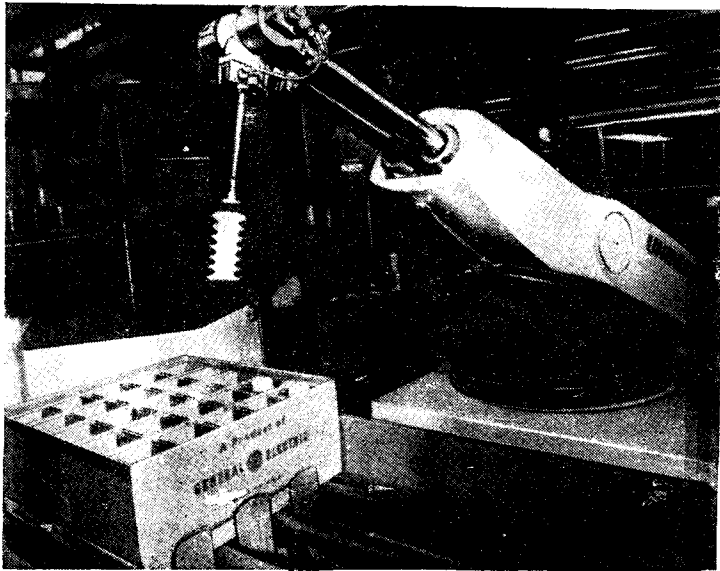


Рис. 1.6.5. Робот, работающий в сферической системе координат. (С разрешения Unimation Inc.)

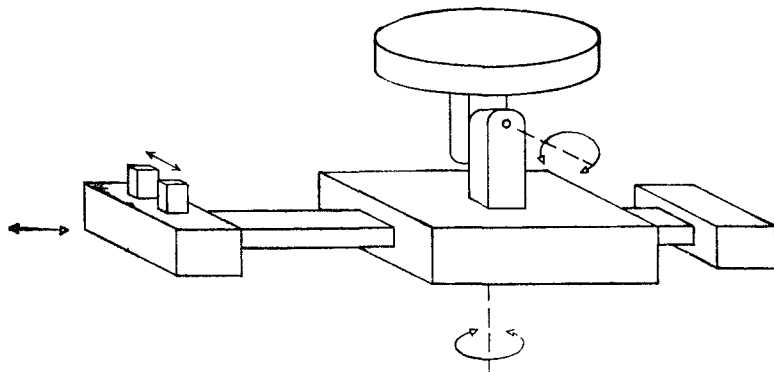


Рис. 1.6.6. Робот, работающий в сферической или полярной системе координат.

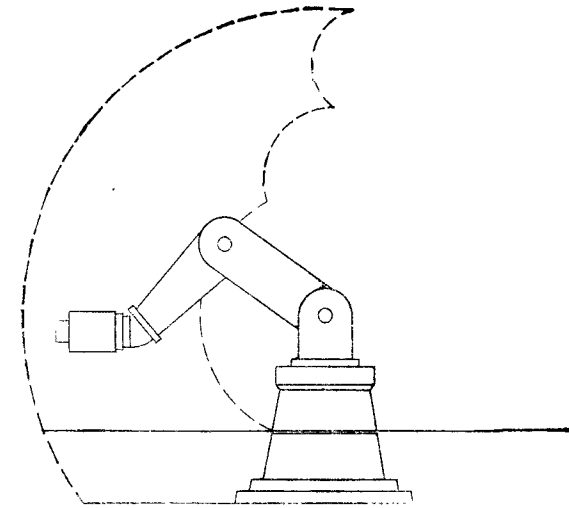


Рис. 1.6.7. Многозвенный робот с поворотными шарнирами.

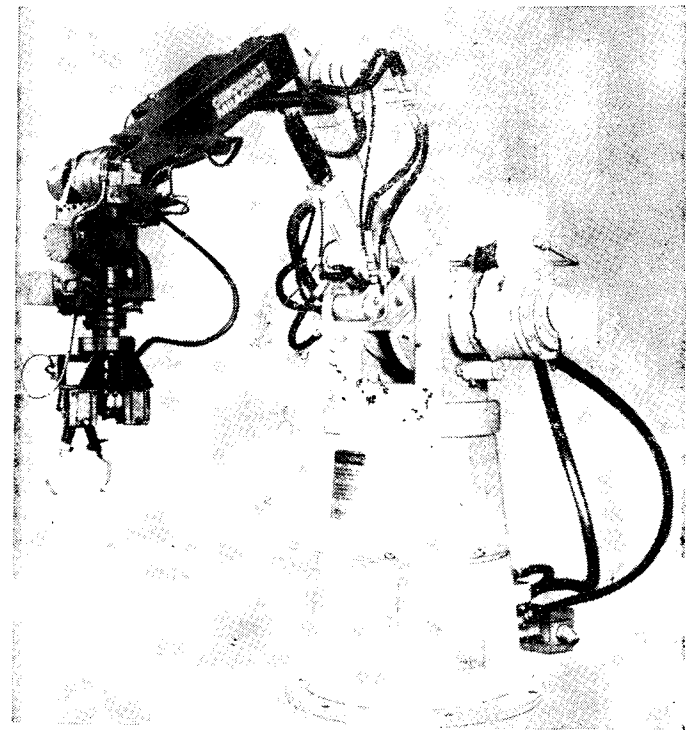


Рис. 1.6.8. Робот модели Cincinnati Milacron T366. (С разрешения Cincinnati Milacron.)

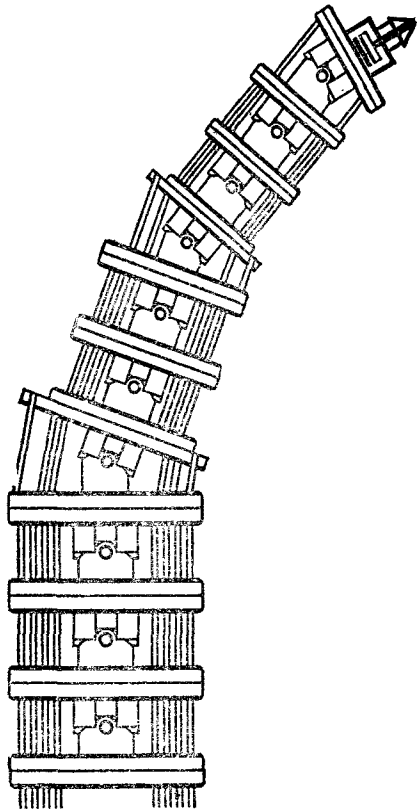


Рис. 1.6.9. Робот с исполнительным механизмом со многими сочленениями.

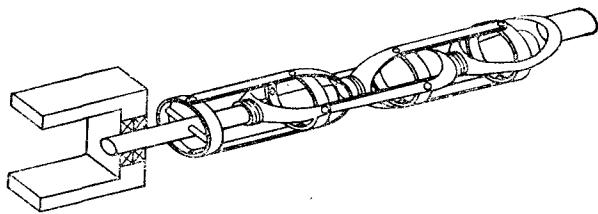


Рис. 1.6.10. Гибкий манипулятор.

3. Ограниченная способность избегать столкновений с препятствиями.

4. Значительный момент инерции, гравитационные эффекты, динамическая неустойчивость (т. е. наличие колебаний).

1.6.5. МНОГОЗВЕННЫЕ МАНИПУЛЯТОРЫ

В идеале исполнительные механизмы этих роботов могут принимать в трехмерном пространстве любую форму, поэтому они состоят из множества элементов, способных перемещаться по отношению к соседним с ними элементам (рис. 1.6.9 и 1.6.10).

Уже к 1970 г. было выдано большое количество патентов на такие механические манипуляторы; для примера на рис. 1.6.9 представлен манипулятор, запатентованный в 1970 г. (разработка 1968 г.) Виктором Андерсоном и Рональдом Хорном (патент США № 3 497 083). С появлением непосредственно управляемых манипуляторов такие многозвенные исполнительные механизмы могут стать в будущем распространенными. Существует значительное количество задач, которые не могут быть выполнены манипуляторами обычных типов, таких, например, как проход через ограниченную область типа люка.

1.7. УЗЛЫ СХВАТА И КИСТИ

Все движения звеньев манипулятора предназначены для перемещения кисти и схвата в заданное или какое-либо подходящее (для манипулирования объектами или выполнения задачи) положение. Движения кисти в основном представлены последовательностью типа «вращение — наклон» в различных плоскостях (рис. 1.7.1 и 1.7.2).

Для узла схвата (рис. 1.7.3) было перепробовано множество различных конструкций. Однако в общем считается, что трехпальцевой конструкции достаточно для большинства практических приложений в манипуляционных задачах. Был сконструирован и опробован на практике пятипальцевый схват, напоминающий кисть человека (схват Капорали-Шахинпура, см. [16]), однако, по-видимому, его использование не дает значительного увеличения гибкости или сложности выполняемых действий по сравнению с трехпальцевым схватом. Для некоторых специальных приложений вроде игры на музыкальном инструменте пятипальцевая конструкция может дать значительные преимущества. На рис. 1.7.3—1.7.8 представлены различные применяемые сейчас виды конфигураций механических схватов. На рис. 1.7.9 показан сложный трехпальцевый схват, созданный фирмой Hitachi (Япония), а на рис. 1.7.10 — пятипальцевый

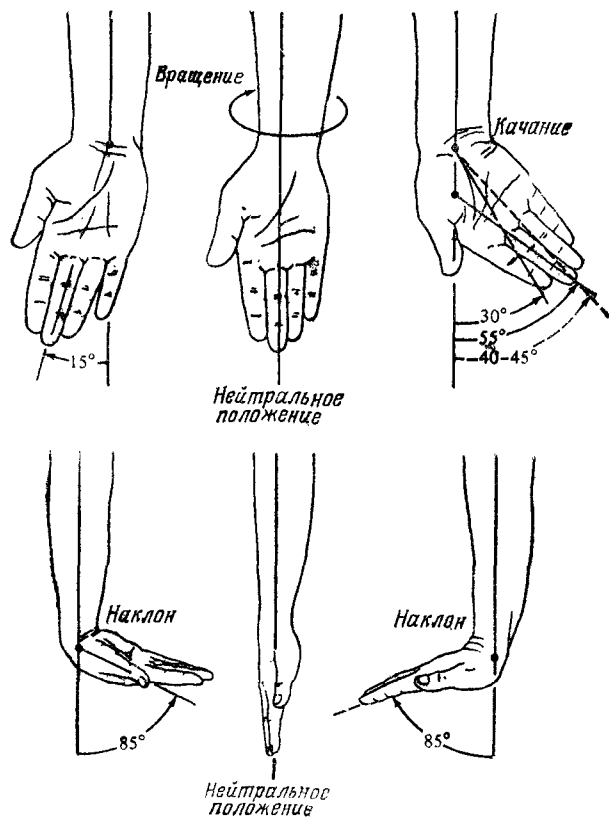


Рис. 1.7.1. Поворотные движения запястья руки человека.

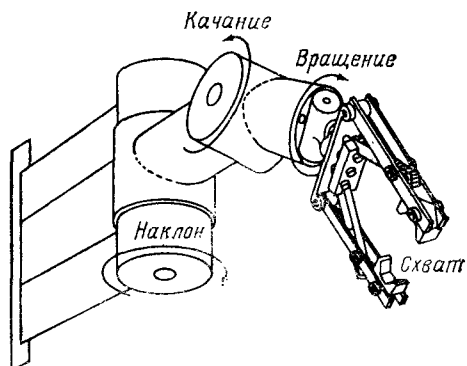


Рис. 1.7.2. Поворотные движения запястья робота.

Рис. 1.7.3. Механический схват с одной подвижной губкой.

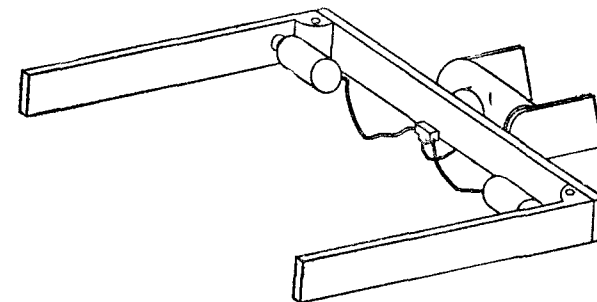
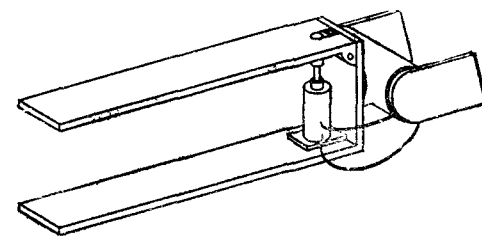


Рис. 1.7.4. Схват с двумя подвижными губками для манипулирования листовым картоном.

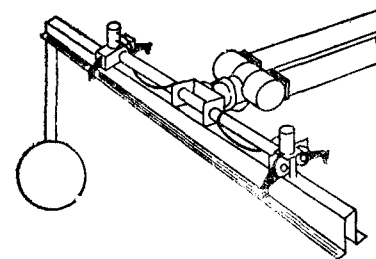
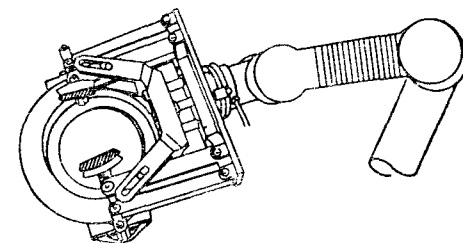


Рис. 1.7.5. Специальный схват с модульными приводами.

Рис. 1.7.6. Схват с поводковой передачей с губками внутреннего и внешнего захвата.



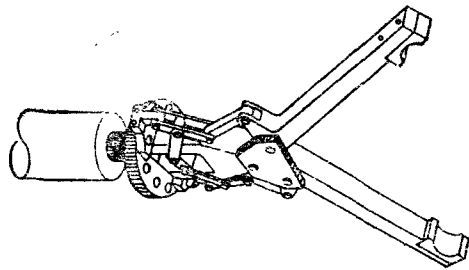


Рис. 1.7.7. Схват с широким раскрытием губок.

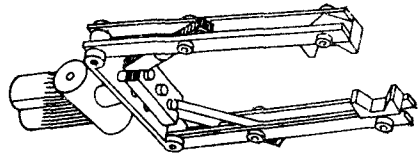


Рис. 1.7.8. Схват с двумя подвижными губками с поводковой передачей.

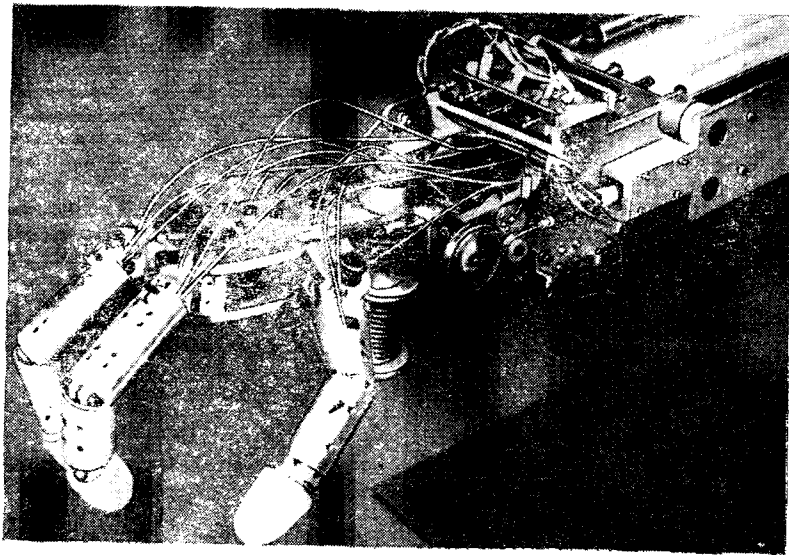


Рис. 1.7.9. Трехпальцевый схват. (С разрешения Hitachi, Япония.)

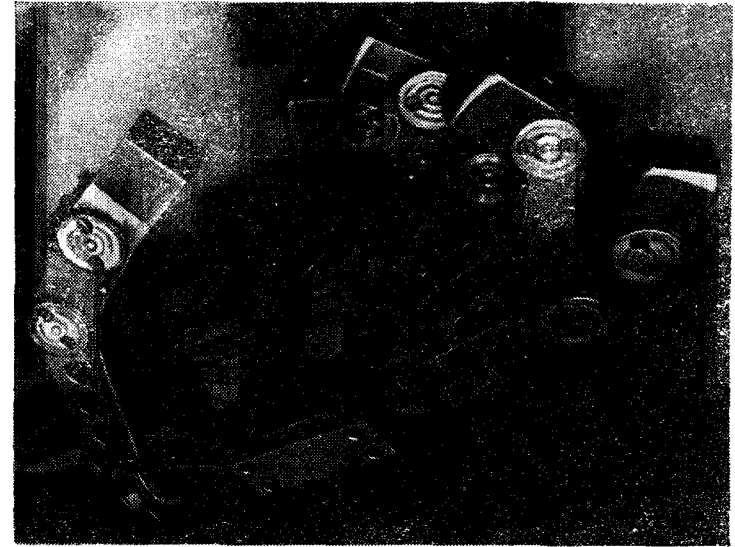


Рис. 1.7.10. Пятипальцевый схват. (Схват Капорали — Шахинпура. 1983.)

схват, сделанный Капорали и Шахинпуром [16, 17]. В дополнение к механическим существует большое количество других типов схватов, например (1) адгезионные (клеящиеся), (2) магнитные, (3) вакуумные, (4) стержневидные.

На рис. 1.7.3 изображен схват, имеющий один подвижный палец. Это схват с одним рабочим движением, применяемый в случаях, когда имеется подход снизу к детали, лежащей на подставке. Схват может быть использован для быстрого захвата деталей. Простота конструкции делает его одним из самых предпочтительных с экономической точки зрения.

На рис. 1.7.4 показан специальный схват для манипулирования листами картона. Схват с двумя губками может захватывать объекты с неточно заданным положением. Поднятие, укладка и манипулирование картонных листов — простая операция для этого схвата, так как и приводы, и губки могут быть настроены на любой размер.

На рис. 1.7.5 изображен специальный схват для манипулирования легкими длинными или крупными объектами. В нем имеется пара пневматических приводов, которые могут быть настроены для захвата и манипулирования такими предметами.

На рис. 1.7.6 показан схват с поводковой передачей и губками внешнего и внутреннего схвата. Этот схват применяется

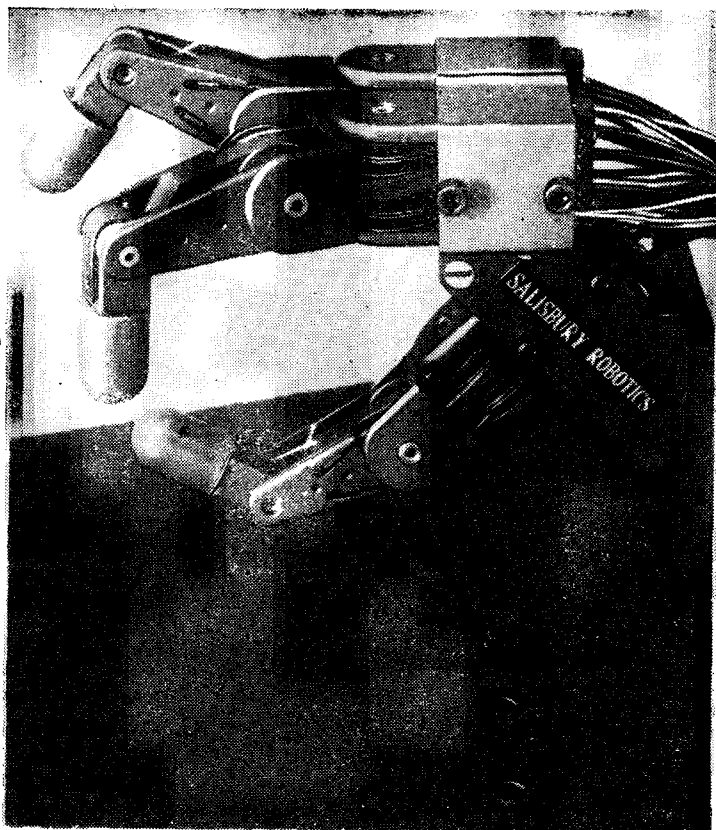


Рис. 1.7.11. Схват Сэлсбюри. (С разрешения Кена Сэлсбюри, 1984.)

в ситуациях, когда деталь может быть переориентирована в промежутке между загрузкой и выгрузкой из станка. При показанной на рисунке ориентации детали схват может удерживать ее по контуру внешними самонастраивающимися губками (наружного схватывания). Если же эту деталь перевернуть, губки внутреннего схватывания будут удерживать ее изнутри. Подобным же образом схват этого типа можно применить в ситуациях, когда поверхность, за которую должен осуществляться захват, меняет свою ориентацию за время между загрузкой ее в станок и выгрузкой из станка.

На рис. 1.7.7 изображен схват с широким раскрытием, который можно применять в случаях, когда захватываемые детали не всегда имеют постоянную ориентацию или неизменное поло-

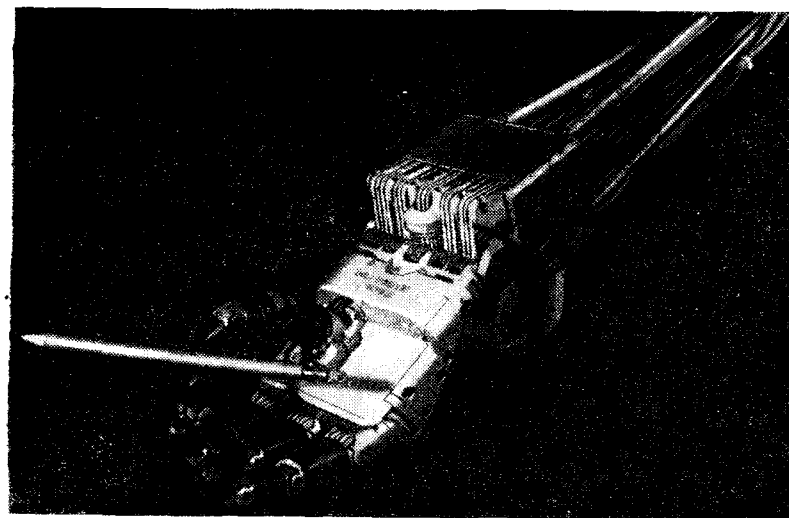


Рис. 1.7.12. Схват Utah — MIT. (С разрешения Университета штата Юта.)

жение. Губки, схлопываясь, зажимают неточно ориентированную деталь.

На рис. 1.7.8 приведен другой вариант схвата с поводковым приводом, предназначенный для операций манипулирования тяжелыми деталями или громоздкими предметами. Схват способен удерживать детали таким образом, чтобы их центр тяжести находился вблизи узла приводов схвата. К сожалению, применимость этого схвата ограничивается очень малым диапазоном размеров объектов.

На рис. 1.7.9 показан трехпальцевый схват, созданный фирмой Hitachi (Япония). Этот схват с весьма развитыми движениями, изготовленный из легких сплавов, демонстрирует гибкость, подобную человеческой. В приводах схвата использованы тяги из сплава, обладающего эффектом памяти. Характерной особенностью этих тяг является их способность удлиняться и сокращаться при прохождении через них электрического тока. Это явление и использовано для получения движений пальцев и схвата.

На рис. 1.7.10 показан пятипальцевый схват, сконструированный и изготовленный Капорали и Шахинпуром [16, 17]. Конструкция предназначалась для моделирования сложных манипуляционных роботов. Фаланги пальцев особой конструкции приводились в движение тягами через шкивы и петлевые шарниры для разветвления тяг. Движения тяг осуществлялись либо

шаговыми двигателями, либо приводами линейного перемещения, управляемыми от ЭВМ. Однако, как упоминалось выше, оказалось, что трех пальцев у схватов достаточно для выполнения почти всех функций человеческой кисти, в то время как пятипальцевые схваты могут быть полезны для моделирования игры на музыкальных инструментах и других подобных задач. Они могут найти применение как протезы руки в различных биоинженерных приложениях. Отличный обзор по схватам роботов дан в работе [63].

Другими примерами многопальцевых схватов роботов могут служить схват Сэлisbury (рис. 1.7.11) и схват, разработанный в Университете шт. Юта и Массачусетском технологическом институте (рис. 1.7.12).

1.8. СИСТЕМЫ ПРИВодОВ РОБОТОВ

1.8.1. ВВЕДЕНИЕ

Для перемещения сочленений роботов и управления ими необходимы приводные системы. Они могут быть электромеханическими, гидравлическими, пневматическими или представлять собой комбинацию этих трех типов.

Гидравлические приводные системы роботов проще приводов других типов, так как имеют малое количество движущихся частей при большой нагрузочной способности и высокой скорости. В системах гидравлического привода обычно используются гидравлические двигатели с электрогидравлическими сервоклапанами, и для управления и обратной связи применяются аналоговые устройства. Хорошим примером робота с гидравлическим приводом является робот модели IBM 7565 (RSI) White Cloud. Недостатками гидравлических роботов являются колебания со снижением скорости при подходе к точке, требования дополнительного пространства для размещения гидравлических насосов и вспомогательного оборудования. Они обладают повышенным уровнем шума, возникающего в гидравлических станциях, а также требуют больших эксплуатационных затрат на замену фильтров и масла, ремонт, связанный с прорывом гидравлических линий и утечками масла, сбор и отвод паров гидравлической жидкости.

Пневматические приводные системы используются в основном для цикловых роботов. Эти роботы применяются главным образом для операций переноски или быстрой сборки. Преимуществом таких приводных систем являются малые эксплуатационные и ремонтные затраты. Важнейшим недостатком яв-

ляется высокая сложность реализации управления положением и скоростью из-за сжимаемости воздуха. Вследствие этого такие системы работают в режиме программного управления.

В роботах с электромеханическими приводами используются чаще всего либо моментные двигатели постоянного тока, либо шаговые двигатели. Такие двигатели обладают высоким к. п. д., хорошим соотношением момента и скорости и широко применяются в робототехнике. С другой стороны, поскольку максимальную мощность они развивают при высоких скоростях вращения, их приходится использовать совместно с редукторами (механизмами понижения скорости). Как правило, манипуляторы с электромеханическим приводом обладают лучшей точностью и повторяемостью движений, чем гидравлические или пневматические. При использовании двигателей постоянного тока для обратной связи по положению и для управления применяются оптические кодовые или импульсные датчики.

Общие характеристики приводных систем роботов сведены в табл. 1.8.1.

Таблица 1.8.1. Общие сведения о системах приводов роботов

Системы гидроприводов

<i>Использование</i>	Гидравлические вентильные аналоговые устройства
<i>Преимущества</i>	Высокая скорость, простота конструкции, большие усилия, высокая удельная мощность
<i>Недостатки</i>	Могут быть подвержены колебаниям и гидравлическим ударам, шумят, требуются дополнительная площадь и затраты на установку

Системы электроприводов

<i>Использование</i>	Усилители тока/напряжения, шаговые двигатели, моментные двигатели постоянного тока, оптические датчики и линейные приводы
<i>Преимущества</i>	Легкость установки, меньшая стоимость, простота проектирования, незначительная требуемая площадь, высокая точность и повторяемость
<i>Недостатки</i>	Низкая скорость, малая грузоподъемность, необходимость преобразования в линейное осевое перемещение, меньшая удельная мощность

Системы пневмоприводов

<i>Использование</i>	Управление с ограниченным числом состояний, релейное управление
<i>Преимущества</i>	Быстрота сборки, низкая стоимость обслуживания и установки
<i>Недостатки</i>	Сложность управления положением и скоростью, низкая точность и повторяемость

1.8.2. РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ, ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАЗРЕШЕНИЕ, ТОЧНОСТЬ И ПОВТОРЯЕМОСТЬ

Разрешающая способность, или разрешающая способность управления, — это наименьшее смещение схвата, осуществляемое системой управления роботом при данной разрядности АЦП и ЦАП в цепях обратной связи и управления. Например, если схват робота перемещается на максимальное расстояние d при использовании n -разрядных кодов ЦАП и АЦП в системе управления и приводах, то наименьшее линейное перемещение составляет $d/2^n$. Это происходит из-за того, что отрезку d ставится в соответствие 2^n кодов.

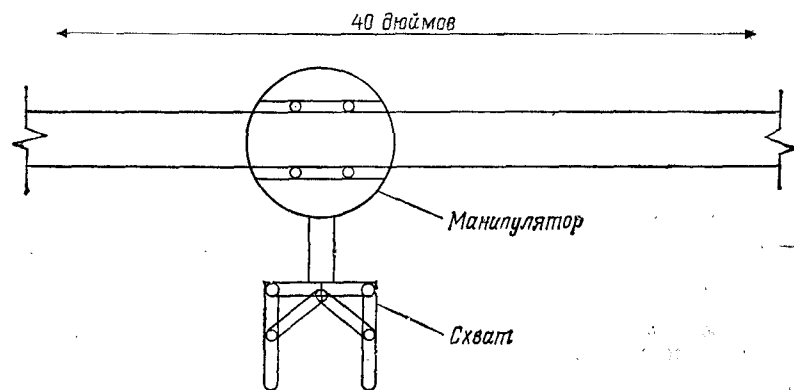


Рис. 1.8.1. Манипулятор с призматическим сочленением.

Для вращательных движений нужно делить угловой диапазон θ на 2^n , чтобы определить угловую разрешающую способность управления, а затем умножить ее на длину исполнительного механизма для вычисления разрешающей способности на схвате.

Пример 1.8.1 ■

Найти разрешающую способность управления линейно перемещающимся схватом, если он проходит расстояние 40 дюймов при использовании 10-разрядных кодов ЦАП или АЦП в цепях обратной связи и управления. (См. рис. 1.8.1).

Решение. Имеется $2^{10} = 1024$ точек дискретизации на отрезке 40 дюймов. Таким образом, разрешающая способность управления равна

$$CR = \frac{40}{1024} = 0.03906 \text{ дюймов} \quad \blacksquare \quad \blacksquare$$

Пример 1.8.2 ■

Найти разрешающую способность управления робота, работающего в полярной системе координат, при радиусе руки 24 дюйма и угловом диапазоне вращения 270° , если в приводе

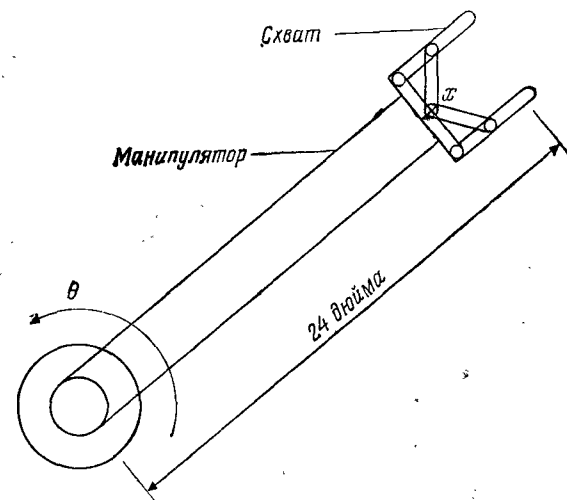


Рис. 1.8.2. Робот со схватом, работающий в полярной цилиндрической системе координат.

используются 8-разрядные коды ЦАП и АЦП в цепях обратной связи по положению и управления. (См. рис. 1.8.2.)

Решение. Заметим, что угловая разрешающая способность управления определяется по формуле

$$\delta\theta = \frac{270/180}{256} = 0.01841 \text{ радиан.}$$

Тогда разрешающая способность управления на схвате равна

$$R = 24 \times 0.01841 = 0.44179 \text{ дюймов.}$$

Заметим, что, если бы использовалось поступательное сочленение, разрешающая способность управления составила бы

$$CR = \frac{24}{256} = 0.0944488 \text{ дюймов,}$$

что свидетельствует о том, что разрешение при поступательном перемещении в данном случае выше, чем разрешение при вращении. ■ ■

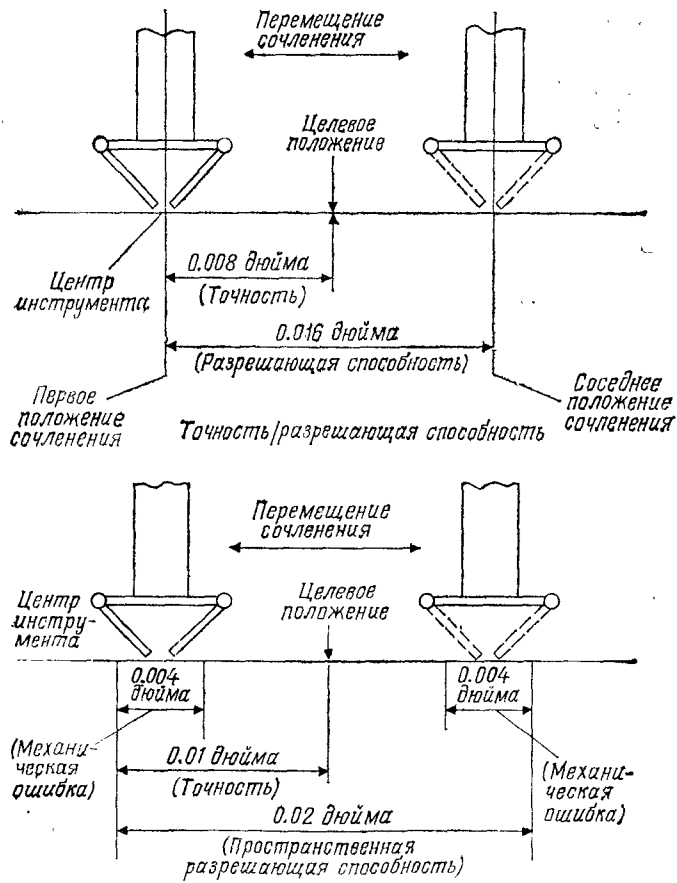


Рис. 1.8.3. Соотношения между точностью, разрешающей способностью управления и пространственной разрешающей способностью.

Пространственная разрешающая способность определяется как наименьшее перемещение инструмента или схвата, достигимое роботом. Это комбинированная разрешающая способность, включающая разрешающую способность управления и неточности перемещений, являющиеся следствием механического или динамического взаимодействия робота с его окружением. Источники механической неточности бывают гравитационного и вибрационного происхождения, порождаются ускорениями (кориолисовым, центробежным и т. д.) и деформациями (упругими, пластическими, вязкоупругими, вязкопластическими

и т. д.). Эти варианты кратко рассматриваются в последующих главах. Другой источник неточности должен приниматься в расчет при анализе траекторий перемещения, вычисляемых ЭВМ на основании уравнений кинематики манипуляционного робота. На точность робота могут влиять ошибки округления аппроксимаций, ошибки усечения, ошибки тригонометрических аппроксимаций. На рис. 1.8.3 продемонстрирована разница между разрешающей способностью управления и пространственной разрешающей способностью. Из этого рисунка видно, что точность робота определяется как половина разрешающей способности управления или пространственной разрешающей способности робота.

При программировании робота методом обучения, довольно часто используемом в промышленности, робот проводится через последовательность положений (режим обучения) при помощи устройства ручного управления, а ЭВМ непрерывно запоминает положения сочленений во время всего процесса обучения. Затем ЭВМ подает роботу команды на повторение движений (режим воспроизведения). В этом случае применяется термин «повторяемость», определяемый как способность робота вернуться в запомненное положение. На повторяемость могут влиять лишь разрешающая способность управления и механические ошибки (рис. 1.8.3).

Пример 1.8.3 ■

Доказать, что в общем случае *повторяемость* выше *точности* робота.

Решение. На точность повторения влияют только разрешающая способность управления и механическая ошибка; однако этого нельзя сказать о произвольной «незапомненной» точке. Схват должен вернуться в запомненное положение. Таким образом, ЭВМ способна воспринимать информацию о близости соседних положений и вернуть схват робота в точку, максимально близкую к запомненной. Следовательно, *повторяемость* не меньше *точности*. ■ ■

Пример 1.8.4 ■

Определить разрешающую способность управления и ошибку робота модели PUMA, показанного на рис. 1.8.4. Определить также пространственную разрешающую способность и ошибку робота, если механическая ошибка равна 0.001 дюйма. (Предполагается, что для обратной связи по положению и для управления используется 10-разрядный ЦАП.) Рассматривать только плоскую задачу.

Решение. Для сочленения А

$$\text{Угловое разрешение} = \frac{200 \times 2\pi}{360 \times 1024} = 0.0034 \text{ рад.}$$

Разрешающая способность управления в точке В по отношению и сочленению А равна $0.0034 \times 17 \approx 0.0579$ дюйма.

Для шарнира В

$$\text{Угловое разрешение} = \frac{270 \times \pi}{180 \times 1024} = 0.0046 \text{ рад.}$$

Разрешающая способность управления в точке С по отношению к сочленению В равна $0.0046 \times 17 = 0.0782$ дюйма.

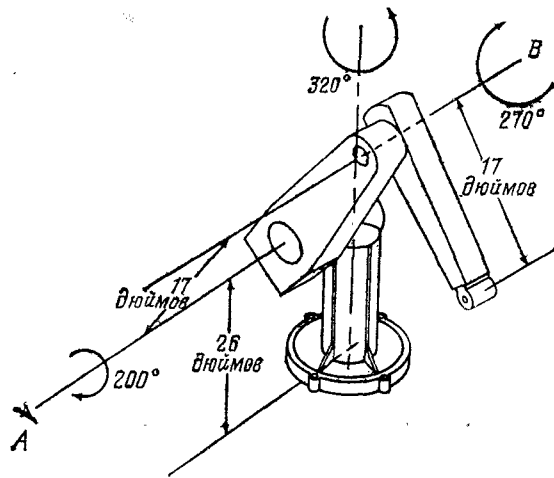


Рис. 1.8.4. Строение робота PUMA 560 (без соблюдения масштаба).

Ошибки разрешения равны соответственно 0.0289 и 0.0391 дюйма. Окончательно пространственные ошибки равны 0.02945 и 0.0396 дюйма соответственно.

1.9. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОШИБОК РОБОТА И РАЗМЕРНЫХ ОШИБОК

Заметим, что разрешающая способность управления, а также пространственная разрешающая способность и ошибки робота имеют статистическое распределение. Примем, что эти распределения являются гауссовыми (нормальными), такими, что существуют среднее и среднее квадратическое отклонения оши-

бок. Для данной целевой точки позиционирования пространственные ошибки могут рассматриваться как допуски на размеры захватываемой детали. Среднее квадратическое отклонение при нормальном распределении может быть определено как 1/3 этих допусков. При помощи следующей процедуры можно найти процент деталей, с которыми произойдет столкновение:

Находится математическое ожидание положения робота μ_r , соответствующее целевой точке. Пространственные ошибки интерпретируются теперь как допуски t_r ; таким образом, $\mu_r \pm t_r$ — ожидаемое положение схвата робота. Математическое ожидание размера захватываемых деталей обозначим через μ_p с двусторонним допуском t_p . Средние квадратические отклонения для схвата робота и детали σ_r и σ_p могут быть вычислены как

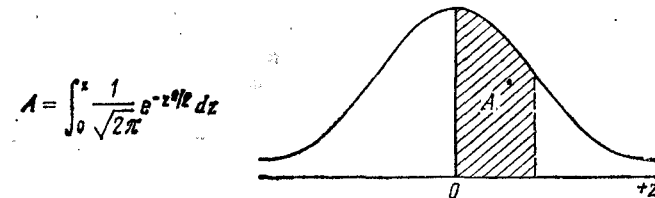
$$\sigma_r = \frac{t_r}{3} \quad \text{и} \quad \sigma_p = \frac{t_p}{3}. \quad (1.9.1)$$

Из формулы (1.9.2) можно найти значение Z , соответствующее желаемой площади под кривой нормального распределения; оно равно

$$Z = \frac{\mu_r - \mu_p}{(\sigma_r^2 + \sigma_p^2)^{1/2}}. \quad (1.9.2)$$

По значению Z находим соответствующую A_z в табл. 1.9.1. Вероятность столкновения или процент отсева могут быть найдены из соотношения $P = 0.5 - A_z$. Если для сборки узла используется более двух деталей, применяем ту же процедуру для нахождения средних размеров всех деталей, которые необходимо вводить внутрь других деталей. Находим соответствующие средние квадратические отклонения и переходим, как показано выше, к определению Z , а затем процента отсева, обусловленного столкновениями. Последующие примеры проясняют положение.

Таблица 1.9.1. Площадь под кривой нормального распределения



<i>z</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4506	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Пример 1.9.1 ■

Манипуляционный робот вводит круглый вал в отверстие, причем $d_s = 0.999 \pm 0.0005$ дюйма и $d_h = 1 \pm 0.001$ дюйма. Суммарная пространственная ошибка разрешения на схвате робота равна 0.0005 дюйма. Определить процент отсева, обусловленного столкновениями, в предположении нормального закона распределения отклонений.

Решение. Эффективный диаметр вала при учете ошибок позиционирования робота равен

$$d_s^* = 0.99925 \pm 0.00075 \text{ дюйма.}$$

Средние квадратические отклонения вала робота и отверстия равны соответственно

$$\sigma_s^* = \frac{0.00075}{3} = 0.00025,$$

$$\sigma_h = \frac{0.001}{3} = 0.00033,$$

так что $(\sigma_s^{*2} + \sigma_h^2)^{1/2} = 0.000416$. Окончательно

$$Z = \frac{1 - 0.99925}{0.000416} = 1.80.$$

Это соответствует (см. табл. 1.9.1) $A_z = 0.4641$. Тогда $P = 0.5 - 0.4641 = 0.0359$ или процент отсева равен 3.6%. ■ ■

1.10. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ РОБОТОВ

Манипуляционные роботы или телеоператоры вначале программировались механически или электрически для повторения однажды заученной задачи. Первые программы для роботов, предназначенные для выполнения на ЭВМ, были разработаны примерно в 1973 г. в Станфордской лаборатории искусственного интеллекта (SAIL) и представляли собой экспериментальный язык исследований (см. [73]). Позднее в SAIL на базе Алгола был разработан более совершенный язык программирования роботов, названный AL (см. [65])¹⁾. Это новое программное обеспечение позволяет программировать операции сборки с использованием устройств оучствления по силе. Тем временем на фирме IBM создавалось еще более совершенное программное

¹⁾ AL является не только языком, но и системой программирования. —
Прим. ред.

обеспечение для роботов, такое как Emily, ML и AML (а manufacturing language — производственный язык) [46, 47].

Среди существующих примеров программного обеспечения для роботов можно упомянуть и пакет Help фирмы General Electric [36, 37], разработанный для управления роботами со многими степенями подвижности, работающими в декартовой системе координат, JARS, который группа робототехники и телеоператоров Лаборатории реактивного движения НАСА разработала в качестве программного обеспечения высокого уровня для управления роботами, MCL корпорации «Мак-Доннелл Дуглас» [104], являющийся расширением языка АРТ программирования устройств с ЧПУ, RAIL фирмы Automatrix, Inc. [2], применяемый для управления как системой технического зрения, так и движениями манипуляционных роботов, PRL фирмы SRI International [71], используемый для управления сборочными операциями при участии множества роботов, а также VAL фирмы Unimation, Inc. [99], представляющий возможность простого выполнения задач, связанных с роботами. Великолепной статьей по языкам программирования промышленных роботов и их сравнительной оценке является статья Грувера и др. [40]. В ней отмечается, что язык Бейсик завоевывает популярность в качестве базового программного обеспечения робототехники и может в будущем стать самым распространенным программным обеспечением¹⁾. Вопросы программирования будут подробно рассмотрены в гл. 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agin Gerald J., An Experimental Vision System for Industrial Applications, Proceedings of the 5th International Symposium on Industrial Robots, pp. 135—148, 1975.
2. Automatic Inc, RAIL Software Reference Manual (ROBOVISION and CYBERVISION), Automatrix Inc., Billerica, MA, Rev. 3.0, MN-RB-07 (Jan.), 1982.
3. Batur Celal, Kaya Azmi, Microprocessor Controlled Robot Arm, Proceedings of the 8th ASEE Conference, Education and Industry: A Joint Endeavor, Los Angeles, Calif., June 21—25, Vol. 2, pp. 582—588, 1981.
4. Bieczny Antal K., Manipulator Control Automation Using Smart Sensors, Electro 79 Conference Proceedings, New York, Apr. 24—26, pp. 32—38, 1979.
5. Birk John R., Computation for Robots to Orient and Position Handheld Workpieces, *Trans. IEEE Systems, Man and Cybernetics*, SMC-6(10), 665—671, 1976.
6. Bolles R., Paul R. P., The Use of Sensory Feedback in a Programmable Assembly System, The Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Stanford University, AIM-220 (Oct.), 1973.
7. Borrowman Gerald L., Remote Manipulator Systems, *Spaceflight*, 21(12), 495—496, 1974.
8. Boykin W. H., Warren M. E., Application of Pattern Recognition to a Flying Robotic Arm, Proceedings of the 18th IEEE Conference of Decision and Control Including the Symposium on Adaptive Processes, Fort Lauderdale, FL, Dec. 12—14, pp. 40—42, 1979.
9. Brady M., Hollerbach J. M., Johnson T. L., Lozano-Perez T., Mason M. T., Robot Motion — Planning and Control, M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1983.
10. Briot M., The Utilization of an «Artificial Skin» Sensor for the Identification of Solid Objects, Proceedings of the 9th International Symposium on Industrial Robots, Washington, DC, Mar. 5—7, pp. 529—547, 1980.
11. Burckhardt C. W., Gerelle E. G. R., Dynamic Design Parameters for Robot Arms: Experimental Results, Proceedings of the 10th International Symposium on Industrial Robots and 5th International Conference on Industrial Robot Technology, Milan, Italy, March, 5—7, pp. 321—329, 1980.
12. Cable Connectors Pave Way for Underwater Electric Power System, *Oil Gas J.*, 68(39), 93—95, 1970.
13. Cain R. A., Bolles R. C., Recognizing and Locating Partially Visible Objects. The Local-Feature-Focus Method, *Int. J. Robotics Res.*, 1(3), 57—82 (Fall), 1982.
14. Camera A., Migliardi G. F., Automated Inspection of Parts and Final Functional Control Performed During Assembly Process, Proceedings of the 5th International Conference on Automatic Inspection and Production Control and 12th IPA Arbeitstag, Stuttgart, Germany, June 25—26, 1980, pp. 175—186, 1980.
15. Campbell D., An Iterative Algorithm for the Inverse Kinematics Solution of a General N-Axis Robot Manipulator Using Powell's Optimization Technique, M. Sc. thesis, Mechanical and Industrial Engineering Department, Clarkson University, Potsdam, NY, Aug. 1984, also MIE-Res. Rept. No. MIE-105, 1984.
16. Caporali M., Design and Bond Graph Dynamic Modeling of a Multi-Fingered Robot Hand, M. Sc. thesis, Mechanical Engineering Department, Clarkson College of Technology, Potsdam, NY, Aug. 1982, also MIE-Res. Rept. No. 089 (Aug.), 1982.
17. Caporali E., Shahinpoor M., Design and Construction of a Five-Fingered Robotic Hand, *Robotic Age*, 6(2), 14—20, 1984.
18. Cohen J., Human Robots in Myth and Sciences, Allen and Unwin, London, England, 1966.
19. Cohen C. L., Robots Get Smart in Japan, *Electronics Week*, Jan., pp. 15—16, 1985.
20. Cook R., Design and Modeling of a Three-Axis Arm With an Ultrasonic Distance Sensor, M. Sc. thesis, Mechanical Engineering Department, Clarkson University, Potsdam, NY, May, 1984.
21. Craig John J., JARS: JPL Autonomous Robot System, Robotics and Teleoperators Group, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA, 1980.
22. Darazan P. J., Jeffery M. F., Microprocessor Control and Pneumatic Drive of a Manipulating Arm, Proceedings of the 3rd Conference on Industrial Robot Technology and 6th International Symposium on Industrial Robots, University of Nottingham, England, March 24—26, pp. 86—96, 1976.
23. Demareux M. O., Gerelle E. G. R., Can I Build This Robot?, Proceedings of the 9th International Symposium on Industrial Robots, Washington, DC, March 13—15, pp. 621—639, 1980.

¹⁾ С этим утверждением вряд ли можно согласиться. Уже сейчас существуют языки программирования роботов, обладающие гораздо большей выразительной мощностью, чем Бейсик. — Прим. ред.

24. Drake Samuel H., Watson, Paul C., Simunovic, Sergio N., High Speed Robot Assembly of Precision Parts Using Compliance Instead of Sensory Feedback, Proceedings of the 7th International Symposium on Industrial Robots, Tokyo, Japan, Oct. 19—21, pp. 87—98, 1977.
25. Ejiri M., Uno T., Da H. Y., A Prototype Intelligent Robot That Assembles Objects From Plane Drawings, *IEEE Trans. Comp.*, C-21(2), 199—207 (Feb), 1972.
26. Engelberger Joseph F., Robot Arms for Assembly, ASME Paper, No. 78-WA/DSC-37, 1978.
27. Engelberger J. F., Robotics in Practice, IFS Publications Ltd., Kempston, England, 1980.
28. Ernst H. A., A Computer Operated Mechanical Hand, Ph. D. thesis, M. I. T., Cambridge, MA, 1961.
29. Favareto Marcello M., Polar 6000—A New General Purpose Robot Particularly Suited for Spot-Welding Applications, Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Robot Technology, Stuttgart, Germany, May 30—June 1, pp. 67—77, 1978.
30. Feldman J. et al., The Use of Vision and Manipulation to Solve the Instant Insanity Puzzle, Proceedings of the 2nd International Joint Conference on Artificial Intelligence, London, England, pp. 359—364, 1971.
31. Fichter E. F., McDowell E. D., Novel Design for a Robot Arm, Advances in Computer Technology, International Computer Technology Conference ASME Century 2—Emerging Technologies Conference, Vol. 4, San Francisco, CA, August 12—15, pp. 250—256, 1980.
32. Flatau Carl R., Manipulator as a Means of Extending Our Dexterous Capabilities to Larger and Smaller Scales, Proceedings of the 21st Conference on Remote Systems and Technology, San Francisco, CA, Nov. 12—13, pp. 47—50, 1973.
33. Fluidics Control Canadian Robot, *Design Eng.*, 17(11), 34—35, 1971.
34. Frank Moshe, Three Wrist Roll Robot, SME Paper Ser. MS-80-699, 1980.
35. French Douglas, Yraets William, Actuating and Drive Mechanism Design for Automatic Assembly, Proceedings of the 11th Numerical Control Society, Annual Meeting and Technical Conference, Toronto, Ontario, March 31—April 3, pp. 383—398, 1974.
36. General Electric Company, A12 Assembly Robot Maintenance and Installation Manual, General Electric Co., Orlando, FL, P50VE005 (Dec.), 1981.
37. General Electric Company, Allegro Operator's Manual (A12 Assembly Robot), General Electric Co., Orlando, FL # P50VE025 (Feb.), 1982.
38. Gerelle Eric G. R., Force Feedback Control, Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Robot Technology, Stuttgart, Germany, May 30—June 1, pp. 194—205, 1978.
39. Goertz R. C., Manipulators Used for Handling Radioactive Materials, E. M. Bennett (ed.), Human Factors in Technology, Chap. 27, McGraw-Hill, New York, 1963.
40. Gruver W. A., Soroka B. I., Graig J. J., Turner T. L., Industrial Robot Programming Languages: A Comparative Evaluation, *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, SMC-14(4), 565—570, 1984.
41. Hanafusa Hideo, Asada Huruhiro, Stable Prehension by a Robot Hand With Elastic Fingers, Proceedings of the 7th International Symposium on Industrial Robots, Tokyo, Japan, Oct. 19—21, pp. 361—377, 1977.
42. Hanafusa H., Asada H., Adaptive Control of a Robot Hand Equipped with Pneumatic Proximity Sensors, Proceedings of the 3rd Conference on Industrial Robot Technology and 6th International Symposium on Industrial Robots, University of Nottingham, England, March 24—26, pp. D4, 12P, 1976.
43. Hewitt J. R., Decoupled Control of Robot Movement, *Electronics Lett.*, 15(21), 670—671, 1979.
44. Hewitt J. R., Dynamic Decoupled Control of Robot Arms, Proceedings of the IEEE Colloquium on Control of Manipulators and Robotic Devices, London, April, England, p. 4, 1980.
45. Hirose Shigeo, Umetani Yoji, Development of Soft Gripper for the Versatile Robot Hand, Proceedings of the 7th International Symposium on Industrial Robots, Tokyo, Japan, Oct. 19—21, pp. 353—360, 1977.
46. IBM, IBM Robot System/1: AML Reference Manual, 2nd ed., IBM Corporation, Boca Raton, FL, SC34-0410-1 (Sept.), 1981.
47. IBM, IBM Robot Systems/1: General Information Manual and User's Guide, 3rd ed., IBM Corporation, Boca Raton, FL, GA34-0180-2 (Mar.), 1982.
48. IEEE, 3rd Short Course Via Satellite Transmission, Robot Sensing and Intelligence, Nov. 7, 1983.
49. Inoue H., Computer Controlled Bilateral Manipulator, *Bull Jpn. Soc. Mech. Eng.*, 14(69), 199—207, 1971.
50. Inove Hirochika, Force Feedback in Precise Assembly Tasks, Artificial Intelligence: An MIT Perspective, Vol. 2. pp. 219—241, M. I. T. Press, Cambridge, MA, 1979.
51. Kato H., Morinaga S., Kato T., Inagoki S., A New Integrated Robot Eye for Color Discrimination, Proceedings of 5th International Symposium on Industrial Robots, Chicago, IL, pp. 135—148, 1975.
52. Kato Ichiro, Coming Robot New Era (A Viewpoint), *Robotica*, 1, 9—13, 1983.
53. Kirsch Jerry, Robots and Their Advantage in Inspection, Proceedings of the SPIE Seminar, Vol. 170: Optimization in Quality Assurance 2, Los Angeles, CA, Jan., pp. 40—42, 1979.
54. Kolpashnikov Sergei, Chelpanov Igor, Defining of the Scheme and the Parameters of an Industrial Robot Gripper by a Group of Specifications, Proceedings of the 11th International Symposium on Industrial Robots, Tokyo, Japan, October 7—9, pp. 301—308, 1981.
55. Konstantinov Michael S., Jaw-Type Gripper Mechanisms, SME Tech. Paper Ser. MS 1975, Proceedings of the 5th International Symposium on Industrial Robots, Chicago, IL, Sept. 22—24, Book 2, Paper MS75-264, 1975.
56. Konstantinov M. S., Zankov Z. I., Multi-grippers Hot Forge Manipulators, *Ind. Robots*, 2, 47—55, 1975.
57. Krsnak H., Howe M., Applications of High Performance Heavy Duty Industrial Manipulators, Proceedings of the 5th International Symposium on Industrial Robots, Chicago, IL, Sept. 22—24, pp. 285—296, 1975.
58. Lieberman L. I., Lavin M. S., AML/V: An Industrial Machine Vision Programming System, *Int. J. Robotics Res.*, 1(3), 42—56 (Fall), 1982.
59. Loeff Luis A., Soni A. H., Algorithm for Computer Guidance of a Manipulator Between Obstacles, ASME Paper No. 74-DET-89, 1974.
60. Luh J. Y. S., Lin C. S., Optimum Path Planning for Mechanical Manipulators, Trans. ASME: *J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 103(2), 142—151, 1981.
61. Luh J. Y. S., Walker M. W., Minimum Time Along the Path for a Mechanical Arm, Proceedings of the 16th IEEE Conference on Decision and Control, Including the Symposium on Adaptive Processes, and a Special Symposium on Fuzzy Set Theory and Applications, New Orleans, LA, Dec. 7—9, 1977, pp. 755—759, 1977.
62. Lundstrom Goran, Industrial Robot Grippers, *Ind. Robot*, 1(2), 72—82, 1973.

63. Mason M. T., Salisbury J. K., Jr., *Robot Hands and the Mechanics of Manipulation*, M. I. T. Press, Cambridge, MA, 1985.
64. McCarthy A., *Robotics Hearing with Spoken Commands*, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Stanford University, AIM 56, 1967.
65. Mujtaba Shahid, Goldman Ron, *AL Users's Manual*, 3rd ed., Computer Science Department, Stanford University, Palo Alto, CA Rept. No. STAN-CS-81-889 (Dec.), 1981.
66. Murata Hideto, *Kinematic Design for Articulated Robot Arm*, Engineering Faculty, Robe University, Japan, No. 22, pp. 83—92 (Mar.), 1976.
67. Murata Hideto, *Algorithm for Kinematic Control of Articulated Robot Arm*, Engineering Faculty, Kobe University, Japan, Rept. No. 23, pp. 95—106, 1977.
68. Murata Hideto, Hashimoto Masaharu, *Algorithm for Computing the Work Area of the Planar Articulated Robot Arm*, Engineering Faculty, Kobe University, Japan, Rept. No. 25, pp. 43—51, 1979.
69. Nakano Yoshiyuki, Fujie Masakatsu, Hosada Yuji, *Hitachi's Robot Hand*, *Robotics Age J. Intell. Mach.*, 5(7), 18—20, 1984.
70. Okada Tokuji, Tsuchiya Seiji, *On a Versatile Finger System*, Proceedings of the 7th International Symposium on Industrial Robots, Tokyo, Japan, Oct. 19—21, pp. 345—352, 1977.
71. Park William T., *The SRI Robot Programming System (RPS) — An Executive Summary*, SRI International, Menlo Park, CA, Mar. 29, 1981 [см. также *How to Generate a New Version of the SRI Robot Programming System (RPS)*, SRI International, Menlo Park, CA, Aug. 5, 1979].
72. Paul R. P., *Modeling Trajectory Calculation and Servoing of a Computer Controlled Arm*, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Stanford University, AIM 177, 1972.
73. Paul R. P., *Wave: A Model-Based Language for Manipulator Control*, *Ind. Robot*, 4(1), 10—17, 1977.
74. Paul R. P., *Robot Manipulators — Mathematical Programming and Control*, M. I. T. Press, Cambridge, MA, 1983.
75. Pieper D. L., *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Stanford University, AIM 72, 1968.
76. Potter Ronald, *Practical Application of a Limited Sequence Robot*, Proceedings of the 5th International Symposium on Industrial Robots, Chicago, IL, Sept. 22—24, pp. 55—64, 1975.
77. Raibert Marc H., *Mechanical Arm Control Using a State Space Memory*, SME Tech. Paper, Ser. Manuscript for Robots 2 Conference, Detroit, MI, Oct. 31 — Nov. 3, 1977, Paper No. MS77-750, 1977.
78. Raibert M. H., Craig J. J., *Hybrid Position/Force Control of Manipulators*, *Trans. ASME: J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 103(2), 126—133, 1981.
79. Pakic M., *The Belgrade Hand Prosthesis*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1968—1969, London, England, Vol. 183, Part 3J, pp. 60—67, 1968.
80. Reswick A., Meyler A., *A Device for Quadriplegics to Handle Objects*, M. I. T. Lincoln Laboratory, Res. Rept. No. 195, 1962.
81. Roberts L. G., *Machine Perception of Three-Dimensional Solids*, M. I. T. Lincoln Laboratory, Res. Rept. No. 315, 1963.
82. Roberts L. G., *Homogeneous Matrix Representation and Manipulation of N-Dimensional Constructs*, M. I. T. Lincoln Laboratory, Document No. MS 1045, 1965.
83. Rosenburg J., *History of Numerical Control 1949—1972: The Technical Development, Transfer to Industry, and Assimilation*, U. S. C. Information Sciences Institute, Marina Del Ray, CA, Report No. ISI-RR-72-3, 1972.
84. Rovetta Alberto, *On Specific Problems of Design of Multipurpose Mechanical Hands in Industrial Robots*, Proceedings of the 7th International Symposium on Industrial Robots, Tokyo, Japan, Oct. 19—21, pp. 337—343, 1977.
85. Rovetta A., *On Functionality of a New Mechanical Hand*, ASME Paper, No. 80-C2-DET-124, 1980.
86. Sato N., Heginbotham W. B., Pugh A., *A Method for Three-Dimensional Part Identification by a Tactile Transducer*, Proceedings of the 7th International Symposium on Industrial Robots, Tokyo, Japan, Oct. 19—21, pp. 577—585, 1977.
87. Shahinpoor M., *A Robot Engineering Textbook*, University of New Mexico Press, Albuquerque, 1984.
88. Shahinpoor M., Jamshidi M., Kim Y. T., *Exact Solutions for the Inverse Kinematics Problem of a Standard 6-Axis Robot Manipulator*, *J. Robotic Systems*, 3(1), 12—21, 1987.
89. Scinner Frank, *Design of a Multiple Prehension Manipulator System*, ASME Paper No. 74-DET-25, 1974.
90. Sugimoto K., Duffy J., *Determination of Extreme Distances of a Robot Hand — 1. A General Theory*, ASME Paper No. 80-DET-57, 1980.
91. Sugimoto K., Duffy J., *Determination of Extreme Distances of a Robot Hand — 2. Robot Arms with Special Geometry*, ASME Paper No. 80-DET-59, 1980.
92. *Surveys Reveal Robot Populations and Trends*, *Robotics Today*, Feb., pp. 79—80, 1982.
93. Tabesh A., *The Design, Modeling and Construction of a Gripping Device for the GE Model P50 Robot*, M. Sc. thesis, Mechanical and Industrial Engineering Department, Clarkson University, Potsdam, NY (Dec.), 1984.
94. Takegaki Morikazu, Arimoto Suguru, *A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators*, *Trans. ASME: J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 103(2), 126—133, 1981.
95. Tomoric A., Boni A., *Development of a Hand with Pressure Sensors*, M. I. T. Lincoln Laboratory, Res. Rept. No. 192, 1962.
96. Tsai Y. C., Song A. H., *Accessible Regions and Synthesis of Robot Arms*, ASME Paper No. 80-Det-101, 1980.
97. Unimation Inc., *User's Guide to VAL, version 12*, Unimation, Inc., Danbury, CT, 398-H2A (June), 1980.
98. Unimation Inc., *VAL Univision Supplement, version 13*, VSNO, 2nd ed., Unimation Inc., Danbury, CT (July), 1981.
99. Unimation Inc., *User's Guide to VAL-II, Part 1: Control from the System Terminal, version X2 (April); Part 2: Communications with a Supervisory System, version X2, Apr.; Part 3: Real-Time Path Control, version X2 (April)*, Unimation, Inc., Danbury, CT, 1983.
100. Vukobratovic M., Kircanski M., *A Method for Optimal Synthesis of Manipulation Robot Trajectories*, *Trans. ASME: J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 104(2), 188—193, 1982.
101. Vukobratovic M., Stokic D., *One Engineering Concept of Control of Manipulators*, *Trans. ASME: J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 103(2), 119—125, 1981.
102. Wichman M. W., *The Use of Optical Feedback in Computer Control of an Arm*, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Stanford University, AIM 56, 1967.
103. Will A., *Robot Assembler for Type Writers*, IBM Thomas J. Watson Research Center, Rept. No. 37, 1973.

104. Wright Patterson Air Force Base, Robotic System for Aerospace Batch Manufacturing, Task B — High Level Language User's Manual, Wright Patterson Air Force Base, OH, Tech. Rept. AFML-JR-79-4202 (Oct.), 1981.
105. Zeldman M. I., What Every Engineer Should Know About Robots, Dekker, New York, 1984.

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Робот с двумя степенями подвижности, работающий в декартовой системе координат, имеет диапазон движений 25 дюймов по оси z и 30 дюймов по оси y . В системе управления роботом используются 8-разрядные коды ЦАП и АЦП в цепях обратной связи и управления. Определите общие разрешающую способность и точность этого робота (рис. 31.1).

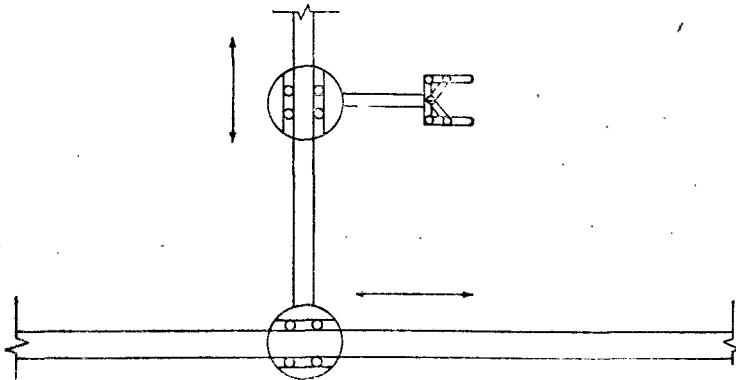


Рис. 31. Двухстепенный робот, работающий в декартовой системе координат.

2. Используя условия задачи 1, примем, что губки схвата способны совершать движения в направлении, параллельном оси y , с размахом 3 дюйма. Определите наименьшую точность при выполнении операций позиционирования объектов, если двигатель схвата работает под управлением той же системы управления.

3. Используя условия задач 1 и 2, примем, что движения губок схвата робота совершаются в направлении, перпендикулярном осям x и y , т. е. параллельно оси z , где x, y, z — декартова прямоугольная система координат. Найдите наименьшую точность, возможную при выполнении операций позиционирования объектов в процессе сборки при использовании этого робота.

4. Опишите по меньшей мере пять разных типов рабочей среды, где может быть использован многостепенный робот.

5. Обсудите возможность использования для приведения в движение и управления сочленением робота механизма прямого привода, включающего ротор, статор и шариковые подшипники.

6. Обсудите возможность использования прямого магнитного привода для приведения в движение и управления множеством сочленений в многостепенном манипуляционном роботе.

7. Манипуляционный робот, работающий в декартовой системе координат, имеет диапазоны перемещений по осям x , y и z 40, 38, 42 дюйма соответственно. В устройстве управления используются 10-разрядные коды ЦАП и АЦП в цепях обратной

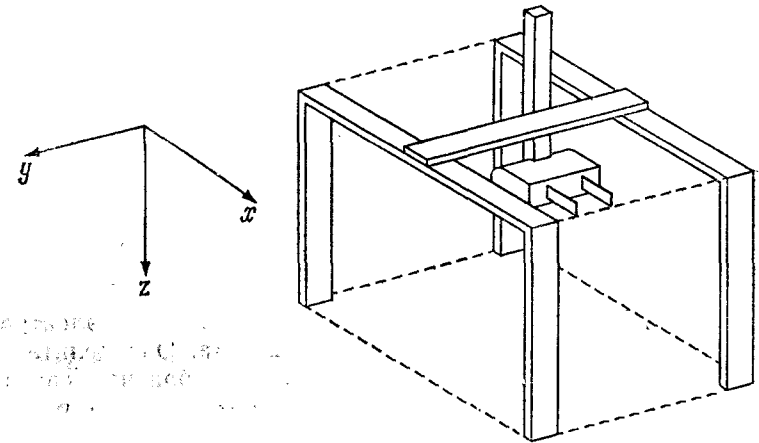


Рис. 31.7. Трехстепенный робот, работающий в декартовой системе координат.

связи и управления. Определите наилучшие разрешение и точность этого робота в сборочных процессах (рис. 31.7).

8. Пусть в задаче 7 сочленение А представляет собой цилиндрическое призматическое соединение, такое, что звено x может поворачиваться и перемещаться поступательно вдоль оси y . Таким образом, имеется робот, работающий частично в прямоугольной, а частично в цилиндрической полярной системе координат. При использовании таких же ЦАП и АЦП (10 разрядов) определите общее разрешение и точность этого робота в операциях позиционирования.

9. Покажите на примере робота с одной степенью подвижности с поворотным шарниром, что призматические роботы имеют лучшие разрешение и точность на схвате в сборочных процессах, чем многосуставные роботы с поворотными шарнирами,

когда не учитываются другие влияния типа механических погрешностей и колебаний (рис. 31.9).

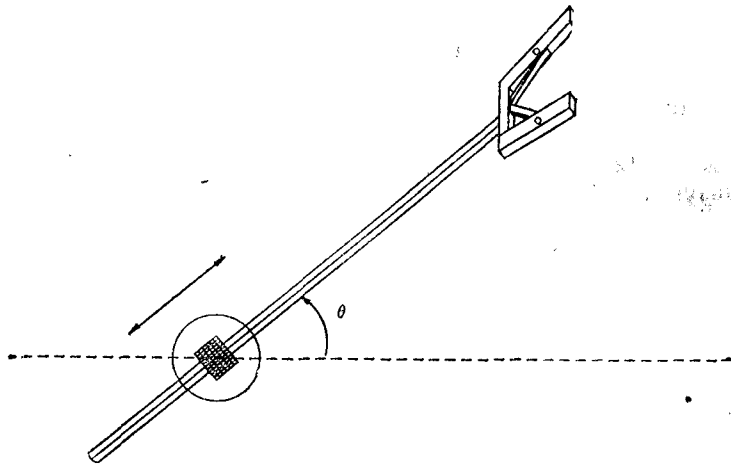


Рис. 31.9. Типичное вращательно-призматическое сочленение.

10. Пусть задано, что точность позиционирования электрода сварочного робота должна быть 0.0586 дюйма. Определите желаемое количество разрядов ЦАП в цепях обратной связи и управления положением электрода, если схват робота в конце

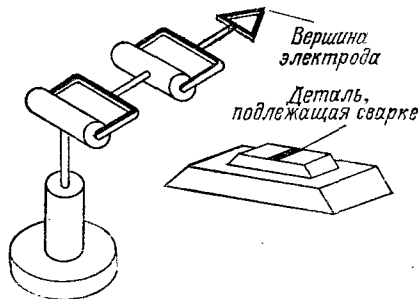


Рис. 31.10. Типичная роботизированная операция сварки.

каждого цикла сварки находится на расстоянии 30 дюймов от точки сварки. Каким образом можно улучшить повторяемость до 0.015 дюйма? (См. рис. 31.10).

11. Робот, работающий в сферической системе координат, имеет призматическое звено, способное выдвигаться от минимального радиуса 3 дюйма до максимального радиуса 4 фута.

Сферические углы θ и ϕ лежат в пределах $(0, 3\pi/4)$ и $(0, 2\pi)$ соответственно. Для случаев использования 12-разрядных кодов ЦАП для команд управления положением определите:

- наихудшее разрешение;
- наихудшую точность позиционирования (рис. 31.11).

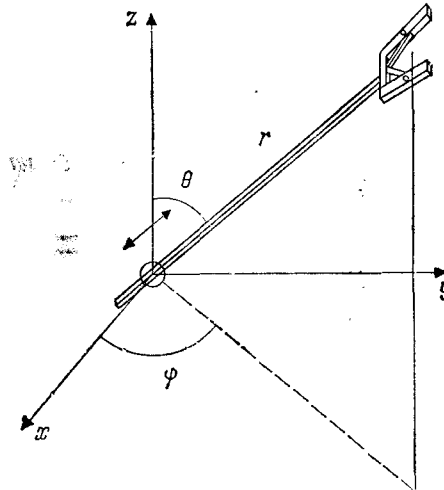


Рис. 31.11. Манипулятор, работающий в сферической системе координат.

12. Робот программируется с использованием 12-разрядных кодов ЦАП для операции введения вала диаметром $d_s = 10 \pm 0.008$ дюйм в отверстие диаметром $d_h = 10 \pm 0.008$ дюйм.

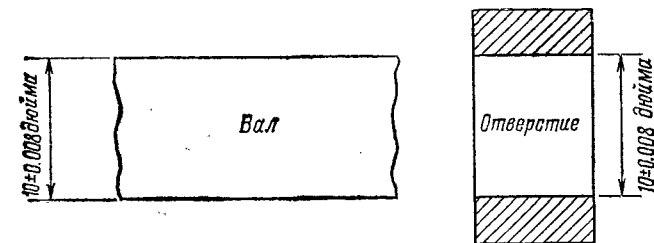


Рис. 31.12.

В предположении нормального закона распределения отклонений, а именно 1/3 поля допуска, определите процент деталей, которые будут отсеяны из-за нестыковки в сборочных процессах. Робот запрограммирован на отбраковку всех таких нестыкующихся деталей. Диапазон движений схвата 15 дюймов (рис. 31.12).

13. Манипуляционный робот вставляет детали А в детали В. Он берет детали А из магазина, перемещает их в горизонтальном направлении, затем вертикально и вводит в детали В, которые в это мгновение останавливаются (рис. 31.13). Исполнительный механизм оперирует с 12-разрядными кодами ЦАП и АЦП для осуществления обратной связи и управления по положению. Принимая нормальный закон распределения отклонений, а именно $1/3$ полей допуска, определите процент отбра-

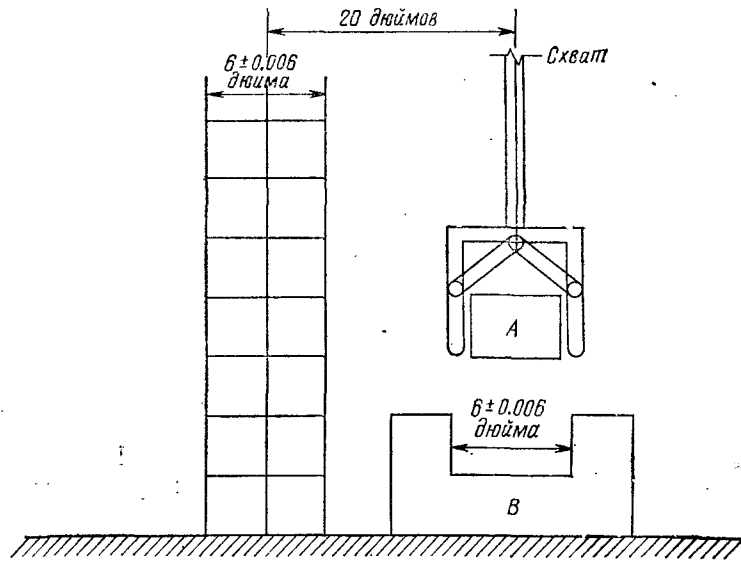


Рис. 31.13. Роботизированная сборка.

ковки деталей из-за нестыковки. Робот запрограммирован на отсев всех нестыкующихся деталей.

14. Два манипуляционных робота функционируют на производственных операциях переноски и позиционирования объектов совместно с одним конвейером. На двигатель конвейера поступает 10-разрядный код ЦАП для управления скоростью в диапазоне 0—40 см/с. Как показано на рис. 31.14, первый робот (А) помещает детали на ленту конвейера, тогда как второй робот (В) захватывает их и транспортирует в другое место. На исполнительные механизмы роботов поступает 12-разрядный код ЦАП для управления по положению и 10-разрядный код для управления по скорости. Диапазоны перемещений и

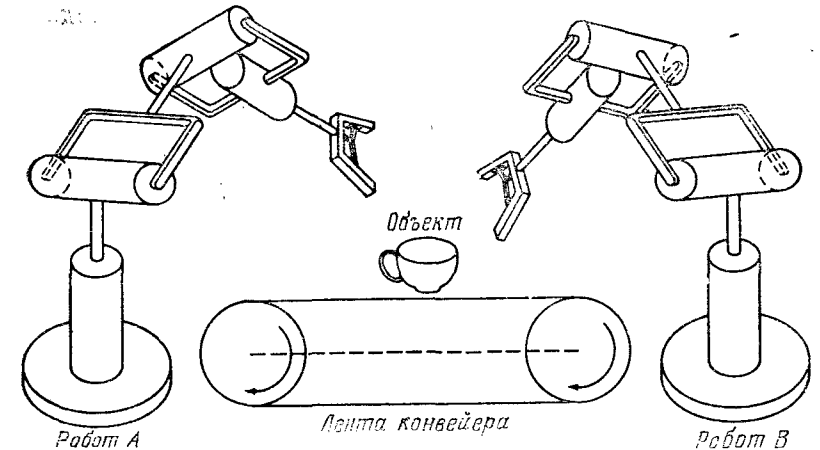


Рис. 31.14. Роботизированная рабочая станция с конвейером.

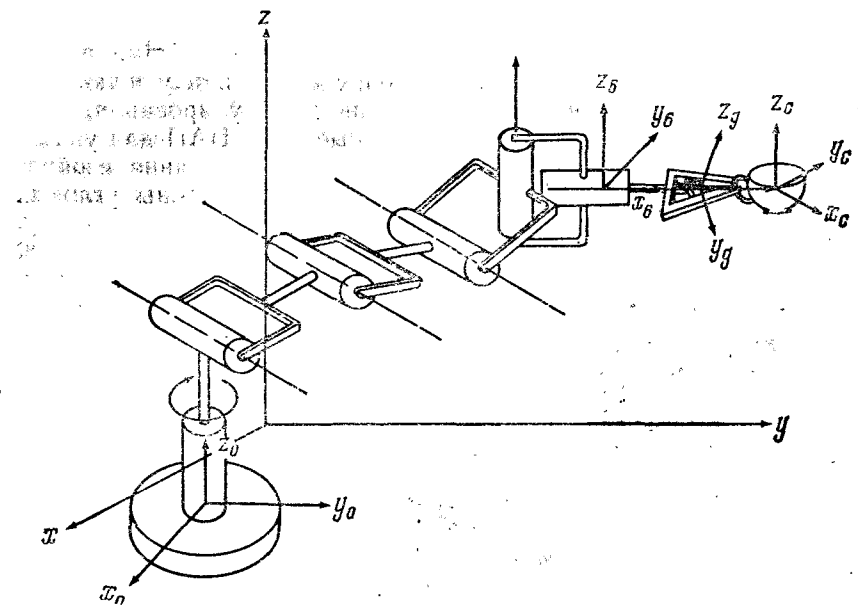


Рис. 31.15.

скоростей для робота А равны 23 см и 40 см/с, а для робота В—28 см и 5 см/с соответственно. Определите общее разрешение этого автоматизированного процесса как при скоростном, так и при позиционном манипулировании.

15. На рис. 31.15 чашка расположена в системе координат, связанной с абсолютной системой координат преобразованием C . Базовая система координат робота связана с системой координат xyz преобразованием Z . Крайняя точка кинематической цепи робота в месте соединения со схватом связана преобразованием T_6G с системой координат T_6 . Определите кинематическое положение чашки по отношению к схвату, т. е. преобразование oC , если

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^ZT_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^T_6G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Руководствуясь рис. 31.16, определите наилучшую точность позиционирования для операций манипулирования, если на все двигатели поступают 12-разрядные коды ЦАП для управления по положению, а на камеру для распознавания изображений — 8-разрядные коды. Принять все диапазоны угловых перемещений равными двум радианам.

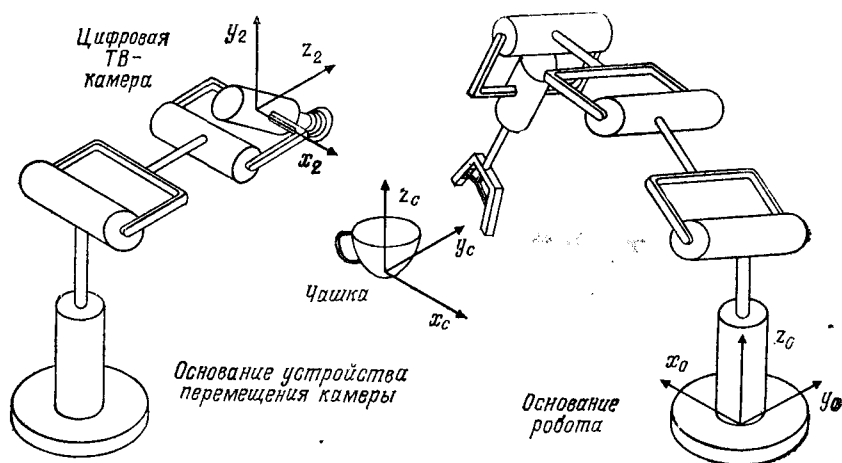


Рис. 31.16. Работа робота с использованием телекамеры.

Кинематика манипуляционных роботов

2.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе мы рассмотрим движение предметов без учета сил, порождающих это движение. Затем используем наши знания применительно к манипуляционным роботам и манипулируемым объектам. По определению такой подход называется кинематикой робототехнического манипулирования, в которую входит кинематика роботов и связанных с ними объектов, инструментов и систем координат. Кинематика является, возможно, наиболее важной областью робототехники, так как манипулирование может быть осуществлено лишь посредством движений схвата робота и связанных с ним деталей, инструментов и предметов в трехмерном евклидовом пространстве. Такие операции включают позиционирование (перемещение) и ориентацию (общее вращение) кисти робота (схвата) и манипулирование предметами, инструментами и деталями. При традиционном подходе кинематика может быть полностью описана переносом и вращением систем координат, привязанных к инструментам, деталям, объектам, схвату и другим частям конструкции робота.

Сначала мы опишем конструкцию типичного манипуляционного робота, а потом введем математические обозначения, используемые в этой главе и последующих главах. Затем дадим основы векторной и матричной алгебры и обсудим приложения однородных преобразований размера 4×4 и $n \times 4$ в кинематике и динамике роботов. Потом эти преобразования будут использованы для описания обобщенных положений и ориентации, т. е. кинематического положения звена робота по отношению к соседнему звену. Таким образом, будет введено понятие однородных преобразований Денавита — Хартенберга и

получены соответствующие уравнения. Затем будут всесторонне рассмотрены две кинематические задачи робототехники — *прямая* и *обратная* — и решено множество задач по данной тематике для большого числа манипуляционных роботов.

2.2. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

С точки зрения кинематики манипуляционный робот может рассматриваться как незамкнутая цепь звеньев, соединенных последовательно посредством либо призматических (поступательных), либо шарнирных (вращательных) сочленений. В общем случае один конец относительно свободен и обычно соединен со специализированным орудием, каковым является многопальцевое захватное устройство, или схват. Другой конец кинематической цепи закреплен на опорном основании, как правило неподвижном. Очевидно, что расположение и ориентация захватного устройства являются результатами совместного действия вращения и переноса каждого сочленения цепи звеньев робота-манипулятора. Подобные движения сочленений производятся при помощи приводов — электромеханических, гидравлических или пневматических. Приводы либо размещены непосредственно в месте сочленения, либо оказывают воздействие на удалении — через ремни, ролики, шкивы, цепи, цепные колеса или гидравлические линии питания.

Основным вопросом при рассмотрении манипулирования с использованием роботов является способность поместить схват в определенную точку с требуемой ориентацией в заданное время, что лежит в основе гибкого и автоматизированного производства. На рис. 2.2.1 изображен стандартный манипуляционный робот с шестью степенями подвижности, у которого есть основание, плечевой и локтевой шарниры, кисть, способная совершать вращения и качания, а также схватывание.

Положение и ориентация схвата робота могут быть описаны через положение и ориентацию системы координат, связанной со схватом, по отношению к инерциальной базовой системе координат, которая, как правило, размещается в основании манипулятора, как показано на рис. 2.2.2.

Совокупность положения и ориентации схвата в пространстве (кинематическое положение) математически может быть описана при помощи однородных преобразований размерности 4×4 . Эти однородные преобразования используются для решения как прямой, так и обратной кинематических задач. *Прямая задача кинематики* в робототехнике заключается в определении

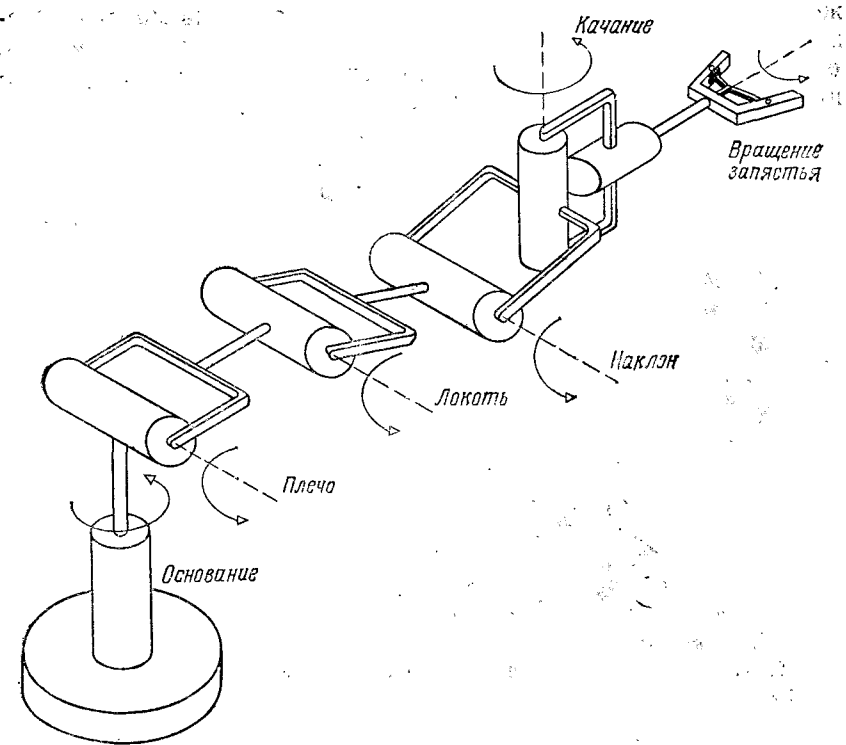


Рис. 2.2.1. Типичный шестистепенный манипулятор с поворотными сочленениями.

кинематического положения схвата, если дан вектор перемещений сочленений $\theta_i = [\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_n]^T$ манипуляционного робота с n степенями свободы. В противоположность этому *обратная задача кинематики* манипуляционных роботов состоит в определении вектора компонент перемещений сочленений θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) манипулятора с n степенями подвижности для данного кинематического положения схвата по отношению к базовой системе координат. Обычно наиболее желательно решить вторую задачу, так как она лежит в основе операций в гибком автоматизированном производстве и сборочных процессах. Решение прямой кинематической задачи используется в специальных приложениях, таких, как непосредственное планирование траектории, или в алгоритмах предотвращения столкновений с препятствиями. *Кинематическое положение* схвата обычно выражается матрицей T размера 4×4 , в которую входит вектор p поло-

жения начала системы координат схвата, а также матрица вращения R размера 3×3 , состоящая из трех вектор-столбцов n , o , a , являющихся соответственно векторами нормали, ориентации и подхода (рис. 2.2.3 и 2.2.4).

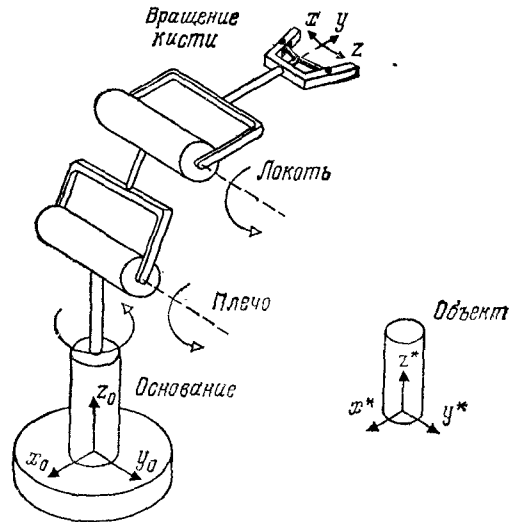


Рис. 2.2.2. Относительное расположение систем координат схвата и основания робота.

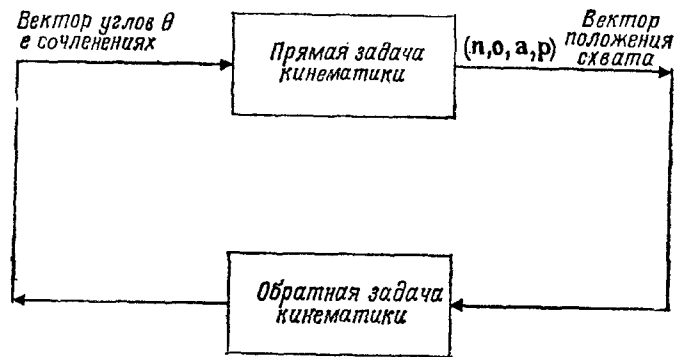


Рис. 2.2.3. Связь прямой и обратной задач кинематики манипуляторов.

Так как положение и ориентация схвата могут быть описаны тремя координатами x , y и z и тремя эйлеровыми углами θ , φ и ψ , базовые координаты могут быть определены с помощью набора фиксированных и вращающихся систем координат.

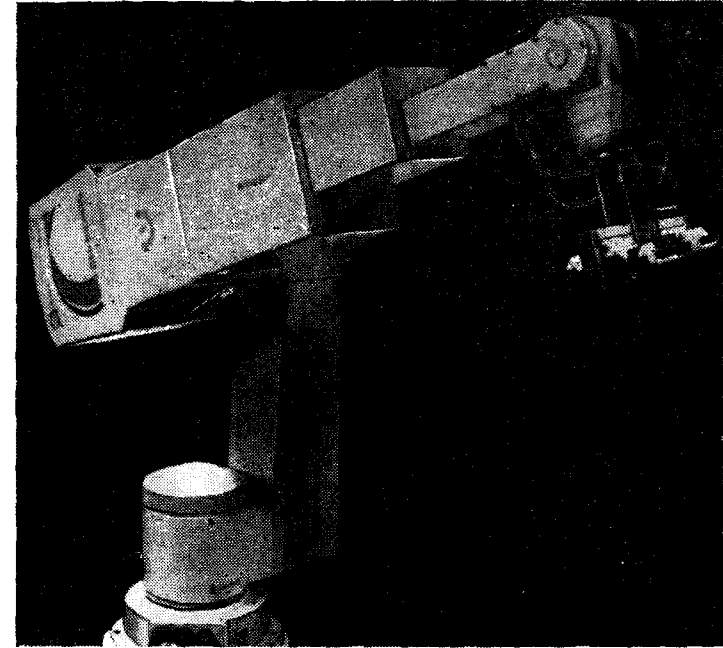


Рис. 2.2.4. Робот US Robots Maker 110. (С разрешения U. S. Robots.)

Чтобы решить прямую и обратную кинематические задачи для манипуляционного робота, обратимся сначала к векторной и матричной алгебре. Начнем с краткого описания математических обозначений, принятых в этой книге.

2.3. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Во всем тексте для представления векторов, скаляров и матриц используются общепринятые обозначения. Надстрочные обозначения указывают на описательную информацию, относящуюся к системам координат. Например, ${}^A r$ — вектор положения, описанный в системе координат A . Система координат A представляется однородным преобразованием размера 4×4 , которое описывает положение ее начала координат и поворот по отношению к базовой инерциальной системе координат. Иногда i -я система координат обозначается через A_i , а иногда i -я система, описанная в j -й системе координат, обозначается через A_j^i . Для

тригонометрических функций также используется сокращенное обозначение, например:

$$C_{ijk} = \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k) \quad \text{и} \quad S_{ijk} = \sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k). \quad (2.3.1)$$

Преобразования обычно обозначаются как **T**, тогда как однородные преобразования — как **H**. Преобразования поворота представляются матрицей **R** размера 3×3 , преобразования переноса обозначаются как **Trans**. Эйлеровы преобразования и преобразования вращения — качания обозначаются как **Euler**(φ, ψ, θ) и **RPY**(φ, ψ, θ) соответственно. Вообще объекты описываются первой буквой их названия, обозначающей однородные преобразования размера $4 \times n$, т. е., например, камера обозначается как преобразование **C** размера $4 \times n$.

2.4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕКТОРАХ И МАТРИЦАХ

Будем полагать, что x, y и z — векторы, p, Q и L — плоскости и **X**, **A** и **CONV** — системы координат. Два вектора — v в базовой системе координат и u в системе координат схвата — мо-

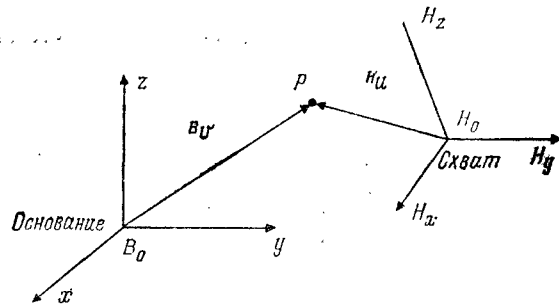


Рис. 2.4.1. Описание точки p в двух системах координат — схвата и основания.

гут описывать одну и ту же точку p в трехмерном пространстве, но являются по существу различными векторами, как показано на рис. 2.4.1. В действительности точка p может принадлежать предмету, удерживаемому схватом, и ее положение как в системе координат схвата (подвижной), так и в системе координат основания (неподвижной) важно знать для вычислений и управления. Заметим, что

$$\text{Основание } v \equiv B_0v \neq H_0u = \text{Схват } u, \quad (2.4.1)$$

где B_0v и H_0u — разные векторы, описывающие одну и ту же точку.

На протяжении всего текста используются правило правой руки и правосторонние системы координат.

Для векторов используется стандартное обозначение, например:

$$a \equiv a_i \equiv [a_1 \ a_2 \ a_3]^T \quad (2.4.2)$$

в декартовой прямоугольной системе координат $x_i \equiv [x_1 \ x_2 \ x_3] \equiv [x \ y \ z]$. Если единичные векторы по осям x, y, z обозначить соответственно как $(e_1, e_2, e_3) \equiv (i, j, k)$, то

$$a = \sum_{i=1}^3 a_i e_i = a_i e_i, \quad (2.4.3)$$

где используется эйнштейновское обозначение суммирования по повторяющемуся индексу i . Результат скалярного произведения векторов определяется как

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \equiv a_i b_i \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (2.4.4)$$

Векторное произведение векторов определяется как

$$a \times b = \epsilon_{ijk} a_j b_k e_i, \quad (2.4.5)$$

где ϵ_{ijk} — стандартный символ перестановки, определяемый следующим образом:

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } i, j, k \text{ образуют четную перестановку} \\ & \text{чисел } 1, 2, 3; \\ -1, & \text{если } i, j, k \text{ образуют нечетную перестановку} \\ & \text{чисел } 1, 2, 3; \\ 0, & \text{если какой-либо из индексов } i, j, k \text{ повторяется.} \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Определитель вычисляется следующим образом: для матрицы $A = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, размера 3×3

$$\det A = \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}; \quad (2.4.7)$$

далее заметим, что

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (2.4.8)$$

Объем, ограниченный параллелепипедом, ребра которого являются векторами \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , равен

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|, \quad (2.4.9)$$

где $|\cdot|$ означает абсолютное значение. Во всем тексте используются следующие векторные тождества:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (2.4.10)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad (2.4.11)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad (2.4.12)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{b}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] - \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})], \quad (2.4.13)$$

Подобным же образом проводятся вычисления с двумерными векторами или матрицами. Например, если \mathbf{A} — матрица и \mathbf{a} — вектор, то их произведение — вектор \mathbf{b} , такой, что

$$\mathbf{b} = \mathbf{Aa} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (2.4.14)$$

Пример 2.4.1 ■

Для $\mathbf{a} \equiv [-1 \ 0 \ 2]^T$ и

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.15)$$

найти их произведение \mathbf{b} .

Решение.

$$\mathbf{b} = \mathbf{Aa} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \blacksquare$$

Заметим, что $\mathbf{b} \equiv [b_1 b_2 b_3]$, где

$$\begin{aligned} b_1 &= A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3, \\ b_2 &= A_{21}a_1 + A_{22}a_2 + A_{23}a_3, \\ b_3 &= A_{31}a_1 + A_{32}a_2 + A_{33}a_3. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Используя эйнштейновы соглашения для суммирования, можно написать

$$b_i = A_{ij}a_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.4.17)$$

Если матрица \mathbf{A} обозначена как A_{ij} , где $i, j = 1, 2, \dots, n$, то A_{ij} — матрица размера $n \times n$. Аналогично $A_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m}$, где $i_1, i_2, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n$, — матрица размера $n \times n$. Матрицей, транспонированной по отношению к матрице A_{ij} , является матрица A_{ji} , в которой столбцы матрицы A_{ij} заменены на строки. Таким образом,

$$A_{ij}^T = A_{ji} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.4.18)$$

Пример 2.4.2 ■

Найти определитель матрицы, транспонированной по отношению к матрице A_{ij} ,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \quad (2.4.19)$$

Решение. Заметим, что

$$A_{ij}^T = A_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}; \quad (2.4.20)$$

тогда

$$\det A_{ji} = (5 \times 9 - 8 \times 6) - 4(2 \times 9 - 8 \times 3) + 7(2 \times 6 - 5 \times 3)$$

или

$$\det A_{ji} = -3 + 24 - 21 = 0. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.4.21)$$

Матрица, определитель которой равен нулю, называется вырожденной. Определитель матрицы A_{ij} размера $n \times n$ находится из выражения

$$\det A_{ij} = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} A_{i_1 1} A_{i_2 2} A_{i_3 3} \dots A_{i_n n}, \quad (2.4.22)$$

где $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}$ — обобщенное обозначение перестановки, определяемое аналогично выражению (2.4.6). Отметим, что матрицей, обратной по отношению к матрице A_{ij} , является матрица A_{ij}^{-1} , такая, что

$$(A_{ij})(A_{ij})^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} = \delta_{ij} \equiv \text{единичная матрица}, \quad (2.4.23)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера — матрица, недиагональные элементы которой равны тождественно нулю, а диагональные

элементы равны единицам, т. е. если $i, j = 1, 2, 3, 4$, то

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4.24)$$

Имеется специальное соотношение, называемое $(\epsilon - \delta)$ -тождеством, между ϵ_{ijk} и δ_{ij} , а именно

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}. \quad (2.4.25)$$

Матрица, обратная матрице A_{ij} , определяется как

$$A_{ij}^{-1} = \frac{(\text{Адьонкт } A_{ij})^T}{\det A_{ij}}, \quad (2.4.26)$$

где T обозначает транспонирование, а адьонкт, или алгебраическое дополнение, элемента A_{ij} , определяется таким образом, что для $i, j = 1, 2, 3$ имеем

$$\text{Адьонкт } A_{11} = A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23}, \quad (2.4.27)$$

$$\text{Адьонкт } A_{12} = -(A_{21}A_{33} - A_{31}A_{23}), \quad (2.4.28)$$

$$\text{Адьонкт } A_{13} = A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}, \quad (2.4.29)$$

$$\text{Адьонкт } A_{21} = -(A_{12}A_{33} - A_{32}A_{13}), \quad (2.4.30)$$

$$\text{Адьонкт } A_{22} = A_{11}A_{33} - A_{31}A_{13}, \quad (2.4.31)$$

$$\text{Адьонкт } A_{23} = -(A_{11}A_{32} - A_{31}A_{12}), \quad (2.4.32)$$

$$\text{Адьонкт } A_{31} = A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}, \quad (2.4.33)$$

$$\text{Адьонкт } A_{32} = A_{11}A_{23} - A_{21}A_{13}, \quad (2.4.34)$$

$$\text{Адьонкт } A_{33} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}. \quad (2.4.35)$$

Таким образом, для $i, j = 1, 2, 3$ имеем

$$(\text{Адьонкт } A_{ij})^T = \begin{bmatrix} \text{Адьонкт } A_{11} & \text{Адьонкт } A_{21} & \text{Адьонкт } A_{31} \\ \text{Адьонкт } A_{12} & \text{Адьонкт } A_{22} & \text{Адьонкт } A_{32} \\ \text{Адьонкт } A_{13} & \text{Адьонкт } A_{23} & \text{Адьонкт } A_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.4.36)$$

Матрицу, обратную матрице A_{ij} , можно найти из (2.4.26), вычислив предварительно $\det A_{ij}$.

Пример 2.4.3 ■

Найти матрицу, обратную матрице A_{ij} , приведенной в примере 2.4.1.

Решение. Заметим, что

$$\text{Адьонкт } A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad (2.4.37)$$

и

$$(\text{Адьонкт } A_{ij})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 11 & -5 \end{bmatrix}. \quad (2.4.38)$$

Определитель матрицы A_{ij} равен -11 . Таким образом,

$$A_{ij}^{-1} = \frac{(\text{Адьонкт } A_{ij})^T}{\det A_{ij}} = \frac{-1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 11 & -5 \end{bmatrix}. \quad (2.4.39)$$

Для проверки воспользуемся тем, что $A_{ij}A_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$:

$$-\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 11 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4.40)$$

2.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ ОДНОРОДНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Чтобы описать однородное представление объектов, введем сначала понятие однородного вектора. Однородные векторы имеют одно и то же направление, но различные величины и компоненты (рис. 2.5.1). Заметим, что $N = ai + bj$, где i и j — единичные векторы по осям x и y соответственно. Далее, все векторы u_i принадлежат множеству однородных векторов $[u_i]$, таких, что $u \equiv [x \ y \ 0 \ \omega]^T$ и

$$x = a\omega, \quad y = b\omega, \quad z = 0. \quad (2.5.1)$$

Векторы u_1, u_2, u_3 и u_4 на рис. 2.5.1 принадлежат одному множеству. В частности, при $\omega = 1, x = a, y = b$ и $z = 0$ получаем определение вектора (физический вектор) в координатах x, y, z . Величина ω называется коэффициентом масштабирования. Заметим, что $[0 \ 0 \ 0 \ n]^T$ — нулевой вектор в начале системы координат, вектор $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ — вектор, не определенный при

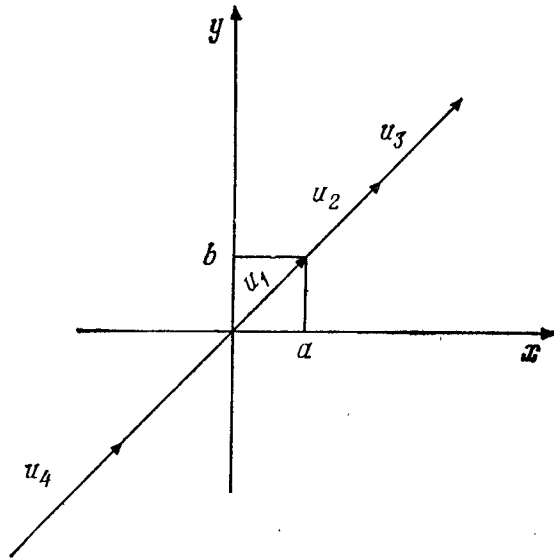


Рис. 2.5.1. Представление однородных векторов.

любом ненулевом коэффициенте масштабирования λ , и $[a \ b \ c \ 0]^T$ — вектор, задающий некоторое направление.

2.5.1. ПЛОСКОСТИ

Поскольку плоскости могут быть описаны векторами, нормальными к ним, можно сформулировать определение, подобное данному выше, для однородных плоскостей, а именно, что однородная плоскость представляется вектором \mathbf{p} . Так как $\mathbf{p} \equiv [a \ b \ c \ d]$ является не вектор-столбцом, а вектор-строкой, то, если вектор $\mathbf{v} \equiv [x \ y \ z \ w]$ лежит в плоскости \mathbf{p} , скалярное произведение векторов \mathbf{p} и \mathbf{v} равно нулю, т. е.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = [a \ b \ c \ d] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = ax + by + cz + dw = 0. \quad (2.5.2)$$

2.5.2. ТОЧКИ И ТЕЛА

Точки могут быть представлены как однородные векторы положения, так что точка p , имеющая координаты a, b, c , может быть представлена вектором $\mathbf{u} \equiv ai + bj + ck$ или в более об-

щей форме вектором $\mathbf{u} \equiv [x \ y \ z \ w]^T$, где $x = aw$, $y = bw$ и $z = cw$, где w — коэффициент масштабирования. Подобным же образом тела могут быть описаны как множество точек т. е. однородных вектор-столбцов, которые обычно группируются в однородную матрицу размера $4 \times n$ где через n обозначено количество характеристических точек, специфичных для данного тела в геометрическом смысле. Например, перевернутая пирамида (рис. 2.5.2) может быть просто описана однородным преобразованием размера 4×5 .

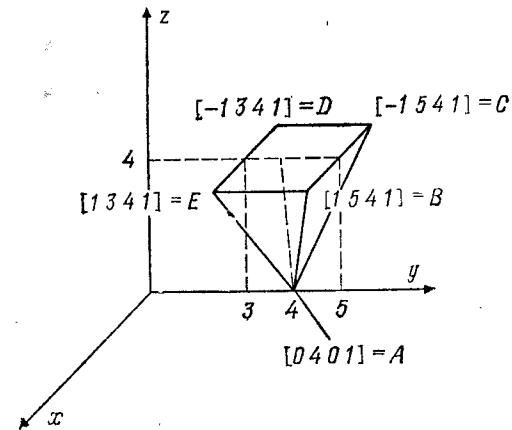


Рис. 2.5.2. Представление объекта при помощи однородных преобразований, соответствующих характеристическим точкам объекта.

Итак, перевернутая пирамида может быть представлена однородным преобразованием, а именно

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.3)$$

Порядок столбцов в \mathbf{A} произволен. Однако, будучи один раз установлен, он должен оставаться неизменным. Например, первый столбец относится к вершине пирамиды и, какие бы преобразования пирамиды ни производились, первый столбец будет служить для представления ее вершины. Так, при переносе объекта в направлении, параллельном оси x ,

соответствующее преобразование имеет вид

$$T(a, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.4)$$

Если применить это преобразование к перевернутой пирамиде, она будет перенесена в том же направлении как единое целое и новое тело будет описываться матрицей A , такой, что

$$A_{\text{нов}} = T(a, x) A = \begin{bmatrix} a & 1+a & -1+a & -1+a & 1+a \\ 4 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.5)$$

Теперь вершиной пирамиды или первым столбцом является точка $[a \ 4 \ 0 \ 1]$. Аналогичные преобразования могут производиться с объектом для его вращения и переноса. Но все столбцы сохраняют их начальное соответствие, как если бы мы их поместили какими-либо именами, такими, как A , B , C , D и E .

2.5.3. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Для наблюдателя разные точки трехмерного тела представляются находящимися на разных расстояниях. Концепция перспективных преобразований может найти применение в робототехнике, особенно в случае, когда роботы оборудованы системами технического зрения. Мы подробно рассмотрим этот тип преобразований в гл. 8.

2.5.4. ОДНОРОДНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В этой книге однородное преобразование определяется как матрица H размера 4×4 , которая в общем случае описывает перенос, вращение, растяжение (масштабирование) и перспективную проекцию векторов, точек, тел (матриц) и других видов объектов. В общем случае она состоит из 3×3 -матрицы вращения R , 3×1 -вектора переноса p , 1×3 -вектора перспективной проекции b и 1×1 -матрицы масштабирования (растяжения) w .

Итак,

$$H = \begin{bmatrix} R & p \\ 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ b, 1 \times 3 & w \\ & 1 \times 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.6)$$

где через R обозначена матрица вращения (3×3), через p — вектор переноса, а через b обозначен 1×3 -вектор-столбец перспективной проекции.

Пример 2.5.1. ■

Из рис. 2.5.3 определите соответствующее однородное преобразование H , осуществляющее перемещение тела (пирами-

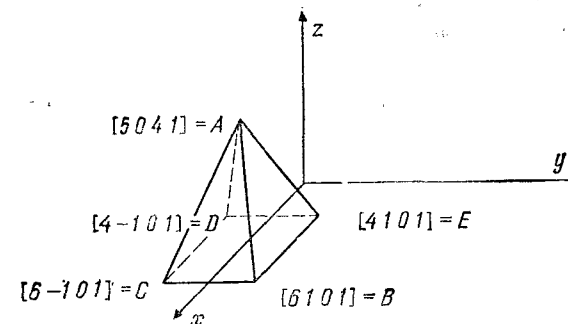


Рис. 2.5.3. Манипулирование объектом.

ды) из начального положения и ориентации, показанных на рис. 2.5.2.

Решение. Как видно из рисунка, тело было сначала перенесено в отрицательном направлении по оси z на четыре единицы, потом повернуто относительно оси z на -90° , затем — относительно оси x на 180° и, наконец, перенесено по оси x на одну единицу. Таким образом, общее преобразование H описывается следующим образом:

$$H = T(x, 1) R(x, 180^\circ) R(z, -90^\circ) T(z, -4), \quad (2.5.7)$$

т. е.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5.8)$$

$$\text{или} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.5.9)$$

Отметим, что новое положение и ориентация тела описываются матрицей $\mathbf{A}_{\text{нов}}$,

$$\mathbf{A}_{\text{нов}} = \mathbf{H}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5.10)$$

т. е.

$$\mathbf{A}_{\text{нов}} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.11)$$

Очевидно, это соответствует расположению точек A, B, C, D и E на рис. 2.5.3. Заметим, что любое вращение относительно оси y на угол θ может быть выражено преобразованием $\text{Rot}(y, \theta)$, таким, что

$$\text{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.12)$$

где $\cos \theta \equiv C\theta$ и $\sin \theta \equiv S\theta$. Аналогично

$$\text{Rot}(x, \psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и $\text{Rot}(z, \varphi) = \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.13)$

Для любого преобразования переноса

$$\text{Trans}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.14)$$

Точки и векторы переносятся по направлениям x, y и z на $a\omega, b\omega$ и $c\omega$, где ω — масштабирующий коэффициент, т. е.

$$\text{Trans}(a, b, c) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \omega \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x + a\omega \\ y + b\omega \\ z + c\omega \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (2.5.15)$$

Определение. Кинематикой роботов называется систематическое учение о движении динамической робототехнической системы в трехмерном пространстве в зависимости от времени без учета сил и моментов, порождающих такое движение. Как упоминалось ранее, в большинстве задач робототехники нужны как *прямые*, так и *обратные* уравнения кинематики и их решения либо через векторы положения объектов, либо через векторы углов в шарнирах. По очевидным причинам большее внимание сосредоточено на обратной задаче. В кинематике роботов применяются системы координат четырех различных видов:

1. Базовая эталонная система координат, представляющая собой правостороннюю декартову прямоугольную систему координат с шестью степенями свободы, а именно: x, y, z и три угла Эйлера ψ, θ, φ .

2. Машинные координаты, являющиеся внутренним численным представлением величин углов в шарнирах (двигателях).

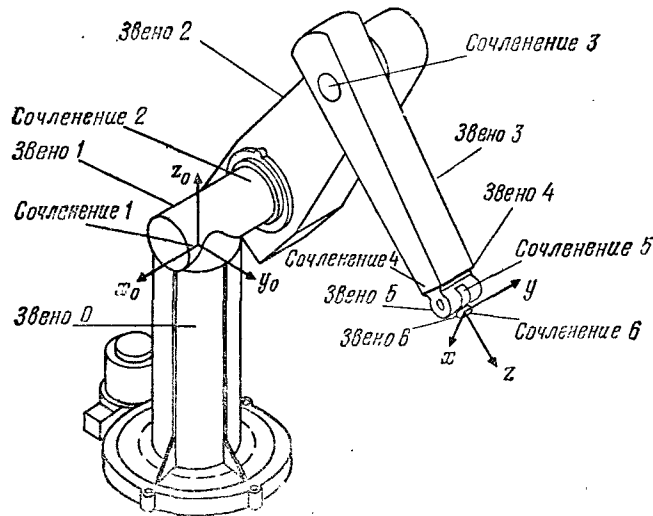


Рис. 2.5.4. Манипулятор PUMA и его системы координат.

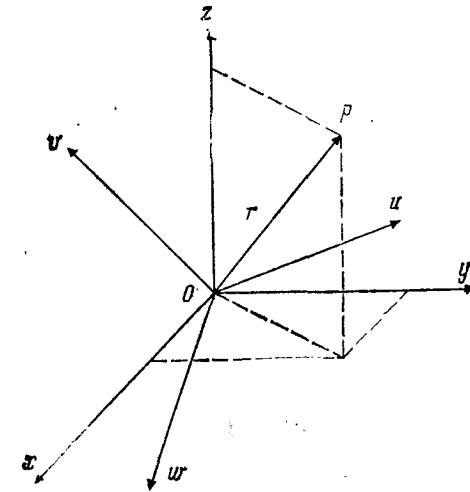


Рис. 2.5.5. Системы координат: эталонная (x, y, z) и манипулятора (u, v, w) .

например: 8-разрядные коды ЦАП, коды оптических кодовых датчиков и количество импульсов в импульсных датчиках.

3. Система координат объекта, представляющая собой правостороннюю декартову прямоугольную систему координат с шестью степенями свободы: u, v, w и три угла Эйлера ψ, θ, φ . Эта система координат связана с роботом и движется точно вместе с роботом.

4. Углы в сочленениях $(\theta_i, i = 1, 2, \dots, n)$, представляющие собой угловую систему координат, описывающую положение двигателей шарниров в системах координат звеньев. Углы в сочленениях становятся известны, как только задано множество систем координат звеньев (рис. 2.5.4).

Как отмечалось ранее, \mathbf{H} — однородное 4×4 -преобразование, которое по существу порождает вычислительный алгоритм управления вращением сочленений робота, является матрицей с базовой подматрицей вращений, а именно 3×3 -матрицей \mathbf{R} , и тремя другими базовыми векторами и матрицами. Базовые матрицы вращения могут быть получены при совмещении осей координат двух декартовых прямоугольных систем координат (ДПСК) — одной неподвижной, а другой — движущейся вместе с роботом (рис. 2.5.5).

Заметим, что представления вектора \mathbf{r} , описывающего положение точки p в пространстве в системах координат xyz и uvw , определяют относительное вращение одной из них по отношению

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [r_x r_y r_z] = [r_u r_v r_w], \\ \mathbf{i}_{xyz} &= [i_x i_y i_z], \\ \mathbf{i}_{uvw} &= [i_u i_v i_w] \text{ — единичные векторы.} \end{aligned}$$

к другой. В данном случае можно показать, что

$$\begin{aligned} r_x &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{i}_x = (r_u \mathbf{i}_u + r_v \mathbf{i}_v + r_w \mathbf{i}_w) \cdot \mathbf{i}_x = \\ &= r_u (\mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_x) + r_v (\mathbf{i}_v \cdot \mathbf{i}_x) + r_w (\mathbf{i}_w \cdot \mathbf{i}_x). \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} r_y &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{i}_y = (r_u \mathbf{i}_u + r_v \mathbf{i}_v + r_w \mathbf{i}_w) \cdot \mathbf{i}_y = \\ &= r_u (\mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_y) + r_v (\mathbf{i}_v \cdot \mathbf{i}_y) + r_w (\mathbf{i}_w \cdot \mathbf{i}_y) \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

и

$$r_z = r_u (\mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_z) + r_v (\mathbf{i}_v \cdot \mathbf{i}_z) + r_w (\mathbf{i}_w \cdot \mathbf{i}_z). \quad (2.5.18)$$

В более краткой форме

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_w \\ \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_v & \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_w \\ \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_v & \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{bmatrix} \quad (2.5.19)$$

или

$$\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{R} \mathbf{r}_{uvw}. \quad (2.5.20)$$

Аналогично можно показать, что

$$\mathbf{r}_{uvw} = \mathbf{B} \mathbf{r}_{xyz}, \quad \text{где} \quad (2.5.21)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_z \\ \mathbf{i}_v \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_v \cdot \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_v \cdot \mathbf{i}_z \\ \mathbf{i}_w \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_w \cdot \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_w \cdot \mathbf{i}_z \end{bmatrix}. \quad (2.5.22)$$

Заметим, что $\mathbf{B} = \mathbf{R}^T$. Далее, из (2.5.20) следует также и то, что

$$\mathbf{r}_{uvw} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}_{xyz}. \quad (2.5.23)$$

Тогда из формул (2.5.21) и (2.5.23) и соотношения $\mathbf{B} = \mathbf{R}^T$ следует, что

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}. \quad (2.5.24)$$

Все матрицы, обладающие таким свойством, называются *ортгональными матрицами*. Отметим, что определители таких матриц равны ± 1 .

Пример 2.5.2 ■

Доказать, что $\det \mathbf{R} = \pm 1$.

Решение. Заметим, что $\mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$. Следовательно,

$$(\det \mathbf{R})^2 = \det \mathbf{I} = 1.$$

Отсюда $\det \mathbf{R} = \pm 1$. ■ ■

Матрица \mathbf{R} также может быть выражена через направляющие косинусы. Например,

$$(\mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u) = \cos(\alpha_{xu}),$$

где α_{xu} — угол между осью x и осью u . Другим символьным обозначением \mathbf{R} является ее запись в виде

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad (2.5.25)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{xu}) & \cos(\alpha_{xv}) & \cos(\alpha_{xw}) \\ \cos(\alpha_{yu}) & \cos(\alpha_{yv}) & \cos(\alpha_{yw}) \\ \cos(\alpha_{zu}) & \cos(\alpha_{zv}) & \cos(\alpha_{zw}) \end{bmatrix}. \quad (2.5.26)$$

Так, $\mathbf{R}(x, \alpha)$ есть матрица вращения на угол α относительно оси x , что означает $\alpha_{yv} = \alpha_{zw} = \alpha$, $\alpha_{zv} = 90^\circ - \alpha$, $\alpha_{zw} = 90^\circ + \alpha$,

$\alpha_{yv} = \alpha_{zu} = 90^\circ$, $\alpha_{xu} = 0$ и $\alpha_{xv} = \alpha_{xw} = 90^\circ$. Следовательно,

$$\mathbf{R}(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.5.27)$$

Пример 2.5.3 ■

Дан вектор $\mathbf{r}_{uvw} = [6, 4, 2]^T$ в системе координат $Ouvw$. Найти \mathbf{r}_{xyz} , если $Ouvw$ повернута относительно оси z на 60° .

Решение

$$\mathbf{R}(z, 60) = \begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 & 0 \\ \sin 60 & \cos 60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{xyz} &= \mathbf{R}(z, 60) \mathbf{r}_{uvw} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.464 \\ 7.196 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \quad (2.5.29) \end{aligned}$$

Заметим, что векторы-столбцы в выражении для \mathbf{R} в (2.5.25) представляют собой проекции единичных базовых векторов системы координат $Ouvw$ на систему координат $Oxyz$. Векторы-строки, с другой стороны, содержат компоненты базовых единичных векторов системы координат $Oxyz$ в системе координат $Ouvw$.

Последовательность поворотов может быть такой, что тело будет вращаться относительно осей координат как системы $Oxyz$, так и системы $Ouvw$. Всегда важен порядок поворота. Например, «сложный поворот» R_1 может описываться выражением $R(y, \varphi) R(z, \theta) R(y, \psi)$, а другой поворот R_2 — выражением $R(x, \psi) R(z, \theta) R(y, \varphi)$. Эти два поворота приводят к разным результатам, и, следовательно, $R_1 \neq R_2$. Заметим, что для того, чтобы применять правило перемножения, системы координат $Oxyz$ и $Ouvw$ должны совпадать. В этом случае матрица поворота $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ — единичная матрица. Если системы $Oxyz$ и $Ouvw$ вначале не совпадают, необходимо осуществить надлежащее преобразование, чтобы их совместить.

Пример 2.5.4 ■

Найти матрицу сложного вращения, описывающую следующее движение:

а) поворот на угол φ относительно оси y ;

- б) поворот на угол θ относительно оси w ;
в) поворот на угол α относительно оси u .

Решение. Заметим, что окончательно сложное вращение описывается матрицей

$$R = R(y, \varphi) IR(w, \theta) R(u, \alpha), \quad (2.5.30)$$

$$R = \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}. \quad (2.5.31)$$

Убедительно просим студентов выполнить все детали! ■ ■

Пример 2.5.5 ■

Найти матрицу сложного вращения, описывающую следующие движения:

- а) вращение на угол α относительно оси u ;
б) вращение на угол θ относительно оси w ;
в) вращение на угол φ относительно оси y .

Эта последовательность, обратная приведенной в примере 2.5.4.

Решение. В этом случае $R = R(y, \varphi) IR(u, \alpha) R(w, \theta)$.

$$R = \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.32)$$

Перемножив, вы убедитесь, что данный сложный поворот отличается от сложного поворота, найденного в предыдущем примере. ■ ■

Пример 2.5.6 ■

Найдите выражение для вращательного преобразования общего вида, при котором выполняется поворот тела относительно произвольного направления k на угол θ .

Решение. Зададим общее направление k единичным вектором, таким, что

$$k = k_x i + k_y u + k_z k \quad (2.5.33)$$

является представлением k в системе координат $Oxyz$. Можно предположить, что существует декартова прямоугольная система координат K , такая, что ее ось z совпадает с осью k , а ее начало координат совпадает с началом координат системы $Oxyz$. Представим K следующим однородным преобразованием:

$$K = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.34)$$

Тогда очевидно, что

$$a_x = k_x, \quad a_y = k_y, \quad a_z = k_z. \quad (2.5.35)$$

Так как поворот тела относительно k эквивалентен вращению тела относительно оси z системы координат K , справедливо следующее уравнение преобразований:

$$R(k, \theta) K = KR(z, \theta), \quad (2.5.36)$$

где $R(k, \theta)$ — вращение общего вида на угол θ относительно k .

$$R(k, \theta) = KR(z, \theta) K^{-1}. \quad (2.5.37)$$

Тогда

$$R(k, \theta) = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.38)$$

Перемножив матрицы в уравнении (2.5.38) и используя уравнение (2.5.36), а также тот факт, что

$$a_x = k_x = n_y a_z - n_z o_y, \quad (2.5.39)$$

$$a_y = k_y = n_z o_x - n_x o_z, \quad (2.5.40)$$

$$a_z = k_z = n_x o_y - n_y o_x, \quad (2.5.41)$$

получим следующее выражение для $R(k, \theta)$:

$$R(k, \theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x \text{vers}\theta + \cos\theta & k_y k_x \text{vers}\theta - k_z \sin\theta & k_z k_x \text{vers}\theta + k_y \sin\theta & 0 \\ k_x k_y \text{vers}\theta + k_z \sin\theta & k_y k_y \text{vers}\theta + \cos\theta & k_z k_y \text{vers}\theta - k_x \sin\theta & 0 \\ k_x k_z \text{vers}\theta - k_y \sin\theta & k_y k_z \text{vers}\theta + k_x \sin\theta & k_z k_z \text{vers}\theta + \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5.42)$$

где $\text{vers } \theta \equiv (1 - \cos \theta)$. Чтобы найти желаемое направление \mathbf{k} , заметим, что вращение на угол θ относительно \mathbf{k} порождает преобразование \mathbf{R} , такое, что

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.43)$$

Затем выводятся девять уравнений для четырех неизвестных k_x, k_y, k_z и θ . ■ ■

Пример 2.5.7 ■

В соответствии с рис. 2.5.6 определите преобразование ${}^Z T_6$ в системе координат основания робота, связанной с эталонной

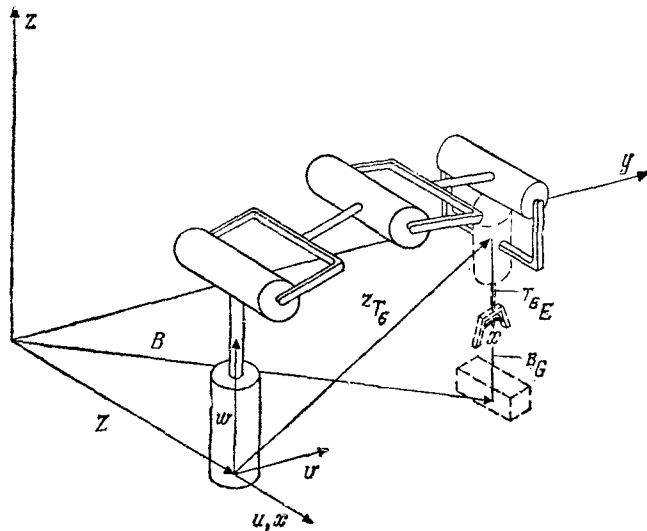


Рис. 2.5.6. Позиционирование схвата над объектом.

системой координат преобразованием \mathbf{Z} . Объект расположен в точке, соответствующей преобразованию \mathbf{B} , а положение схвата по отношению к \mathbf{B} определяется преобразованием ${}^B \mathbf{G}$. Положение схвата по отношению к ${}^Z T_6$ (крайнее звено робота) представляется как ${}^{T_6} \mathbf{E}$.

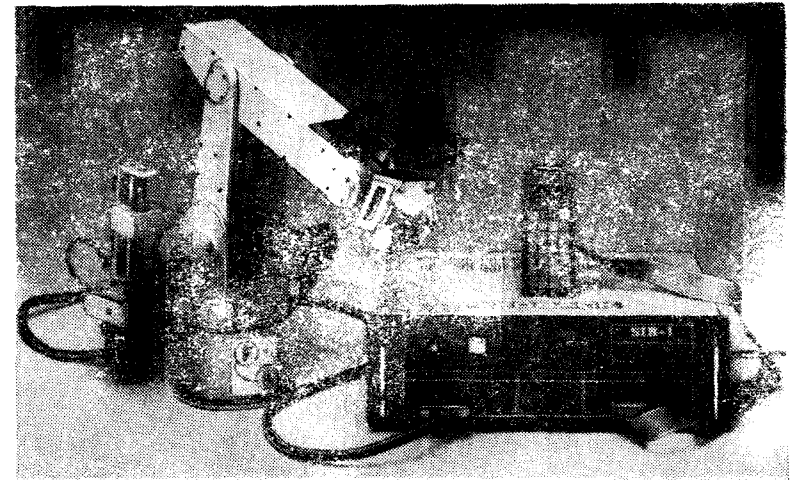


Рис. 2.5.7. Робот SIR-1. (С разрешения Feedback Corp.)

Решение. Положение схвата должно быть одно и то же при обоих описаниях (рис. 2.5.6). Очевидно, что

$${}^B \mathbf{G} = \mathbf{Z} {}^Z T_6 {}^{T_6} \mathbf{E}. \quad (2.5.44)$$

Таким образом,

$${}^Z T_6 = \mathbf{Z}^{-1} {}^B \mathbf{G} {}^{T_6} \mathbf{E}^{-1}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.5.45)$$

Пример 2.5.8 ■

Пусть в предыдущем примере векторы положения, соответствующие преобразованиям \mathbf{Z} , ${}^Z T_6$, ${}^{T_6} \mathbf{E}$, \mathbf{B} и ${}^B \mathbf{G}$, равны $[a \ 0 \ 0 \ 1]^T$, $[0 \ b \ c \ 1]^T$, $[0 \ 0 \ -d \ 1]$, $[e \ d \ 0 \ 1]^T$ и $[h_1 \ h_2 \ h_3 \ 1]^T$ соответственно. Найти выражения для ${}^Z T_6$ и ${}^B \mathbf{G}$ (рис. 2.5.6).

Решение. Преобразование, соответствующее \mathbf{Z} , имеет вид

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^Z T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.5.46)$$

$${}^{T_6} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.5.47)$$

$${}^B G = B^{-1} Z {}^Z T_6^{T_6} E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 1 & 0 & -f \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^Z T_6^{T_6} E. \quad (2.5.48)$$

Окончательно

$${}^B G = B^{-1} Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a-e \\ 0 & 1 & 0 & -f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a-e \\ 0 & 1 & 0 & b-f \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^B G. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.5.49)$$

Пример 2.5.9 ■

Показать, что матрица, обратная матрице преобразования общего вида без элементов перспективной проекции, т. е.

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5.50)$$

имеет вид

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p \cdot n \\ o_x & o_y & o_z & -p \cdot o \\ a_x & a_y & a_z & -p \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5.51)$$

где $p \cdot n = p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z$ — скалярное произведение векторов.

Решение. Получим произведение $T^{-1}T$:

$$T^{-1}T = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p \cdot n \\ o_x & o_y & o_z & -p \cdot o \\ a_x & a_y & a_z & -p \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5.52)$$

$$T^{-1}T = \begin{bmatrix} n \cdot n & n \cdot o & n \cdot a & n \cdot p - p \cdot n \\ o \cdot n & o \cdot o & o \cdot a & o \cdot p - p \cdot o \\ a \cdot a & a \cdot o & a \cdot a & a \cdot p - p \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что соответствует предположению. ■ ■

Преобразования растяжения в общем виде имеют форму

$$H = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5.53)$$

что дает **растяжение** или **сжатие** координат вектора. Например,

$$Hx = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.54)$$

Заметим, что при этом куб может стать прямоугольным параллелепипедом.

Масштабирующие преобразования, с другой стороны, сжимают или растягивают координаты одинаковым образом. Для

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (2.5.55)$$

$$Hx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x/s \\ y/s \\ z/s \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5.56)$$

При этом куб становится другим кубом либо большего ($0 < s < 1$), либо меньшего ($s > 1$) размера, чем первоначальный.

2.6. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ СОЧЛЕНЕНИЙ МАНИПУЛЯЦИОННОГО РОБОТА

Манипулятор состоит из набора звеньев, соединенных при помощи набора сочленений. Однородные преобразования по отношению к локальным системам координат сочленений называются **A**-матрицами (т. е. преобразования Денавита — Хартенберга). Пусть A_1 описывает положение и ориентацию первого

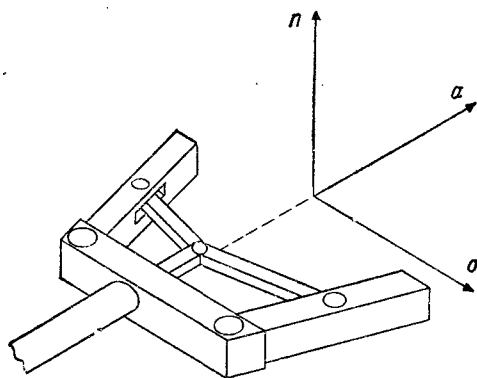


Рис. 2.6.1. Ориентация схвата и его системы координат. a — вектор подхода; o — вектор ориентации; n — вектор нормали.

звена, A_2 — второго звена, A_3 — третьего и т. д. в системе координат основания. Тогда положение и ориентация n -го звена в системе координат основания будут ¹⁾

$$T_n = A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n. \quad (2.6.1)$$

Произведения **A**-матриц называются **T**-матрицами. T_6 — преобразование, относящееся к схвату, такое, что начало системы координат схвата имеет вектор положения $p \equiv [p_x p_y p_z]^T$. С началом координат связана декартова прямоугольная система координат, ориентация которой определяет ориентацию схвата (рис. 2.6.1). Заметим, что a , o и n образуют правостороннюю

¹⁾ Формула (2.6.1) справедлива, если A_i — матрица, описывающая положение и ориентацию i -го звена в системе координат $(i-1)$ -го звена, а не в системе координат основания; см. также (2.10.10). — Прим. ред.

систему координат, т. е. $a \times o = n$, $o \times n = a$ и $n \times a = o$. Заметим, что в этом случае

$$T_6 \equiv \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6.2)$$

Аналогично для системы обобщенных координат любого звена i направление звена в сочленении — это направление вектора подхода a_i , направление относительного поворота звеньев — направление вектора o_i (вектор ориентации) и единичный вектор нормали n_i образует правостороннюю систему с o_i и a_i

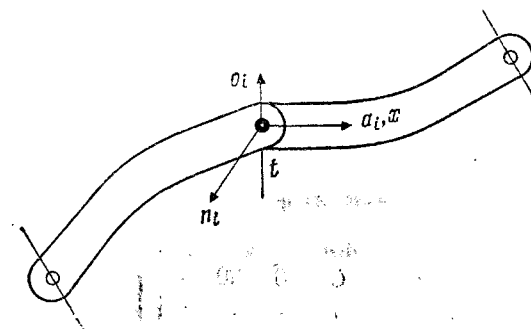


Рис. 2.6.2. Система координат i -го сочленения робота.

(рис. 2.6.2). Опять вектор положения i -го сочленения в системе координат основания равен p_i , а преобразование T_i , соответствующее этому звену, имеет вид

$$T_i = \begin{bmatrix} n_{ix} & o_{ix} & a_{ix} & p_{ix} \\ n_{iy} & o_{iy} & a_{iy} & p_{iy} \\ n_{iz} & o_{iz} & a_{iz} & p_{iz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6.3)$$

2.7. ЭЙЛЕРОВЫ УГЛЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть даны системы координат xyz и uvw . Повернем вторую систему относительно оси z или w на угол φ (рис. 2.7.1). Затем повернем ее относительно оси v на угол θ и относительно оси

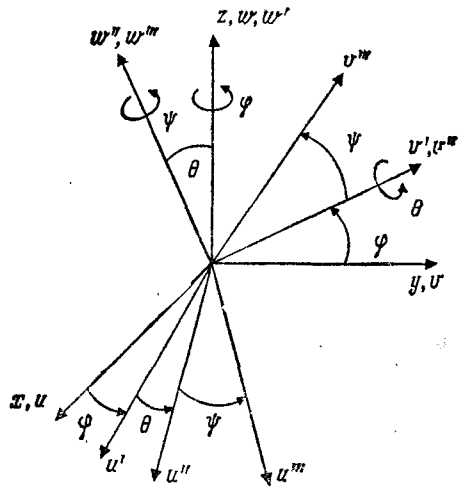


Рис. 2.7.1. Геометрическое описание углов Эйлера.

x на угол ψ , чтобы получить комбинированное преобразование Euler (φ, θ, ψ) , т. е.

$$\text{Euler}(\varphi, \theta, \psi) = R(z, \varphi) R(y, \theta) R(x, \psi), \text{ или } (2.7.1)$$

Euler $(\varphi, \theta, \psi) =$

$$= \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7.2)$$

Окончательно

Euler $(\varphi, \theta, \psi) =$

$$= \begin{bmatrix} C\varphi & C\varphi S\theta S\psi - S\varphi C\psi & C\varphi S\theta C\psi + S\varphi S\psi & 0 \\ S\varphi C\theta & S\varphi S\theta S\psi + C\varphi C\psi & S\varphi S\theta C\psi - C\varphi S\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7.3)$$

2.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРАЩЕНИЯ — КАЧАНИЯ

Пусть дана система координат xuz (рис. 2.8.1), связанная со схватом. Повернем ее сначала относительно оси z на угол φ , затем относительно оси y на угол θ и, наконец, относительно

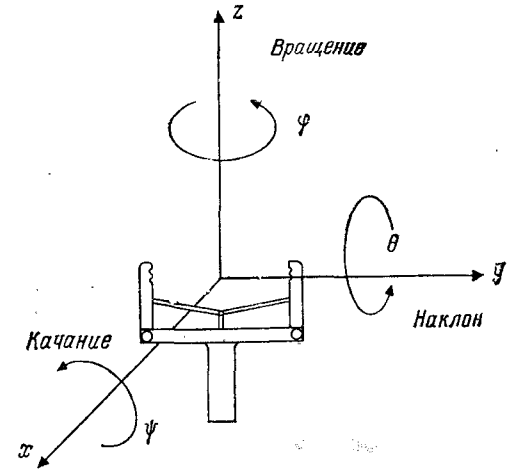


Рис. 2.8.1. Углы вращения, наклона и качания (RPY).

оси x на угол ψ . Тогда комбинированное преобразование вращения — качания будет иметь вид

$$\text{RPY}(\varphi, \theta, \psi) = R(z, \varphi) R(y, \theta) R(x, \psi). \quad (2.8.1)$$

Следовательно, получено выражение, в основном подобное (2.7.2).

2.9. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ БАЗОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Базовая матрица переноса имеет вид

$$T_{\text{переноса}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.9.1)$$

так как

$$T_{\text{переноса}} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9.2)$$

Базовое преобразование масштабирования имеет вид

$$T_{\text{масштаб}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix}, \quad (2.9.3)$$

такой, что $T_{\text{масштаб}}x = (1/S)x = S^{-1}x$, т. е.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ S \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} S^{-1}x \\ S^{-1}y \\ S^{-1}z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Базовым перспективным преобразованием является

$$T_{\text{перспект}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.9.4)$$

такое, что

$$T_{\text{перспект}}x = (f \cdot x)^{-1}x, \quad \text{т. е.} \quad (2.9.5)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 + ax + by + cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ (f \cdot x) \end{bmatrix} \quad (2.9.6)$$

(что и требовалось доказать),

где f — перспективный вектор-строка, $f \equiv [a \ b \ c \ 1]$.

Пример 2.9.1 ■

Пара точек $p_1 = [1 \ 2 \ 1]^T$ и $p_2 = [2 \ 3 \ 4]^T$ переносится вдоль осей x и z на 3 и -2 единицы соответственно. Определить их новые положения по отношению к системе координат x_{yz} .

Решение. Однородное преобразование, соответствующее данному, имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.9.7)$$

новые положения точек p_1 и p_2 равны соответственно

$$p_{1 \ x_{yz}} = H p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$p_{2 \ x_{yz}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.9.8)$$

Пример 2.9.2 ■

Определить однородное преобразование, соответствующее вращению относительно оси ox на угол θ и последующему переносу по оси ow на a единиц (рис. 2.9.1).

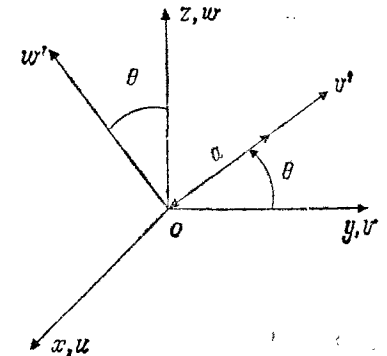


Рис. 2.9.1. Преобразование вращения — переноса.

Решение. По первому методу

$$T = T(u, a)R(x, \theta), \quad (2.9.9)$$

$$T = T(y, aC\theta)T(z, aS\theta)R(x, \theta) \quad (2.9.10)$$

и

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & aS\theta \\ 0 & 0 & 1 & aC\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & aC\theta \\ 0 & S\theta & C\theta & aS\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9.11)$$

По второму методу $T = R(x, \theta) T(v, a)$; следовательно,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & aC\theta \\ 0 & S\theta & C\theta & aS\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.9.12)$$

Пример 2.9.3

Найти однородное преобразование, соответствующее вращению на угол ψ относительно оси x , за которым последовательно следуют перенос на a единиц вдоль оси x , перенос на b единиц вдоль оси z , вращение на угол θ относительно оси z .

Решение. В этом случае

$$T = R(z, \theta) T(z, b) T(x, a) R(x, \psi). \quad (2.9.13)$$

По второму методу $T = R(x, \theta) T(v, b)$, тогда

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -C\psi S\theta & S\psi S\theta & aC\theta \\ S\theta & C\psi C\theta & -S\psi C\theta & aS\theta \\ 0 & S\psi & C\psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.9.14)$$

2.10. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЕНАВИТА — ХАРТЕНБЕРГА

Как определено ранее, исполнительный механизм робота общего вида может рассматриваться как кинематическая цепь, связанная в сочленениях, движениями которых могут управлять соответствующие приводы. Соединения бывают трех видов: поворотные (вращательные), призматические (телескопические), комбинации этих двух типов. На рис. 2.10.1 изображено множество применяемых в роботах сочленений.

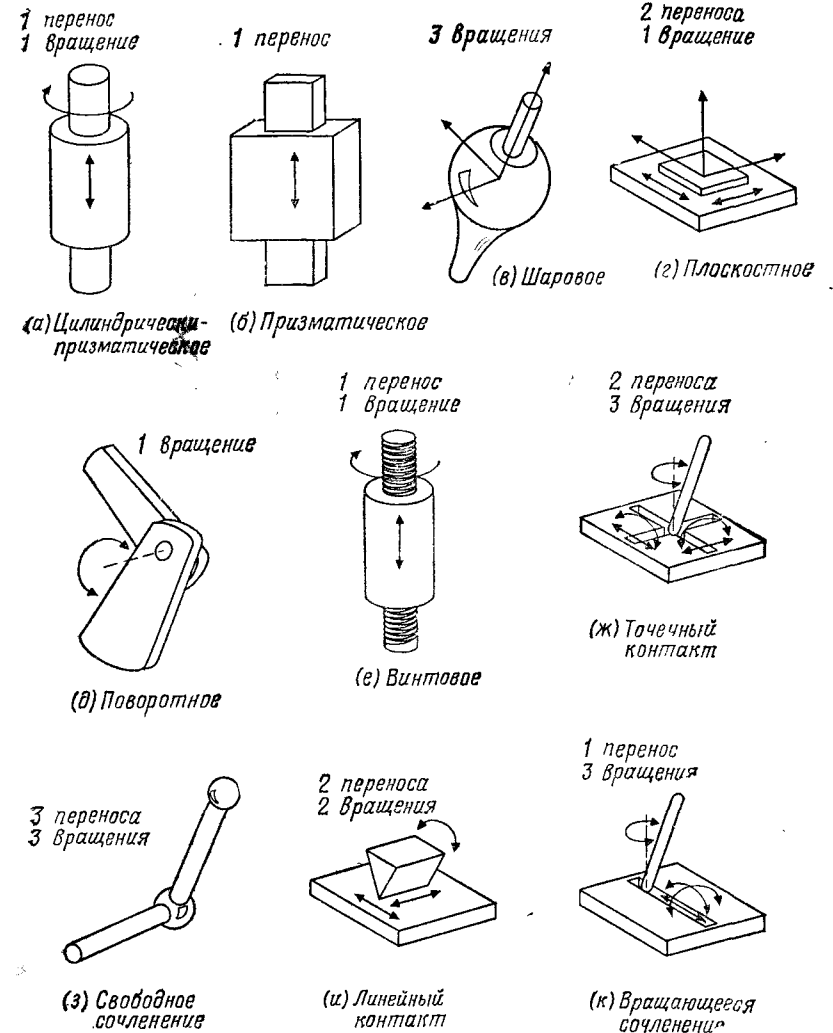


Рис. 2.10.1. Общая классификация сочленений роботов.

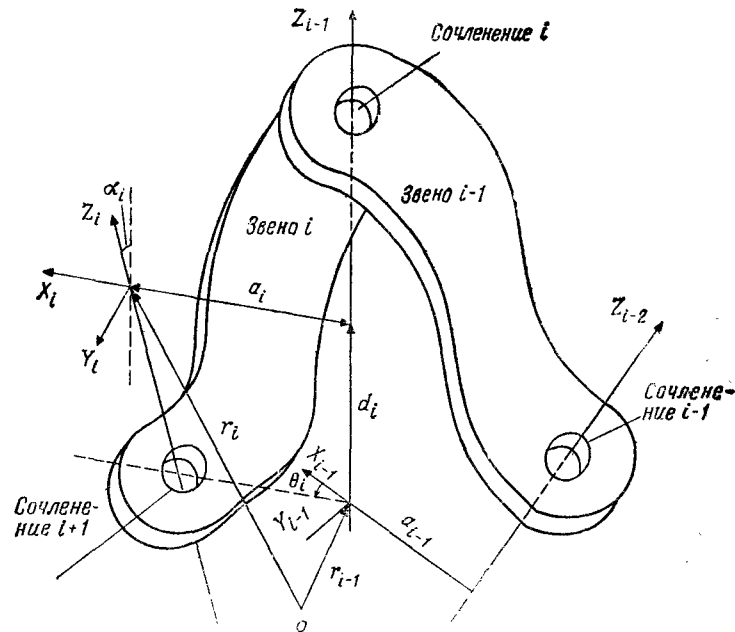


Рис. 2.10.2. Система координат звена общего вида.

Денавитом и Хартенбергом [2] было определено понятие сочленения «низшая пара», образуемого контактирующими поверхностями. В этом смысле сочленениями «высшей пары» являются сочленения, образованные точечными или линейными контактами между двумя телами. Так, на рис. 2.10.1 сочленения (а), (б), (в), (г), (д) и (е) являются низшими парами, а сочленения (ж), (з), (и) и (к) — высшими парами. Теперь рассмотрим пару соседних звеньев робота, связанных нижней парой, позволяющей совершать вращательное или поступательное движение, т. е. как в случае (а) на рис. 2.10.1 (рис. 2.10.2).

Координаты выбираются следующим образом.

1. Ось координат z_i направлена вдоль оси перемещения или вращения $(i+1)$ -го сочленения.
2. Ось x_i перпендикулярна осям z_i и z_{i-1} и направлена от оси z_{i-1} (так, чтобы образовать правостороннюю систему координат либо с z_i и z_{i-1} , либо с z_{i-1} и z_i).
3. Ось координат y_i выбирается так, чтобы система координат $x_i y_i z_i$ была правосторонней.
4. Расстояние между двумя общими перпендикулярами a_i и a_{i-1} называется звенным расстоянием d_i .

5. Длина перпендикуляра a_i является минимальным расстоянием между осями z_i и z_{i-1} . Если оно равно нулю, то направление вектора a_i становится произвольным. Заметим, что a_i также имеет смысл длины i -го звена.

6. Ориентация оси x_i относительно оси x_{i-1} называется θ_i или компонентой вектора углов в сочленениях.

7. Ориентация оси z_i относительно оси z_{i-1} называется α_i или компонентой вектора углов скручивания.

Четыре параметра d_i , θ_i , a_i и α_i составляют минимальный набор, необходимый для описания кинематической конфигурации каждого звена исполнительного механизма робота. Заметим, что d_i — звенное расстояние, θ_i — угол в сочленении, a_i — длина звена, α_i — угол скручивания звена¹⁾. Для плоскостного поворотного сочленения в общем случае d_i , a_i и α_i являются константами, а θ_i меняется при повороте звена i относительно оси i -го сочленения. С другой стороны, для призматического сочленения θ_i , a_i и α_i — константы, а d_i изменяется при поступательном движении звена i вдоль оси i -го сочленения. Таким образом, в обоих случаях a_i и α_i обычно неизменны и зависят от конструкции робота. Например, если оси соседних сочленений пересекаются, то длина звена a равна 0 (как в случае с призматическим сочленением).

Если система координат Денавита — Хартенберга для каждого звена описана, то можно легко получить матрицу однородного преобразования в i -й системе координат. В соответствии с рис. 2.10.2 видно, что точка r_i , описанная в i -й системе координат, может быть описана в $(i-1)$ -й системе координат как r_{i-1} посредством последовательного выполнения следующих преобразований.

1. Поворот относительно оси z_{i-1} на угол θ_i , чтобы оси x_{i-1} и x_i стали параллельны: $\mathbf{R}(z_{i-1}, \theta_i)$.
2. Перенос вдоль оси z_{i-1} на расстояние d_i , чтобы совместить оси x_{i-1} и x_i : $\mathbf{T}(z_{i-1}, d_i)$.
3. Перенос вдоль оси x_i на расстояние a_i для совмещения двух начал систем координат: $\mathbf{T}(x_i, a_i)$.
4. Поворот относительно оси x_i на угол α_i для полного совпадения двух систем координат: $\mathbf{R}(x_i, \alpha_i)$.

Таким образом, полное преобразование, связывающее i -е звено с $(i-1)$ -м или i -е сочленение с $(i-1)$ -м, имеет вид

$$\mathbf{H}_{i-1}^i = \mathbf{T}_{i-1}^i = \mathbf{A}_{i-1}^i = \mathbf{R}(z_{i-1}, \theta_i) \mathbf{T}(z_{i-1}, d_i) \mathbf{T}(x_i, a_i) \mathbf{R}(x_i, \alpha_i) \quad (2.10.1)$$

¹⁾ Параметры d_i и a_i , вообще говоря, могут быть отрицательными. — Прим. ред.

или

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{i-1}^i &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10.2)
 \end{aligned}$$

Мы часто будем опускать индекс $i-1$ и называть матрицу \mathbf{A}_{i-1}^i просто матрицей \mathbf{A}_i , относящейся к i -му сочленению или звену. Заметим, что в общем случае \mathbf{A}_i имеет вид

$$\mathbf{A}_i^i = \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} n_{xi} & o_{xi} & a_{xi} & p_{xi} \\ n_{yi} & o_{yi} & a_{yi} & p_{yi} \\ n_{zi} & o_{zi} & a_{zi} & p_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10.3)$$

Матрица, обратная к ней, это матрица \mathbf{A}_i^{-1} , такая, что

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \mathbf{A}_i^{-1} = \begin{bmatrix} n_{xi} & n_{yi} & n_{zi} & -\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} \\ o_{xi} & o_{yi} & o_{zi} & -\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{p} \\ a_{xi} & a_{yi} & a_{zi} & -\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10.4)$$

Далее, если \mathbf{r}_i — однородный вектор i -го сочленения и \mathbf{r}_{i-1} — однородный вектор $(i-1)$ -го сочленения, очевидно, что

$$\mathbf{r}_{i-1} = \mathbf{A}_{i-1}^i \mathbf{r}_i, \quad \text{где} \quad (2.10.5)$$

$$\mathbf{r}_i = [x_i y_i z_i 1]^T, \quad (2.10.6)$$

$$\mathbf{r}_{i-1} = [x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1} 1]^T. \quad (2.10.7)$$

Чтобы ввести систему координат звена, может быть применен следующий алгоритм.

Алгоритм 2.10.1. Эта процедура полностью назначает и описывает системы координат звеньев, совместимые с преобразованиями Денавита — Хартенберга для данного исполнительного механизма робота с n степенями подвижности. Соседние звенья могут быть связаны друг с другом кинематически и описаны посредством матриц размера 4×4 однородных преобразований. Первая система координат, связанная с основанием, обозначена как однородная система $[x_0 y_0 z_0 1]^T$ в основании. Начало координат этой системы принято за 0-е сочленение.

1. Определить базовые координаты $[x_0 y_0 z_0]$ так, чтобы ось z_0 совпадала с осью движения первого сочленения.

2. Прodelать следующие пункты последовательности для каждого $i = 1, 2, \dots, n$.

3. Направить все оси z_i параллельно осям поступательного движения или вращения $(i+1)$ -го сочленения.

4. Задать начало i -й системы координат либо на пересечении осей z_i и z_{i-1} , либо в точке пересечения оси z_i с общей нормалью к осям z_i и z_{i-1} .

5. Задать ось x_i в каждом i -м сочленении либо в соответствии с соотношением $x_i = \pm (z_{i-1} \times z_i)$, либо вдоль общей нормали к осям z_{i-1} и z_i , если они параллельны.

6. Задать ось y_i из соотношения $y_i = (z_i \times x_i)$ для завершения правосторонней системы координат.

7. Найти d_i как расстояние от начала координат $(i-1)$ -й системы координат до точки пересечения осей z_{i-1} и x_i .

8. Найти a_i как расстояние от точки пересечения оси z_{i-1} с общей нормалью к осям z_{i-1} и z_i до начала i -й системы координат.

9. Найти θ_i как угол поворота от оси x_{i-1} до оси x_i .

10. Найти α_i как угол поворота от оси z_{i-1} до оси z_i относительно x_i .

Обращение с матрицами \mathbf{T}_n^6 . Описание конечного звена манипулятора по отношению к системе координат звена $n-1$ через однородные преобразования имеет вид

$$\mathbf{T}_{n-1}^6 = \mathbf{A}_n \mathbf{A}_{n+1} \dots \mathbf{A}_6. \quad (2.10.8)$$

Описание конечной точки некоторого i -го звена по отношению к системе координат j -го звена имеет вид

$$\mathbf{T}_j^i = \mathbf{A}_{j+1} \mathbf{A}_{j+2} \dots \mathbf{A}_i, \quad j < i. \quad (2.10.9)$$

Вообще система координат шестого звена, связано с системой координат основания следующим преобразованием:

$$\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6. \quad (2.10.10)$$

Если манипулятор описывается в эталонной системе координат преобразованием Z и имеется присоединенный к конечному звену инструмент, положение которого описывается преобразованием E по отношению к системе координат последнего звена, то из рис. 2.10.3 очевидно, что положение и ориентация инстру-

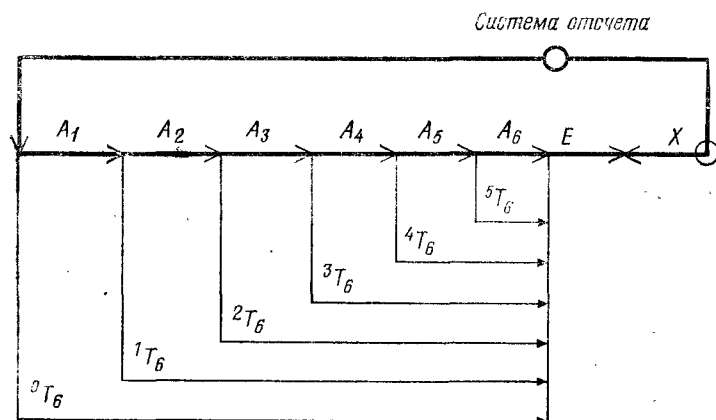


Рис. 2.10.3. Граф преобразования для инструмента.

мента по отношению к системе координат основания описываются как $X = ZT_6E$. Таким образом,

$$T_6 = Z^{-1}XE^{-1}. \quad (2.10.11)$$

2.11. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ

Приравняв правые части соотношений (2.10.10) и (2.10.11), получим кинематическое соотношение для манипулятора с инструментом с шестью степенями свободы:

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6 = A^{-1}XE^{-1}. \quad (2.11.1)$$

Если заданы Z , X и E , то можно получить 16 уравнений относительно не более чем шести неизвестных параметров сочленений. В связи с тем что последние строки всех рассматриваемых преобразований Денавита — Хартенберга известны, мы имеем дело с 12 уравнениями с 6 неизвестными. Заметим также, что выполняются следующие уравнения:

$$n \cdot n = o \cdot o = a \cdot a = 1 \quad (2.11.2)$$

$$n \times o = a. \quad (2.11.3)$$

Итак, в действительности мы имеем дело с шестью независимыми уравнениями относительно 6 неизвестных независимых переменных перемещений сочленений.

В случае прямой задачи кинематики нужно вычислить матрицы Денавита — Хартенберга и в конечном счете получить выражение для матрицы преобразования конечного звена T_6^0 . Ниже мы детально рассмотрим геометрические соотношения для роботов и получим соответствующие уравнения для прямой задачи кинематики. Эти уравнения используются в дальнейшем при решении обратной задачи кинематики.

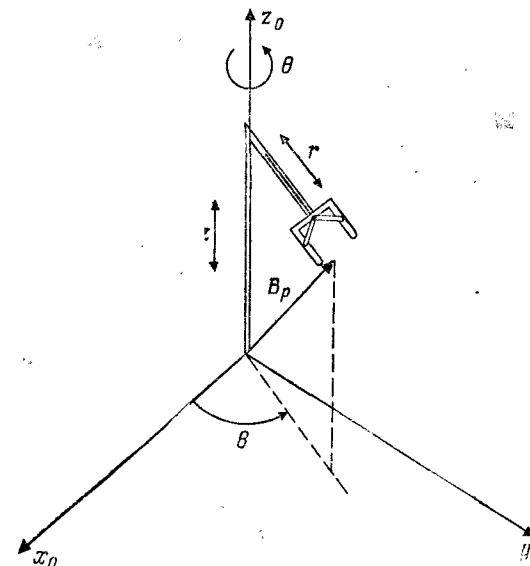


Рис. 2.11.1. Простой робот, работающий в цилиндрической полярной системе координат.

Прежде чем продолжить изложение, сформулируем прямую задачу кинематики в робототехнике.

По заданному n -мерному вектору изменяемых параметров сочленений, таких, как углы или поступательные перемещения, в форме $\theta_i = [\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots \theta_n]$ получить соответствующую матрицу положения T_6^n , связанную с положением и ориентацией схвата робота.

Пример 2.11.1 ■

Решить прямую задачу кинематики для простого робота, работающего в цилиндрической системе координат (рис. 2.11.1).

Решение. Отметим, что в этом случае

$$T_0^3 = \text{Trans}(z_0, z_1) \text{Rot}(z_0, \theta) \text{Trans}(u, r) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.4)$$

или окончательно

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & rC\theta \\ S\theta & C\theta & 0 & rS\theta \\ 0 & 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.11.5)$$

Пример 2.11.2 ■

Решить прямую задачу кинематики для простого робота, работающего в сферической системе координат (рис. 2.11.2).

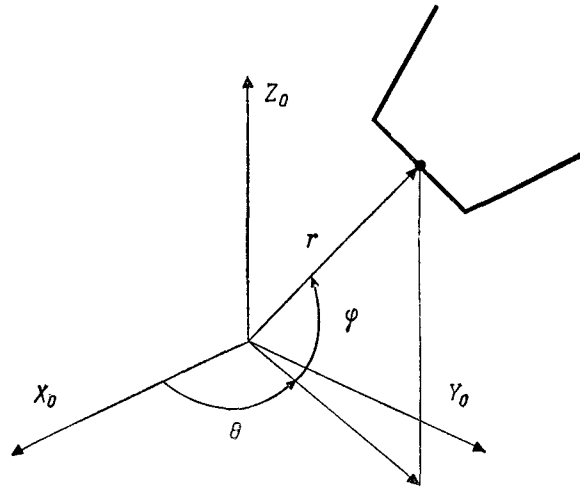


Рис. 2.11.2. Простой робот, работающий в сферической системе координат.

Решение. Отметим, что в этом случае

$$T_0^3 = \text{Rot}(z_0, \theta) \text{Rot}(v, -\varphi) \text{Trans}(u, r) =$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & -S\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S\varphi & 0 & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11.6)$$

или окончательно

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} C\theta C\varphi & -S\theta & -C\theta S\varphi & rC\theta C\varphi \\ S\theta C\varphi & C\theta & -S\theta S\varphi & rS\theta C\varphi \\ S\varphi & 0 & C\varphi & rS\varphi \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.11.7)$$

Чтобы перейти к матрицам A_i и T , составим сначала табл. 2.11.1 параметров сочленений.

Таблица 2.11.1. Параметры сочленений и звеньев для робота в цилиндрической системе координат

Звено	Переменная	α_i	a_i	d_i	$S\alpha$	$C\alpha$
1	θ_1	$\alpha_1 = -90^\circ$	$a_1 = 0$	$d_1 = 0$	-1	0
2	θ_2	$\alpha_2 = 90^\circ$	$a_2 = 0$	d_2	1	0
3	d_3	$\alpha_3 = 0^\circ$	$a_3 = 0$	d_3	0	1
4	θ_3	$\alpha_4 = 90^\circ$	$a_4 = 0$	$d_4 = 0$	-1	0
5	θ_5	$\alpha_5 = 90^\circ$	$a_5 = 0$	$d_5 = 0$	1	0
6	θ_6	$\alpha_6 = 0^\circ$	$a_6 = 0$	$d_6 = 0$	0	1

Пример 2.11.3 ■

Решить прямую задачу кинематики для схвата, выполняющего вращение и качания в перпендикулярных плоскостях, и схвата эйлерова типа.

Решение. См. рис. 2.7.1 и 2.8.1. Полученные выражения имеют одинаковый вид, а именно:

$$\text{RPY}(\varphi, \theta, \psi) = \text{Euler}(\varphi, \theta, \psi) =$$

$$= \begin{bmatrix} C\varphi C\theta & C\varphi S\theta S\psi - S\varphi C\psi & C\varphi S\theta C\psi + S\theta S\psi & 0 \\ S\varphi C\theta & S\varphi S\theta S\psi + C\varphi C\psi & S\varphi S\theta C\psi - C\theta S\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.11.8)$$

Пример 2.11.4 ■

Получить выражение для матриц преобразования для робота, работающего в цилиндрической системе координат (рис. 2.11.3).

Решение. Этот робот, работающий в цилиндрической полярной системе координат (Stanford arm), может быть описан в системах координат сочленений, показанных на рис. 2.11.3. Заметим, что в роботе предусмотрены одно телескопическое движение и пять вращательных. Кроме того, вращательные движения до и после качательного движения схвата имитируют второе качательное движение в плоскости, перпендикулярной первому.

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.9)$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.10)$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.11)$$

$$A_3^4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.12)$$

$$A_4^5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.13)$$

$$A_5^6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11.14)$$

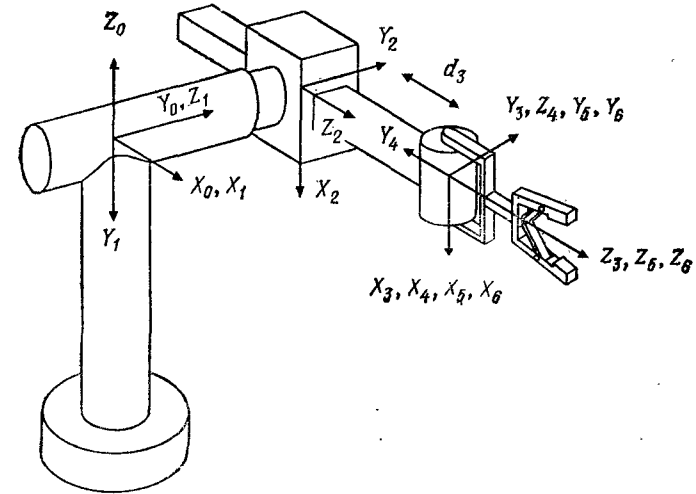


Рис. 2.11.3. Конструкция манипулятора, работающего в цилиндрической системе координат.

Для того чтобы получить Т-матрицы, нужно найти произведения матриц А, а именно:

$$T_i^j = A_i A_{i+1} \dots A_j, \quad (2.11.15)$$

$$T_5^6 = A_5^6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.16)$$

$$T_4^6 = A_4^5 A_5^6 = \begin{bmatrix} C_5 C_6 & -C_5 S_6 & S_5 & 0 \\ S_5 C_6 & -S_5 S_6 & -C_5 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.17)$$

$$T_3^6 = A_3^4 A_4^5 A_5^6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & 0 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & 0 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.18)$$

$$\mathbf{T}_2^6 = \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_3^4 \mathbf{A}_4^5 \mathbf{A}_5^6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & 0 \\ S_1 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & 0 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.19)$$

$$\mathbf{T}_1^6 = \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_3^4 \mathbf{A}_4^5 \mathbf{A}_5^6 = \begin{bmatrix} C_2(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6 & -C_2(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_2 S_5 S_6 & C_2 C_4 S_5 + S_2 C_5 & S_2 d_3 \\ S_2(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_2 S_5 C_6 & -S_2(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) - C_2 S_5 S_6 & S_2 C_4 S_5 - C_2 C_5 & -C_2 d_3 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11.20)$$

и, наконец,

$$\mathbf{T}_0^6 = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_3^4 \mathbf{A}_4^5 \mathbf{A}_5^6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad (2.11.21)$$

$$n_x = C_1 [C_2 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 C_6), \quad (2.11.22)$$

$$n_y = S_1 [C_2 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6] + C_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 C_6), \quad (2.11.23)$$

$$n_z = -S_2 (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - C_2 S_5 C_6, \quad (2.11.24)$$

$$o_x = C_1 [-C_2 (C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6) - S_2 S_5 S_6] - S_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6), \quad (2.11.25)$$

$$o_y = S_1 [-C_2 (C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6) - S_2 S_5 S_6] + C_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6), \quad (2.11.26)$$

$$o_z = S_2 (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + C_2 S_5 S_6, \quad (2.11.27)$$

$$a_x = C_1 (C_2 C_4 S_5 + S_2 C_5) - S_1 S_4 S_5, \quad (2.11.28)$$

$$a_y = S_1 (C_2 C_4 S_5 + S_2 C_5) + C_1 S_4 S_5, \quad (2.11.29)$$

$$a_z = -S_2 C_4 S_5 + C_2 C_5, \quad (2.11.30)$$

$$p_x = C_1 S_2 d_3 - S_1 d_2, \quad (2.11.31)$$

$$p_y = S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2, \quad (2.11.32)$$

$$p_z = C_2 d_3. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.11.33)$$

Позднее в этой главе мы используем приведенные соотношения для получения решений обратной задачи кинематики для манипулятора, работающего в цилиндрической полярной системе координат.

Пример 2.11.5 ■

Для робота модели MiniMover Microbot, изображенного на рис. 2.11.4, построить (а) множество систем координат, (б) таблицу обобщенных параметров и (в) получить элементы матрицы \mathbf{T}_0^5 .

Решение.

(а) Совокупность систем координат робота показана на рис. 2.11.5.

(б) Соответствующие обобщенные параметры представлены в табл. 2.11.2.

Таблица 2.11.2. Параметры сочленений для робота MiniMover Microbot

Сочленение	θ_i	a_i	z_i (дюймы)	d_i (дюймы)
$i=1$	θ_1	-90°	0	8.1
$i=2$	θ_2	0°	7	0
$i=3$	θ_3	0°	7	0
$i=4$	θ_4	90°	0	0
$i=5$	θ_5	0°	0	3.8

(в) Представление Денавита — Хартенберга \mathbf{A}_{i-1}^i принимает вид

$$\mathbf{A}_{i-1}^i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -Ca_i S\theta_i & Sa_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & Ca_i C\theta_i & -Sa_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & Sa_i & Ca_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11.34)$$

и более подробно

$$\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 7C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & 7S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.11.35)$$

$$\mathbf{A}_2^3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 7C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & 7S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3^4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.11.36)$$

$$\mathbf{A}_4^5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_0^5 = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_3^4 \mathbf{A}_4^5. \quad (2.11.37)$$

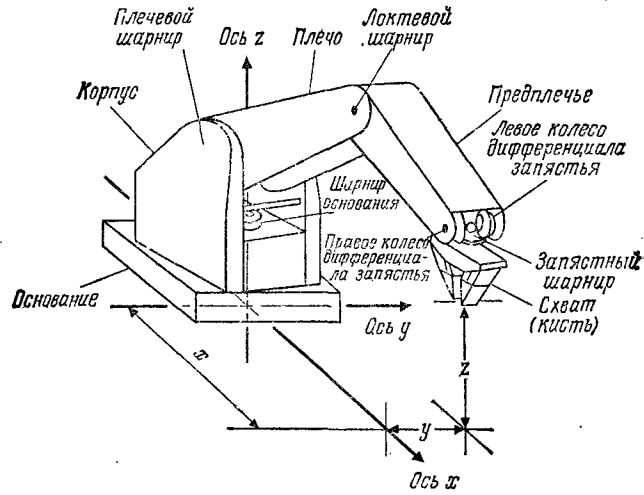


Рис. 2.11.4. Конфигурация робота MiniMover Microbot.

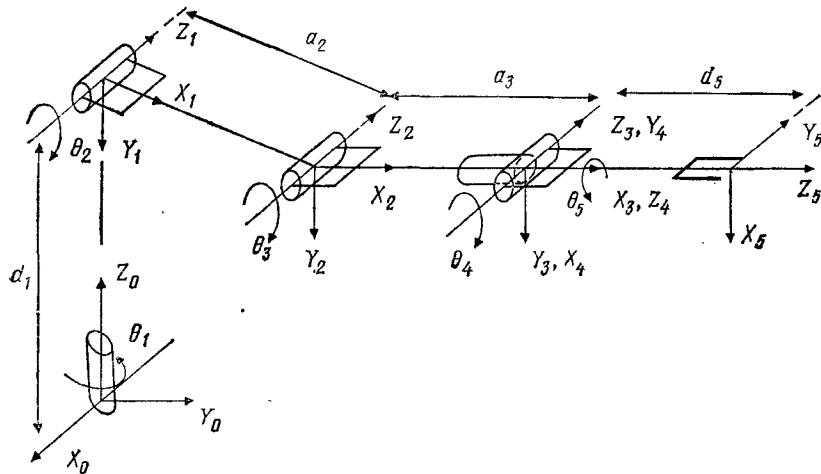


Рис. 2.11.5. Расположение систем координат.

Таким образом, окончательно получаем, что матрица T_0^5 имеет следующие элементы:

$$(T_0^5)_{11} = C_1 C_{23} C_4 C_5 - C_1 S_{23} S_4 C_5 - S_1 S_5, \quad (2.11.38)$$

$$(T_0^5)_{12} = -C_1 C_{23} C_4 S_5 + C_1 S_{23} S_4 S_5 - S_1 C_5, \quad (2.11.39)$$

$$(T_0^5)_{13} = C_1 C_{23} S_4 + C_1 S_{23} C_4, \quad (2.11.40)$$

$$(T_0^5)_{14} = 3.8 C_1 C_{23} S_4 + 3.8 C_1 S_{23} C_4 + 7 C_1 (C_{23} + C_2), \quad (2.11.41)$$

$$(T_0^5)_{21} = S_1 C_{23} C_4 C_5 - S_1 S_{23} S_4 S_5 + C_1 S_5, \quad (2.11.42)$$

$$(T_0^5)_{22} = -S_1 C_{23} C_4 S_5 + S_1 S_{23} S_4 S_5 + C_1 C_5, \quad (2.11.43)$$

$$(T_0^5)_{23} = S_1 C_{23} S_4 + S_1 S_{23} C_4, \quad (2.11.44)$$

$$(T_0^5)_{24} = 3.8 S_1 C_{23} S_4 + 3.8 S_1 S_{23} C_4 + 7 S_1 (C_{23} + C_2), \quad (2.11.45)$$

$$(T_0^5)_{31} = -S_{23} C_4 C_5 - C_{23} S_4 S_5, \quad (2.11.46)$$

$$(T_0^5)_{32} = S_{23} C_4 S_5 + C_{23} S_4 S_5, \quad (2.11.47)$$

$$(T_0^5)_{33} = -S_{23} S_4 + C_{23} C_4, \quad (2.11.48)$$

$$(T_0^5)_{34} = -3.8 S_{23} S_4 + 3.8 C_{23} C_4 + 8.1 - 7(S_{23} + S_2) \quad (2.11.49)$$

и

$$(T_0^5)_{41} = (T_0^5)_{42} = (T_0^5)_{43} = 0, \quad (T_0^5)_{44} = 1. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.11.50)$$

Пример 2.11.6

Рассмотрим манипуляционный робот с шестью степенями свободы общего вида, изображенный на рис. 2.11.6. Манипу-

Таблица 2.11.3. Параметры сочленений для типового манипулятора с шестью степенями подвижности, у которого ось вращения кисти совпадает с осью направления движения

Сочленение	θ_i	α_i	a_i	d_i	$C\alpha_i$	$S\alpha_i$
1	θ_1	-90°	0	d_1	0	-1
2	θ_2	0°	a_2	0	1	0
3	θ_3	0°	a_3	0	1	0
4	θ_4	90°	a_4	0	0	1
5	θ_5	-90°	0	0	0	-1
6	θ_6	0°	0	d_6	1	0

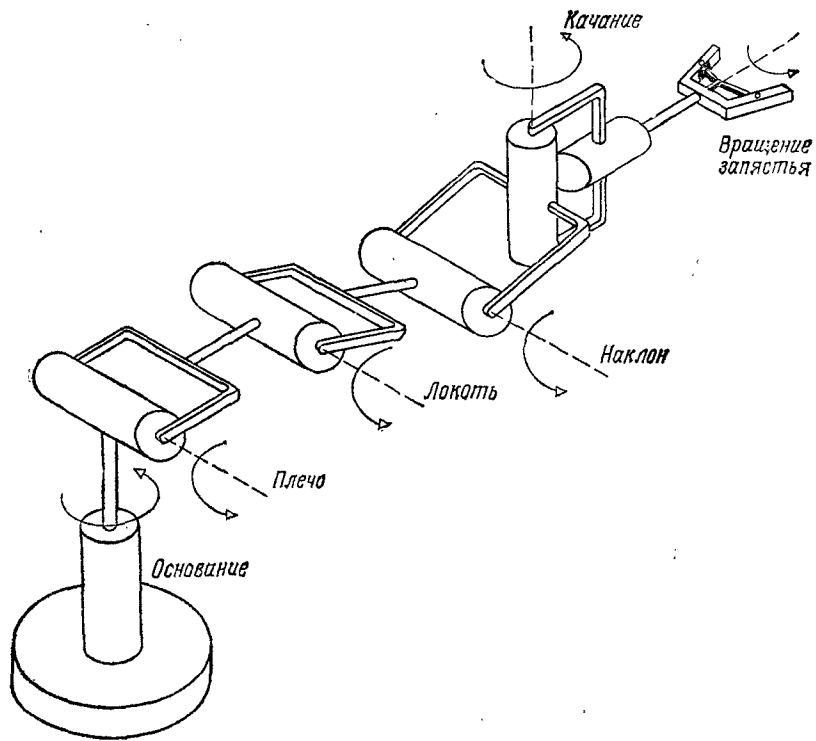


Рис. 2.11.6. Шестистепенный манипулятор общего вида.

лятор имеет подвижное основание, плечо, локоть и кисть (наклон, качание и вращение).

Положим, что в первом варианте этого манипуляционного робота система координат схвата такова, что ось подвижности параллельна оси вращения кисти (рис. 2.11.7). Для второго варианта того же манипуляционного робота мы будем полагать, что ось подвижности перпендикулярна оси вращения кисти (рис. 2.11.8). Для обоих случаев найти преобразования Денавита — Хартенберга, а также T -матрицы.

Решение.

На основании рис. 2.11.7 и алгоритма 2.10.1 можно построить таблицу 2.11.3 обобщенных параметров.

Затем, используя обобщенные преобразования Денавита — Хартенберга, получают матрицы $A_{i-1}^i = A_i$ для i -го

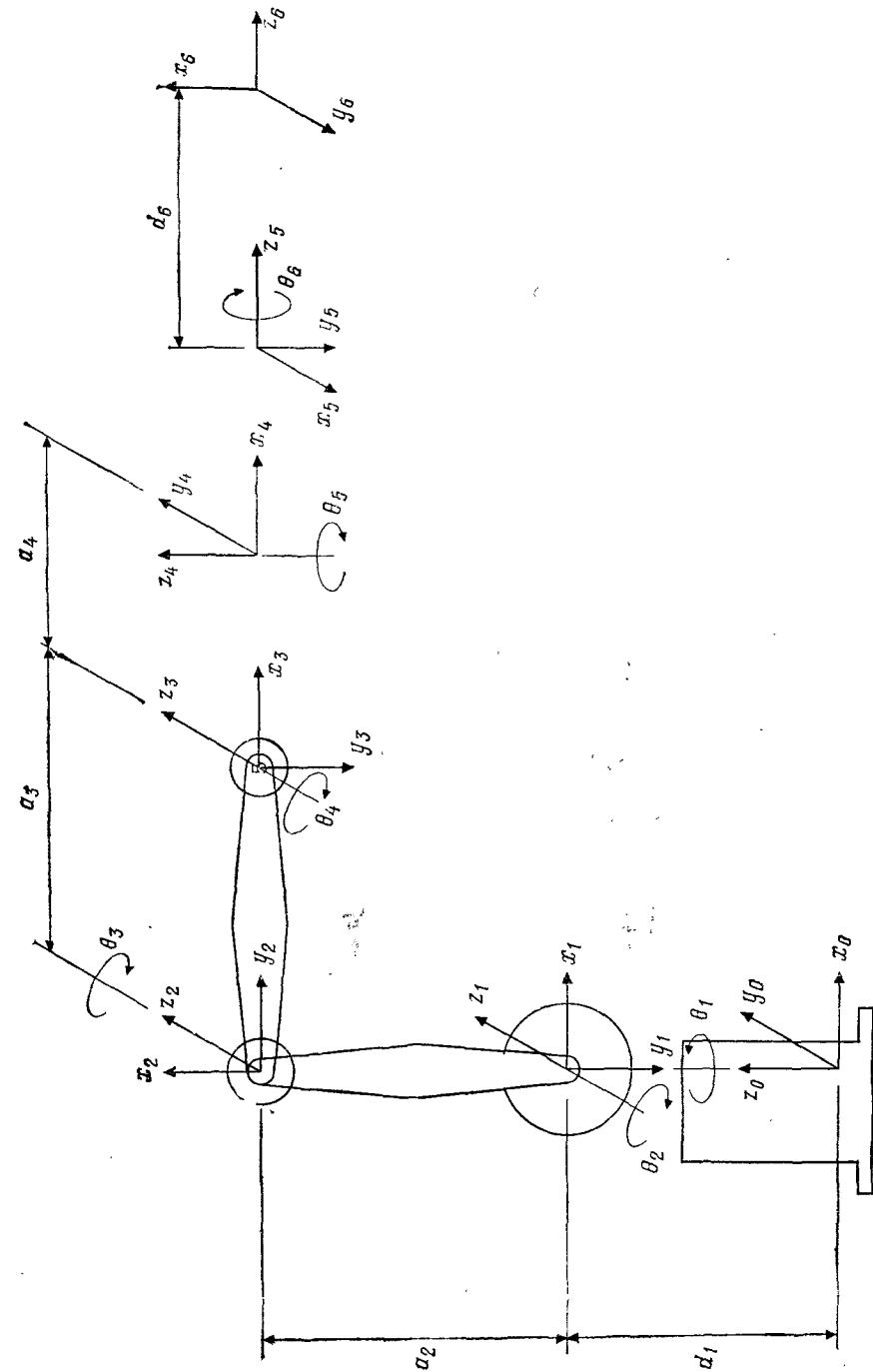


Рис. 2.11.7. Шестистепенный манипулятор общего вида с поворотными сочленениями и схватом первого типа.

сочленения при условии, что

$$A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.51)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.52)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.53)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.54)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & a_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & a_4 S\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.55)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} C\theta_5 & 0 & -S\theta_5 & 0 \\ S\theta_5 & 0 & C\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11.56)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} C\theta_6 & -S\theta_6 & 0 & 0 \\ S\theta_6 & C\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11.57)$$

Заметим, что для робота с шестью степенями свободы Т-преобразование имеет вид

$$T_0^6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6, \quad (2.11.58)$$

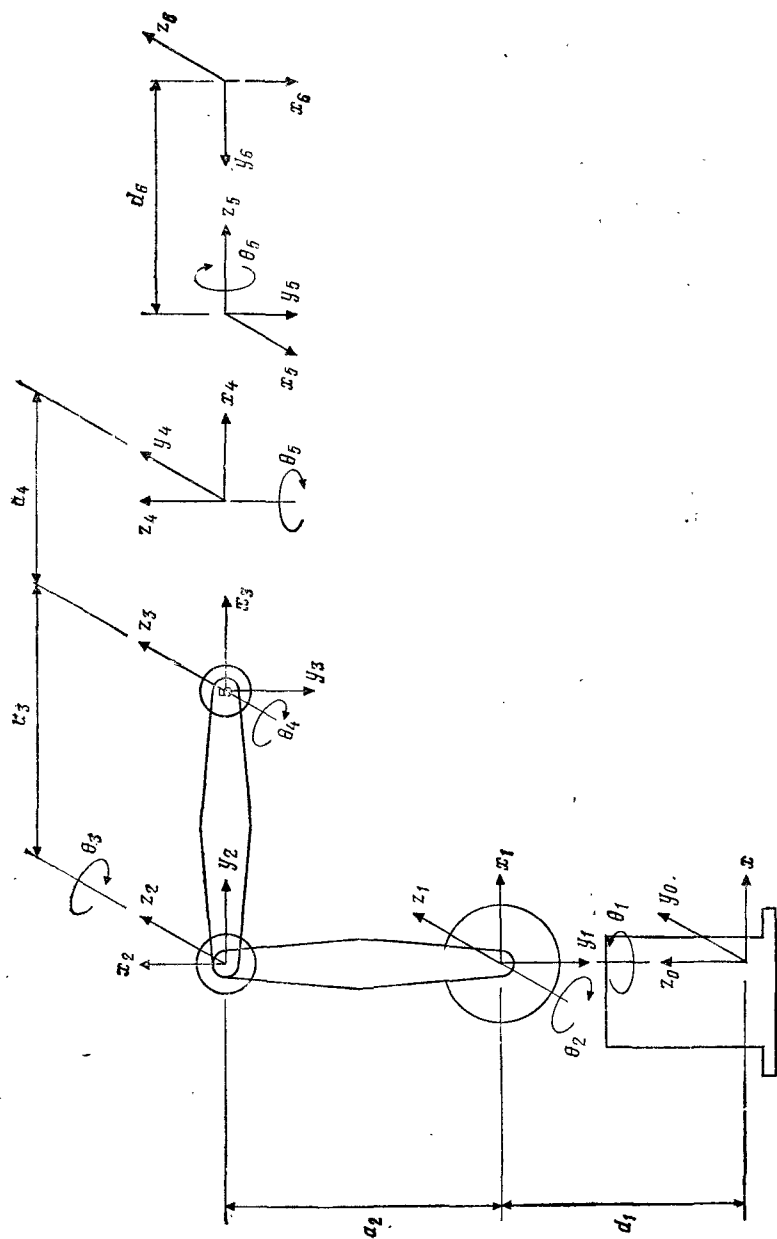


Рис. 2.11.8. Шестистепенный манипулятор общего вида с поворотными сочленениями и хватом второго типа.

где матрица

$$\mathbf{T}_0^6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11.59)$$

полностью известна, тогда как шесть углов $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ и θ_6 являются искомыми неизвестными.

Перемножение матриц от \mathbf{A}_1 до \mathbf{A}_6 и приравнивание результата к \mathbf{T}_0^6 дает следующие 12 уравнений для определения вектора углов в сочленениях $\theta_i \equiv [\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6]^T$:

$$n_x = C_1(C_5 C_6 C_{234} - S_6 S_{234}) - S_1 S_5 C_6, \quad (2.11.60)$$

$$n_y = S_1(C_5 C_6 C_{234} - S_6 S_{234}) + C_1 S_5 C_6, \quad (2.11.61)$$

$$n_z = -C_5 C_6 C_{234} - S_6 C_{234}, \quad (2.11.62)$$

$$o_x = -C_1(C_5 S_6 C_{234} + C_6 S_{234}) + S_1 S_5 S_6, \quad (2.11.63)$$

$$o_y = -S_1(C_5 S_6 C_{234} + C_6 S_{234}) - C_1 S_5 S_6, \quad (2.11.64)$$

$$o_z = S_{234} C_5 S_6 - C_6 C_{234}, \quad (2.11.65)$$

$$a_x = -C_1 S_5 C_{234} - S_1 C_5, \quad (2.11.66)$$

$$a_y = -S_1 S_5 C_{234} + C_1 C_5, \quad (2.11.67)$$

$$a_z = S_{234} S_5, \quad (2.11.68)$$

$$p_x = -C_1(d_6 S_5 C_{234} - a_4 C_{234} - a_3 C_{23} - a_2 C_2) - d_6 S_1 C_5, \quad (2.11.69)$$

$$p_y = -S_1(d_6 S_5 C_{234} - a_4 C_{234} - a_3 C_{23} - a_2 C_2) + d_6 C_1 C_5, \quad (2.11.70)$$

и

$$p_z = d_6 S_5 S_{234} - a_4 S_{234} - a_3 S_{23} - a_2 S_2 + d_1, \quad (2.11.71)$$

где для краткости использованы следующие обозначения:

$$C0_i = C_i, \quad S\theta_i = S_i; \quad (2.11.72)$$

$$C(\theta_i + \theta_j) = C_{ij}, \quad S(\theta_i + \theta_j) = S_{ij}; \quad (2.11.73)$$

$$C(\theta_i + \theta_j + \theta_k) = C_{ijk}, \quad S(\theta_i + \theta_j + \theta_k) = S_{ijk}. \quad (2.11.74)$$

Теперь положим, что ось подвижности схвата перпендикулярна оси вращения кисти. Воспользовавшись рис. 2.11.8 и алгоритмом 2.10.1, можно построить табл. 2.11.4 для обобщенных параметров.

Таблица 2.11.4. Параметры сочленений для другого манипулятора с шестью степенями подвижности, у которого ось вращения кисти перпендикулярна оси направления движения

Сочленение	θ_i	α_i	a_i	d_i	Ca_i	Sa_i
1	θ_1	-90°	0	d_1	0	-1
2	θ_2	0°	a_2	0	1	0
3	θ_3	0°	a_3	0	1	0
4	θ_4	90°	a_4	0	0	-1
5	θ_5	-90°	0	0	0	-1
6	θ_6	-90°	0	d_6	0	-1

На основании табл. 2.11.4 обобщенные преобразования Денавита — Хартенберга или \mathbf{A} -матриц будут такими же, как и ранее, кроме матрицы \mathbf{A}_6 , принимающей вид

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & 0 & -S_6 & 0 \\ S_6 & 0 & C_6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11.75)$$

Теперь рассмотрим обратную задачу кинематики:

$$\mathbf{T}_0^6 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6, \quad (2.11.76)$$

где первые пять \mathbf{A} -матриц имеют вид (2.11.52) — (2.11.57), а последняя — (2.11.75). Матрица \mathbf{T}_0^6 описывается уравнением (2.11.59), и, как и ранее, все элементы \mathbf{T}_0^6 полностью известны.

Перемножение шести приведенных выше матриц и приравнивание результата матрице \mathbf{T}_0^6 дает следующие 12 уравнений для определения вектора углов в сочленениях:

$$n_x = C_1(C_5 C_6 C_{234} - S_6 S_{234}) - S_1 S_5 C_6, \quad (2.11.77)$$

$$n_y = S_1(C_5 C_6 C_{234} - S_6 S_{234}) + C_1 S_5 C_6, \quad (2.11.78)$$

$$n_z = -C_5 C_6 C_{234} - S_6 C_{234}, \quad (2.11.79)$$

$$o_x = C_1 S_5 C_{234} + S_1 C_5, \quad (2.11.80)$$

$$o_y = S_1 S_5 C_{234} - C_1 C_5, \quad (2.11.81)$$

$$o_z = -S_5 S_{234}, \quad (2.11.82)$$

$$a_x = -C_1(C_5 S_6 C_{234} + C_6 S_{234}) + S_1 S_5 S_6, \quad (2.11.83)$$

$$a_y = -S_1(C_5 S_6 C_{234} + C_6 S_{234}) - C_1 S_5 S_6, \quad (2.11.84)$$

$$a_z = C_5 S_6 S_{234} - C_6 C_{234}, \quad (2.11.85)$$

$$p_x = -C_1(d_6S_3C_{231} - a_4C_{231} - a_3C_{23} - a_2C_2) - d_6S_1C_5, \quad (2.11.86)$$

$$p_y = -S_1(d_6S_3C_{234} - a_4C_{234} - a_3C_{23} - a_2C_2) + d_6C_1C_5, \quad (2.11.87)$$

$$p_z = d_6S_5S_{234} - a_4S_{234} - a_3S_{23} - a_2S_2 + d_1. \quad (2.11.88)$$

Напомним, что снова матрица T_0^5 имеет вид

$$T_0^5 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11.89)$$

Пример 2.11.7

Робот, изображенный на рис. 2.11.9, находится в нулевом положении. Оси вращений показаны на рисунке.

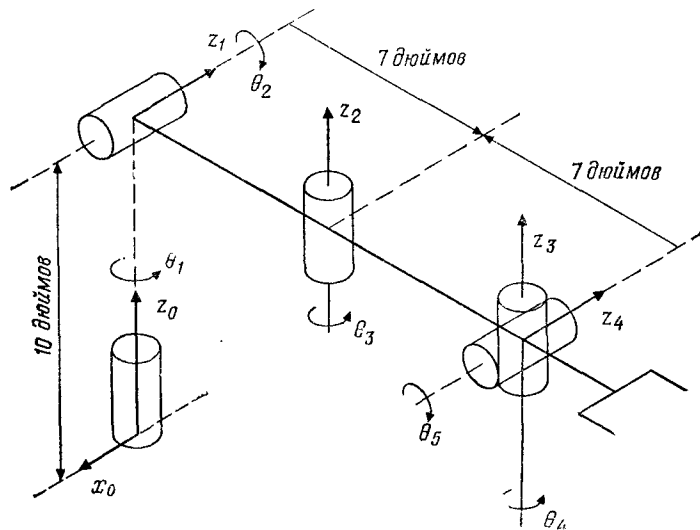


Рис. 2.11.9. Системы координат манипулятора (приведены оси движений).

(а) Завершите описание всех систем координат сочленений, назначив надлежащим образом множество осей x и y .

(б) Постройте таблицу обобщенных параметров α_i , θ_i , a_i и d_i для данного робота.

(в) Для $\theta \equiv [90^\circ 0^\circ 90^\circ 0^\circ 90^\circ]$ определите матрицу T_0^5 .

Решение.

(а) Для создания завершеного набора систем координат применим алгоритм 2.10.1 и построим правостороннюю систему

координат, начав с системы координат основания $x_0y_0z_0$. Полное описание всех систем координат дано на рис. 2.11.10.

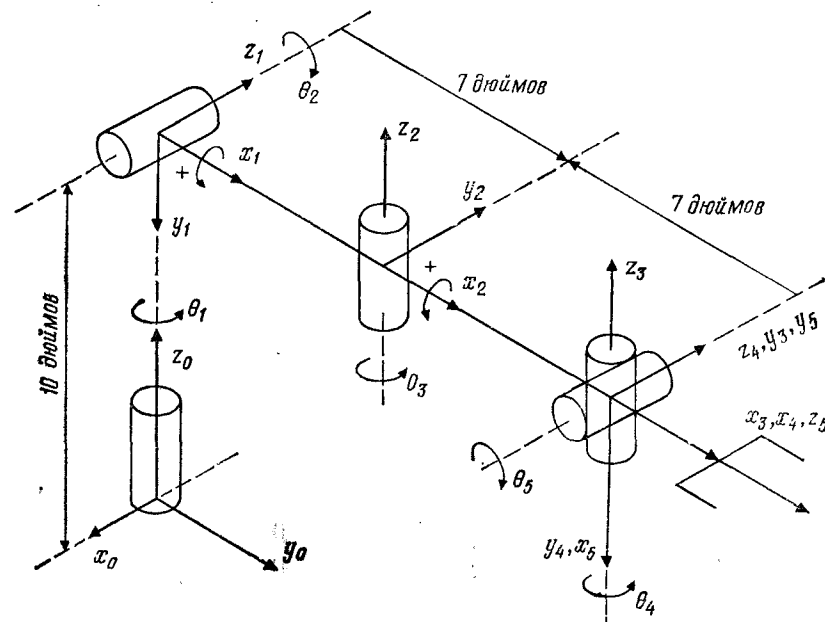


Рис. 2.11.10. Полное описание систем координат манипулятора.

(б) Теперь можно построить табл. 2.11.5 обобщенных параметров.

Таблица 2.11.5. Параметры сочленений

Сочленение	θ_h	θ	α_i	a_i (дюймы)	d_i (дюймы)
1	90°	θ_1	-90°	0	10
2	0°	θ_2	90°	7	0
3	0°	θ_3	0°	7	0
4	0°	θ_4	-90°	0	0
5	90°	θ_5	90°	0	0

(в) Для $\theta \equiv [90^\circ 0^\circ 90^\circ 0^\circ 90^\circ]$ матрица T_0^5 имеет вид

$$T_0^5 = A_0^1 A_1^2 A_2^3 A_3^4 A_4^5, \quad (2.11.90)$$

где, как обычно,

$$A_{i-1}^i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -Ca_i S\theta_i & Sa_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & Ca_i C\theta_i & -Sa_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & Sa_i & Ca_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11.91)$$

Таким образом,

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11.92)$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11.93)$$

$$A_4^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_0^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11.94)$$

Заметим, что все значения α_i , a_i и d_i полагаются известными. Найдите как можно больше решений приведенной выше задачи.

Пример 2.11.8 ■

Рассмотрите исполнительный механизм робота серии PUMA 600 (рис. 2.11.11). Введите системы координат сочленений для данной конфигурации робота. Найдите матрицы A_i и T_0^6 .

Таблица 2.11.6. Параметры сочленений

Сочленения	θ_i	α_i	a_i	d_i	Sa_i	Ca_i
1	θ_1	-90°	0	0	-1	0
2	θ_2	180°	a_2	d_2	0	-1
3	θ_3	90°	a_3	0	1	0
4	θ_4	90°	0	d_4	1	0
5	θ_5	-90°	0	0	-1	0
6	θ_6	-180°	0	d_6	0	-1

Решение. Обратившись снова к алгоритму 2.10.1, можно ввести множество систем координат звеньев, как показано в табл. 2.11.6. Параметр a_3 мал по сравнению с другими параметрами a_2 , d_2 , d_4 и d_6 . Например, $a_2 = 431.8$ мм, $d_2 = 149.1$ мм, $a_3 = 20.3$ мм, $d_4 = 433$ мм и $d_6 = 56.5$ мм. Поэтому в дальнейших выкладках мы пренебрегаем величиной a_3 .

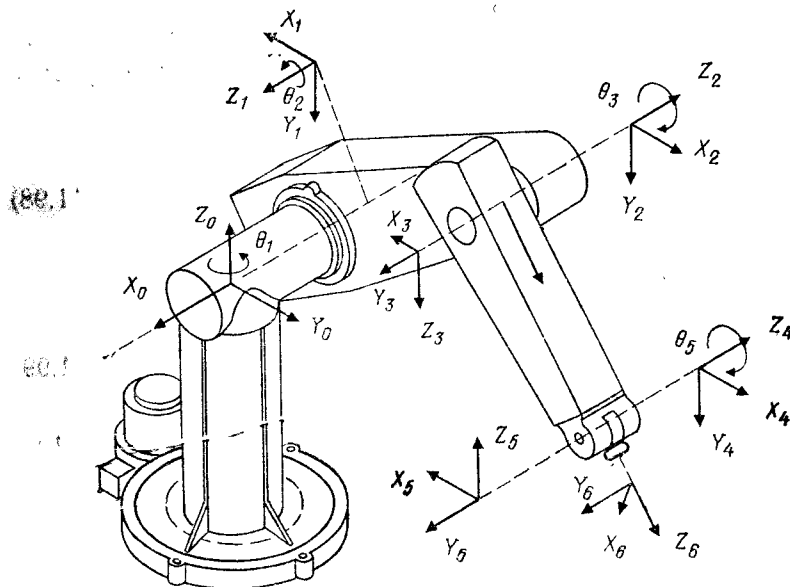


Рис. 2.11.11. Заданная конфигурация робота PUMA 600.

Используя выражение (2.11.51) и обозначения $\cos \theta_i \equiv C\theta_i \equiv C_i$ и $\sin \theta_i \equiv S\theta_i \equiv S_i$, получаем следующие представления преобразований Денавита — Хартенберга:

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & +432C_2 \\ S_2 & -C_2 & 0 & +432S_2 \\ 0 & 0 & -1 & +149.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11.95)$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & -S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3^4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & +S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 432 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11.96)$$

$$\mathbf{A}_4^5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & -S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & +C_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_5^6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 56.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11.97)$$

Для решения прямой задачи кинематики следует оценить $\mathbf{T}_0^6 = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_3^4 \mathbf{A}_4^5 \mathbf{A}_5^6$. При использовании значений, приведенных в табл. 2.11.6, эта матрица может быть вычислена! Результат имеет вид

$$\mathbf{T}_0^6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad (2.11.98)$$

$$S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j), \quad C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j), \\ n_x = C_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6), \quad (2.11.99)$$

$$n_y = C_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6), \quad (2.11.100)$$

$$n_z = -S_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - C_{23} S_5 C_6, \quad (2.11.101)$$

$$o_x = C_1 [-C_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] - S_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6), \quad (2.11.102)$$

$$o_y = S_1 [-C_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] - S_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6), \quad (2.11.103)$$

$$o_z = S_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + C_{23} S_5 S_6, \quad (2.11.104)$$

$$a_x = C_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) - S_1 S_4 S_5, \quad (2.11.105)$$

$$a_y = S_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + C_1 S_4 S_5, \quad (2.11.106)$$

$$a_z = -S_{23} C_4 S_5 + C_{23} C_5, \quad (2.11.107)$$

$$p_x = C_1 [56.5 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + 432 S_{23} + 432 C_2] - S_1 (56.5 S_4 S_5 + 149.5), \quad (2.11.108)$$

$$p_y = S_1 [56.5 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + 432 S_{23} + 432 C_2] - C_1 (56.5 S_4 S_5 + 149.5), \quad (2.11.109)$$

$$p_z = 56.5 (C_{23} C_5 - S_{23} C_4 S_5) + 432 C_{32} - 432 S_2. \quad (2.11.110)$$

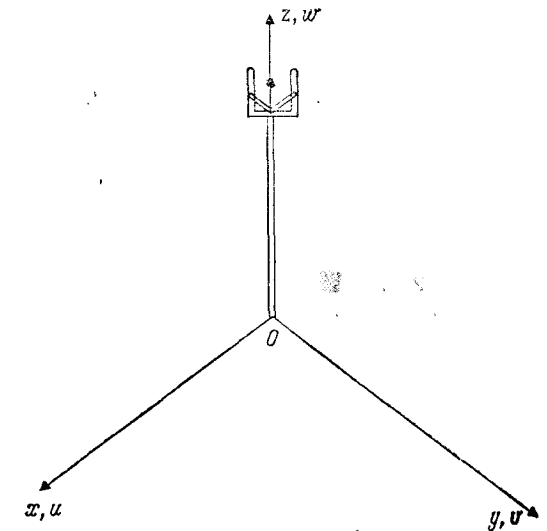


Рис. 2.11.12. Расположение схвата.

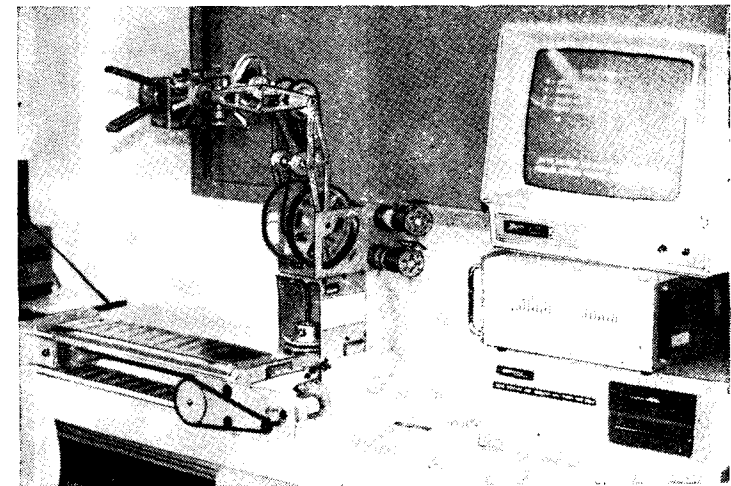


Рис. 2.11.13. Робототехническая система Rhino XR-2 в учебной лаборатории факультета прикладной механики Университета Нью-Мексико.

Проверка 2.11.1 ■

Покажите, что для роботов серии PUMA 600 при $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, $\theta_3 = 90^\circ$, $\theta_4 = 0^\circ$, $\theta_5 = 0^\circ$ и $\theta_6 = 0^\circ$

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & +149.5 \\ 0 & 0 & 0 & 920.5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \blacksquare (2.11.111)$$

Пример 2.11.9 ■

Схват сначала ориентирован по оси z так, что ось w совпадает с осью z . Затем схват поворачивается относительно продольной оси на 90° , далее на 180° в плоскости, перпендикулярной плоскости губок, и, наконец, на -90° в плоскости губок схвата. Найдите результирующее преобразование, описывающее эту последовательность поворотов (рис. 2.11.12).

Решение. Из уравнения (2.8.1) видно, что в задаче осуществляется преобразование «вращение — качание», описываемое уравнением $RPY(\varphi, \theta, \psi) = R(z, \varphi)R(v, \theta)R(u, \psi)$. Отсюда

$$\begin{aligned} RPY(-90, 180, -90) &= R(z, -90)R(v, 180)R(u, -90) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \blacksquare (2.11.112) \end{aligned}$$

В следующем разделе мы подробно рассмотрим решение обратной задачи кинематики роботов.

2.12. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ

В общем случае для робота с шестью степенями подвижности имеется шесть углов в сочленениях θ_i , где $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. С использованием матриц A_j^i это может быть записано в виде

$$T_0^n = A_0^1 A_1^2 A_2^3 \dots A_{n-1}^n, \quad (2.12.1)$$

где через T_0^n обозначена матрица, описывающая положение n -го сочленения по отношению к системе координат основания. Эта

матрица представляется в виде

$$T_0^n = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12.2)$$

Заметим, что уравнение (2.12.1) можно записать в следующей компактной форме:

$$T_0^n = \prod_{i=1}^n A_{i-1}^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.12.3)$$

или

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & = \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12.4) \end{aligned}$$

где \mathbf{n} — вектор нормали, \mathbf{o} — вектор ориентации, \mathbf{a} — вектор подхода.

Если манипулятор связан с эталонной системой координат преобразованием \mathbf{B} , а к его последнему узлу прикреплен инструмент, описываемый преобразованием \mathbf{H} , то преобразование, привязывающее конечную точку инструмента к эталонной системе координат, может быть получено перемножением матриц \mathbf{B} , T_0^n и \mathbf{H} :

$$T_{\text{этал}}^{\text{инстр}} = \mathbf{B} T_0^n \mathbf{H}. \quad (2.12.5)$$

Очевидно, что $\mathbf{H} \equiv A_n^{\text{инстр}}$ и $\mathbf{B} \equiv A_{\text{этал}}^n$.

Как отмечалось ранее, решение прямой задачи кинематики находится просто вычислением $T = A_0^n$ путем последовательного перемножения n матриц A_{i-1}^i , $i = 1, 2, \dots, n$. Для любой заданной конфигурации робота может быть построена таблица обобщенных координат θ_i , a_i , α_i и d_i , что позволяет найти матрицы A_{i-1}^i , а в конечном счете — матрицу ориентации n -го сочленения T_0^n . Эта процедура продемонстрирована в примере 2.11.8 для робота серии PUMA 600.

Пример 2.12.1 ■

Рассмотрим робот-манипулятор с шестью степенями подвижности, снабженный цифровой телевизионной камерой, которая

может непрерывно отслеживать положение и перемещение объекта (чайной чашки). Положение и ориентация чашки по отношению к камере описываются матрицей T_1 , а система координат

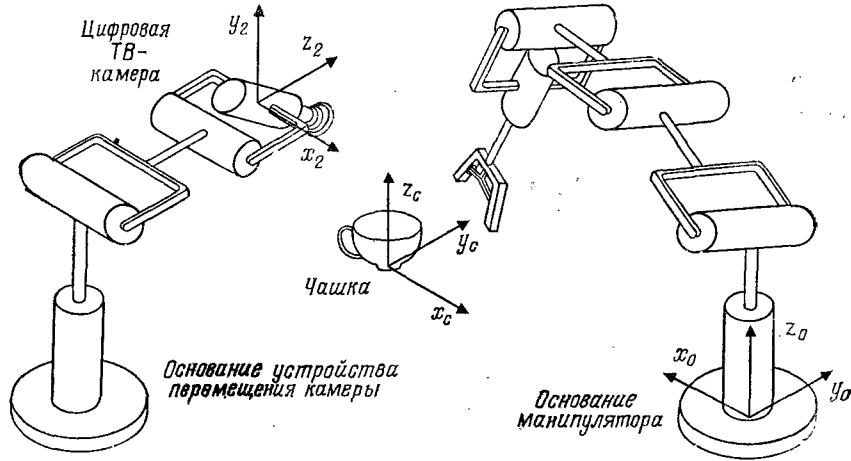


Рис. 2.12.1. Робототехнический комплекс на базе системы технического зрения.

нат основания робота задается по отношению к камере преобразованием T_2 , причем

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12.6)$$

Определить положение и ориентацию чашки по отношению к системе координат основания (рис. 2.12.1).

Решение. Заметим, что

$$T_1 = T_{\text{камера}}^{\text{чашка}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12.7)$$

Очевидно, что

$$T_{\text{основание}}^{\text{чашка}} = T_{\text{основание}}^{\text{камера}} T_{\text{камера}}^{\text{чашка}} = T_2^{-1} T_1. \quad (2.12.8)$$

Таким образом,

$$T_{\text{основание}}^{\text{чашка}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12.9)$$

и, следовательно,

$$T_{\text{основание}}^{\text{чашка}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 25 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.12.10)$$

Пример 2.12.2 ■

В соответствии с рис. 2.12.1 и условиями примера 2.12.1 определить положение и ориентацию чашки по отношению к схвату, если положение и ориентация схвата в системе координат основания описываются преобразованием T_3 , таким, что

$$T_3 = T_{\text{основание}}^{\text{схват}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12.11)$$

Решение. Заметим, что

$$T_{\text{схват}}^{\text{чашка}} = T_{\text{схват}}^{\text{основание}} T_{\text{основание}}^{\text{чашка}} = T_3^{-1} T_{\text{основание}}^{\text{чашка}}. \quad (2.12.12)$$

Тогда

$$T_{\text{схват}}^{\text{чашка}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 25 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12.13)$$

и, следовательно,

$$T_{\text{схват}}^{\text{чашка}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 17 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.12.14)$$

Решение обратной задачи кинематики для манипуляторов с шестью степенями подвижности. В этом случае уравнение

(2.12.4) принимает вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^6 \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12.15)$$

или в другой форме

$$\mathbf{T}_0^6 = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_3^4 \mathbf{A}_4^5 \mathbf{A}_5^6. \quad (2.12.16)$$

Очевидно, что θ_i являются переменными, значения которых надо найти при известных для данного манипулятора величинах α_i , d_i и a_i . Конечно, для манипуляторов с призматическими сочленениями ситуация складывается иначе: для них некоторые α_i и d_i являются переменными подобно углам в сочленениях θ_i . Оба подхода в целом совпадают.

Как только параметры звеньев установлены, могут быть легко построены матрицы \mathbf{A}_{i-1}^i и произведено последовательное перемножение. Очевидно, что в этом случае имеется обычно 12 уравнений с шестью неизвестными и получение решений требует значительной тщательности! При отсутствии поступательных перемещений можно получить общее решение обратной задачи через углы Эйлера (φ, θ, ψ) или углы вращения — качания (φ, θ, ψ).

Пример 2.12.3 ■

Найти общее решение обратной задачи кинематики относительно углов Эйлера φ, θ, ψ .

Решение. Обратившись к уравнению (2.11.8), отметим, что

$$\mathbf{T}_0^3 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Euler}(\varphi, \theta, \psi). \quad (2.12.17)$$

Таким образом, $p_x = p_y = p_z = 0$,

$$n_x = C\varphi C\theta, \quad (2.12.18)$$

$$n_y = S\varphi C\theta, \quad (2.12.19)$$

$$n_z = -S\theta, \quad (2.12.20)$$

$$o_x = C\varphi S\theta S\psi - S\varphi C\psi, \quad (2.12.21)$$

$$o_y = S\varphi S\theta S\psi + C\varphi C\psi, \quad (2.12.22)$$

$$o_z = C\theta S\psi, \quad (2.12.23)$$

$$a_x = C\varphi S\theta C\psi + S\theta S\psi, \quad (2.12.24)$$

$$a_y = S\varphi S\theta C\psi - C\theta S\psi, \quad (2.12.25)$$

$$a_z = C\theta C\psi. \quad (2.12.26)$$

Из формул (2.12.18) и (2.12.19) получаем

$$\varphi = \arctg\left(\frac{n_y}{n_x}\right) + n\pi. \quad (2.12.27)$$

Из формул (2.12.18), (2.12.19) и (2.12.20) находим

$$\theta = \arctg\left(-\frac{n_z}{(n_x^2 + n_y^2)^{1/2}}\right) + n\pi \quad (2.12.28)$$

и из формул (2.12.23) и (2.12.26) получаем

$$\psi = \arctg\left(\frac{o_z}{a_z}\right) + n\pi. \quad (2.12.29)$$

Для получения решения в пригодной форме нужно использовать функцию ЭВМ ATAN2 следующим образом:

$$\varphi = \text{ATAN2}(n_y, n_x), \quad (2.12.30)$$

$$\theta = \text{ATAN2}[-n_z, (n_x^2 + n_y^2)^{1/2}], \quad (2.12.31)$$

$$\psi = \text{ATAN2}(o_z, a_z). \quad (2.12.32)$$

Пример 2.12.4 ■

Получить решение обратной задачи кинематики в общем виде для преобразования вращение — качание через φ, θ и ψ .

Решение. Обратившись к формуле (2.11.8), заметим, что

$$\mathbf{T}_0^3 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{RPY}(\varphi, \theta, \psi). \quad (2.12.33)$$

Здесь $p_x = p_y = p_z = 0$ и для данного случая справедливы те же уравнения (2.12.18) — (2.12.26). Тогда решение обратной задачи кинематики имеет вид

$$\varphi = \text{ATAN2}(n_y, n_x), \quad (2.12.34)$$

$$\theta = \text{ATAN2}[-n_z, (n_x^2 + n_y^2)^{1/2}], \quad (2.12.35)$$

$$\psi = \text{ATAN2}(o_z, a_z). \quad (2.12.36)$$



Рис. 2.12.2. Робот Unimate. (С разрешения Unimation Robots.)

Пример 2.12.5

Получить решение обратной задачи кинематики в общем виде для преобразования, описывающего робот, работающий в сферической системе координат, $SPH(\theta, \varphi, r)$. Это решение применимо к роботу модели Unimate 2100G (рис. 2.12.2).

Решение. Из формулы (2.11.7) видно, что

$$\mathbf{T}_0^3 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta C\varphi & -S\theta & -C\theta S\varphi & rC\theta C\varphi \\ S\theta C\varphi & C\theta & -S\theta S\varphi & rS\theta C\varphi \\ S\varphi & 0 & C\varphi & rS\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12.37)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \theta \pm n\pi &= \arctg\left(\frac{n_y}{n_x}\right) = \arctg\left(-\frac{o_x}{o_y}\right) = \\ &= \arctg\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right), \end{aligned} \quad (2.12.38)$$

$$\begin{aligned} \varphi \pm n\pi &= \arctg\left(\frac{(a_x^2 + a_y^2)^{1/2}}{(n_x^2 + n_y^2)^{1/2}}\right) = \\ &= \arctg\left(\frac{p_z}{(p_x^2 + p_y^2)^{1/2}}\right) = \arctg\left(\frac{n_z}{a_z}\right), \end{aligned} \quad (2.12.39)$$

$$r = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}. \quad (2.12.40)$$

Для вычисления на ЭВМ θ и φ выражаются следующим образом:

$$\theta = \text{ATAN2}(p_y, p_x), \quad (2.12.41)$$

$$\varphi = \text{ATAN2}[p_z, (p_x^2 + p_y^2)^{1/2}]. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.12.42)$$

Пример 2.12.6

Решить обратную задачу кинематики для работающего в цилиндрической системе координат робота, описанного в примере 2.11.4.

Решение. Соотношения, описывающие решение обратной задачи кинематики, имеют вид (2.11.22)–(2.11.33). Сформируем теперь следующее произведение матриц \mathbf{A}_1^{-1} и \mathbf{T}_6^0 :

$$\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{T}_6^0 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12.43)$$

или

$$\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{T}_6^0 = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{n}) & F_1(\mathbf{o}) & F_1(\mathbf{a}) & F_1(\mathbf{p}) \\ F_2(\mathbf{n}) & F_2(\mathbf{o}) & F_2(\mathbf{a}) & F_2(\mathbf{p}) \\ F_3(\mathbf{n}) & F_3(\mathbf{o}) & F_3(\mathbf{a}) & F_3(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12.44)$$

где функция $F_i(u)$, $i = 1, 2, 3$, любого из векторов \mathbf{u} описывается следующим образом:

$$F_1(\mathbf{u}) = C_1 u_x + S_1 u_y, \quad (2.12.45)$$

$$F_2(\mathbf{u}) = -u_z, \quad (2.12.46)$$

$$F_3(\mathbf{u}) = -S_1 u_x + C_1 u_y, \quad (2.12.47)$$

Далее очевидно, что $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{T}_1^6$, и, следовательно, на основании матричного уравнения (2.11.20) имеем

$$F_1(\mathbf{n}) = C_2(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6, \quad (2.12.48)$$

$$F_1(\mathbf{o}) = -C_2(C_4 C_5 C_6 + S_4 C_6) + S_2 S_5 S_6, \quad (2.12.49)$$

$$F_1(\mathbf{a}) = C_2 C_4 S_5 + S_2 C_5, \quad (2.12.50)$$

$$F_1(\mathbf{p}) = S_2 d_3, \quad F_2(\mathbf{p}) = -C_2 d_3, \quad F_3(\mathbf{p}) = d_2, \quad (2.12.51)$$

$$F_2(\mathbf{n}) = S_2(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_2 S_5 C_6, \quad (2.12.52)$$

$$F_2(\mathbf{o}) = -S_2(C_4 C_5 C_6 + S_4 C_6) - C_2 S_5 S_6, \quad (2.12.53)$$

$$F_2(\mathbf{a}) = S_2 C_4 S_5 - C_2 C_5, \quad (2.12.54)$$

$$F_3(\mathbf{n}) = S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6, \quad (2.12.55)$$

$$F_3(\mathbf{o}) = -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6, \quad (2.12.56)$$

$$F_3(\mathbf{a}) = S_4 S_5. \quad (2.12.57)$$

Из (2.12.51) получаем

$$-S_1 p_x + C_1 p_y = d_2, \quad (2.12.58)$$

что легко может быть разрешено относительно θ_1 для получения единственного решения:

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right) - \arctg\left(\frac{d_2}{\pm(r^2 - d_2^2)^{1/2}}\right). \quad (2.12.59)$$

Далее из формул (2.12.51) находим

$$S_2 d_3 = C_1 p_x + S_1 p_y \quad \text{и} \quad -C_2 d_3 = -p_z. \quad (2.12.60)$$

Таким образом, поскольку $d_3 > 0$, существует единственное решение (в общем виде) для θ_2 :

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{C_1 p_x + S_1 p_y}{p_z}\right) \quad (2.12.61)$$

и, очевидно,

$$d_3 = S_2(C_1 p_x + S_1 p_y) + C_2 p_z. \quad (2.12.62)$$

Из формул (2.12.33)–(2.12.35) получаем следующие соотношения:

$$-S_1 a_x + C_1 a_y = S_4 S_5, \quad (2.12.63)$$

$$(C_1 a_x + S_1 a_y) = C_2 C_4 S_5 + S_2 C_5, \quad (2.12.64)$$

$$C_2(C_1 a_x + S_1 a_y) - S_1 a_z = C_4 S_5. \quad (2.12.65)$$

Теперь, поделив (2.12.63) на (2.12.64), получим неединственное решение для θ_4 :

$$\theta_4 = \arctg\left(\frac{C_1 a_y - S_1 a_x}{C_2(C_1 a_x + S_1 a_y) - S_2 a_z}\right), \quad \text{если } \theta_5 > 0, \quad (2.12.66a)$$

$$\text{и} \quad \theta_4 = \theta_4 + \pi, \quad \text{если } \theta_5 < 0. \quad (2.12.66b)$$

Если и числитель, и знаменатель в (2.12.66) обращаются в нуль, это означает, что $\theta_5 = 0$ или $\theta = \pi$, т. е. имеет место «вырожд-

денный» случай, заслуживающий особого внимания. В этом случае оси четвертого и шестого сочленений одинаково направлены и значение имеет лишь сумма $\theta_4 + \theta_6$; по существу, θ_4 может быть выбран произвольно, т. е. достаточно оставить его текущее значение.

Опять, умножив (2.11.63) на S_4 и (2.11.64) на C_4 и сложив полученные выражения, получим

$$S_5 = C_4[C_2(C_1 a_x + S_1 a_y) - S_2 a_z] + S_4(-S_1 a_x + C_1 a_y). \quad (2.12.67)$$

Далее, разделив (2.12.67) на (2.12.64), будем иметь

$$\theta_5 = \arctg\left(\frac{C_4[C_2(C_1 a_x + S_1 a_y) - S_2 a_z] + S_4(-S_1 a_x + C_1 a_y)}{S_2(C_1 a_x + S_1 a_y) + C_2 a_z}\right). \quad (2.12.68)$$

Теперь из формул (2.11.25)–(2.11.27) получаем следующие соотношения:

$$C_1 o_x + S_1 o_y = -C_2(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_2 S_5 S_6, \quad (2.12.69)$$

$$-S_1 a_x + C_1 o_y = -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6, \quad (2.12.70)$$

$$C_4[C_2(C_1 o_x + S_1 o_y) - S_2 o_z] = -(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) C_4, \quad (2.12.71)$$

$$S_4(-S_1 o_x + C_1 o_y) = -S_4^2 C_5 S_5 + S_4 C_4 C_6, \quad (2.12.72)$$

$$C_4(-S_1 o_x + C_1 o_y) = -S_4 C_4 C_5 S_6 + C_4^2 C_6. \quad (2.12.73)$$

Из формул (2.12.69)–(2.12.73) видно, что

$$S_6 = -C_5\{C_4[C_2(C_1 o_x + S_1 o_y) - S_2 o_z] + S_4(-S_1 o_x + C_1 o_y)\} + S_5[S_2(C_1 o_x + S_1 o_y) + C_2 o_z] = a^*, \quad (2.12.74)$$

$$C_6 = -S_4[C_2(C_1 o_x + S_1 o_y) - S_2 o_z] + C_4[-S_1 o_x + C_1 o_y] = b^*. \quad (2.12.75)$$

Таким образом, θ_6 может быть получено в виде

$$\theta_6 = \arctg\left(\frac{a^*}{b^*}\right). \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.12.76)$$

Пример 2.12.7 ■

При условиях примера 2.11.5 для робота Minimover Microbot получить множество решений обратной задачи кинематики.

Решение. Обращаясь к формулам (2.11.38)–(2.11.50), заметим, что

$$(T_0^5)_{32} C_5 + (T_0^5)_{31} S_5 = 0. \quad (2.12.77)$$

Таким образом,

$$\frac{S_5}{C_5} = \operatorname{tg} \theta_5 = \frac{-o_z}{n_z}, \quad (2.12.78)$$

или

$$\theta_5 = \operatorname{arctg} \left(\frac{-o_z}{n_z} \right), \quad (2.12.79)$$

где $(T_0^5)_{32} = o_z$ и $(T_0^5)_{31} = n_z$. Кроме того, заметим, что

$$(T_0^5)_{11} S_5 + (T_0^5)_{12} C_5 = -S_1. \quad (2.12.80)$$

Тогда

$$\theta_1 = \arcsin (n_x \sin \theta_5 + o_x \cos \theta_5), \quad (2.12.81)$$

где

$$T_0^5 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12.82)$$

Теперь из соотношения

$$(A_1^2)^{-1} (A_0^1)^{-1} T_0^5 = A_2^3 A_3^4 A_4^5 = A^* \quad (2.12.83)$$

получим

$$A_{11}^* = n_x C_1 C_2 + n_y C_2 S_1 - n_z S_2 = C_5 C_{34}, \quad (2.12.84)$$

$$A_{12}^* = o_x C_1 C_2 + o_y C_2 S_1 - o_z S_2 = -S_5 C_{34}, \quad (2.12.85)$$

$$A_{13}^* = a_x C_1 C_2 + a_y S_1 C_2 - a_z S_2 = S_{34}, \quad (2.12.86)$$

$$A_{14}^* = p_x C_1 C_2 + p_y C_2 S_1 - p_z S_2 + 8.1 S_2 - 7 = 3.2 S_{34} + 7 C_3, \quad (2.12.87)$$

$$A_{21}^* = -n_x S_2 C_1 - n_y S_1 S_2 - n_z C_2 = C_5 S_{34}, \quad (2.12.88)$$

$$A_{22}^* = -o_x S_2 C_1 - o_y S_1 S_2 - o_z C_2 = -S_5 S_{34}, \quad (2.12.89)$$

$$A_{23}^* = a_x S_2 C_1 - a_y S_1 S_2 - a_z C_2 = -C_{34}, \quad (2.12.90)$$

$$A_{24}^* = -p_x S_2 C_1 - p_y S_1 S_2 - p_z C_2 + 8.1 C_2 = -3.8 C_{34} + 7 S_3. \quad (2.12.91)$$

Из формул (2.12.84) и (2.12.88) получаем

$$n_x C_1 + n_y S_1 = C_5 \cos (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4), \quad \text{или} \quad (2.12.92)$$

$$-o_z = -S_5 \sin (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4). \quad (2.12.93)$$

Таким образом,

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \operatorname{arctg} \left(\frac{o_z}{\operatorname{tg} \theta_5 (n_x C_1 + n_y S_1)} \right). \quad (2.12.94)$$

Из формул (2.12.84) и (2.12.85) получаем

$$-\operatorname{tg} \theta_5 (n_x C_1 C_2 + n_y C_2 S_1 - n_z S_2) = o_x C_1 C_2 + o_y C_2 S_1 - o_z S_2, \quad \text{или} \quad (2.12.95)$$

$$-\operatorname{tg} \theta_5 (n_x C_1 + n_y S_1 - n_z \operatorname{tg} \theta_2) = o_x C_1 + o_y S_1 - o_z \operatorname{tg} \theta_2. \quad (2.12.96)$$

Следовательно,

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{o_x C_1 + o_y S_1 + \operatorname{tg} \theta_5 (n_x C_1 + n_y S_1)}{n_z \operatorname{tg} \theta_5 + o_z} \right). \quad (2.12.97)$$

Из формулы (2.12.86)

$$\sin (\theta_3 + \theta_4) = a_x C_1 C_2 + a_y S_1 C_2 - a_z S_2, \quad \text{или} \quad (2.12.98)$$

$$\theta_3 + \theta_4 = \arcsin (a_x C_2 C_1 + a_y S_1 C_2 - a_z S_2). \quad (2.12.99)$$

Из формулы (2.12.87)

$$7 \cos \theta_3 = p_x C_1 C_2 + p_y C_2 S_1 - p_z S_2 + 8.1 S_2 - 7 - 3.8 S_{34}, \quad \text{или} \quad (2.12.100)$$

$$\theta_3 = \arccos \left[\frac{1}{7} (p_x C_1 C_2 + p_y C_2 S_1 - p_z S_2 + 8.1 S_2 - 7 - 3.8 S_{34}) \right]. \quad (2.12.101)$$

Наконец,

$$\theta_4 = \theta_3 + \theta_4 - \theta_3 =$$

$$= -\arccos \left[\frac{1}{7} (p_x C_2 C_1 + p_y C_2 S_1 - p_z S_2 + 8.1 S_2 - 7 - 3.8 S_{34}) \right] + \\ + \arcsin (a_x C_1 C_2 + a_y S_1 C_2 - a_z S_2). \quad \blacksquare \blacksquare \quad (2.12.102)$$

Пример 2.12.8

Найти решение обратной задачи кинематики для робота с шестью степенями подвижности, описанного в примере 2.11.6 и на рис. 2.11.6—2.11.8.

Решение. Соотношения, описывающие систему в обоих случаях, имеют вид (2.11.60)—(2.11.71) и (2.11.77)—(2.11.88) соответственно. Чтобы получить соответствующие решения, проделаем в обоих случаях следующие операции: умножим выражение (2.11.67) на C_1 и (2.11.66) на S_1 , а затем вычтем из первого полученного выражения второе:

$$a_y C_1 - a_x S_1 = C_5. \quad (2.12.103)$$

Умножим выражение (2.11.70) на C_1 и (2.11.69) на S_1 , а затем вычтем из первого полученного выражения второе:

$$p_y C_1 - p_x S_1 = d_6 C_5. \quad (2.12.104)$$

Из соотношений (2.12.103) и (2.12.104) получаем

$$d_6 a_y C_1 - d_6 a_x S_1 = p_y C_1 - p_x S_1. \quad (2.12.105)$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \left(\frac{p_y - d_6 a_y}{p_x - d_6 a_x} \right), \quad \text{или} \quad (2.12.106)$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{p_y - d_6 a_y}{p_x - d_6 a_x} \right) \quad \text{и} \quad (2.12.107)$$

$$\theta_1 = \theta_1 + \pi.$$

Из соотношений (2.12.103) и (2.12.104) можно показать, что

$$\operatorname{tg} \theta_5 = \frac{\pm d_6 [1 - (a_y C_1 - a_x S_1)^2]^{1/2}}{p_y C_1 - p_x S_1}, \quad \text{или} \quad (2.12.108)$$

$$\theta_5 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\pm d_6 [1 - (a_y C_1 - a_x S_1)^2]^{1/2}}{p_y C_1 - p_x S_1} \right). \quad (2.12.109)$$

Далее умножим выражение (2.11.65) на C_1 и (2.11.66) на S_1 , а затем сложим полученные выражения:

$$-(a_x C_1 + a_y S_1) = S_5 C_{234}. \quad (2.12.110)$$

Учитывая выражение (2.11.68), заметим, что при $S_5 \neq 0$ из формул (2.11.67) и (2.12.110) получается

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \theta_{234} = \operatorname{arctg} \left(\frac{-a_z}{a_x C_1 + a_y S_1} \right) \quad \text{при} \quad \theta_5 > 0, \quad (2.12.111)$$

$$\theta_{234} = \theta_{234} + \pi \quad \text{при} \quad \theta_5 < 0. \quad (2.12.112)$$

Умножим выражение (2.11.60) на C_1 и (2.11.59) на S_1 , а затем вычтем из первого полученного выражения второе:

$$S_5 C_6 = n_y C_1 - n_x S_1. \quad (2.12.113)$$

Умножим выражение (2.11.62) на S_1 и (2.11.63) на C_1 , а затем вычтем из первого полученного выражения второе:

$$S_5 S_6 = o_x S_1 - o_y C_1. \quad (2.12.114)$$

Теперь при $S_5 \neq 0$ можно разделить выражение (2.12.114) на (2.12.113); в результате получается

$$\theta_6 = \operatorname{arctg} \left(\frac{o_x S_1 - o_y C_1}{n_y C_1 - n_x S_1} \right) \quad \text{при} \quad \theta_5 > 0, \quad (2.12.115)$$

$$\theta_6 = \theta_6 + \pi \quad \text{при} \quad \theta_5 < 0. \quad (2.12.116)$$

Следует заметить, что в реальных приложениях этих формул в соответствующие программы решения обратной задачи кинематики роботов нужно ввести выражение ATAN2 вместо arctg . Это библиотечная функция ATAN2, такая, что

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right) \rightarrow \operatorname{ATAN2}(a, b). \quad (2.12.117)$$

При такой трактовке выражение (2.12.115) для θ_6 должно иметь вид

$$\theta_6 = \operatorname{ATAN2}[(o_x S_1 - o_y C_1), (n_y C_1 - n_x S_1)], \quad (2.12.118)$$

чтобы в соответствующих программах использовалось точное значение θ_6 . Умножив выражение (2.11.69) на C_1 и (2.11.70) на S_1 , сложив и перегруппировав члены, получим следующее уравнение:

$$a_2 C_2 + a_3 C_{23} = C_1 p_x + S_1 p_y + d_6 S_5 C_{234} - a_4 C_{234} = t. \quad (2.12.119)$$

В приведенном уравнении мы приравняли результат t для простоты. Далее, из выражения (2.11.71) получается следующее уравнение:

$$a_2 S_2 + a_3 S_{23} = -p_z + d_1 - a_4 S_{234} + d_6 S_5 S_{234} = u. \quad (2.12.120)$$

Опять для простоты мы положили результат равным u . Таким образом, из уравнений (2.12.119) и (2.12.120) имеем

$$a_3 C_{23} = t - a_2 C_2, \quad (2.12.121)$$

$$a_3 S_{23} = u - a_2 S_2, \quad (2.12.122)$$

где t и u являются уже известными величинами. Из уравнений (2.12.121) и (2.12.122) следует

$$a_3^2 = (t - a_2 C_2)^2 + (u - a_2 S_2)^2, \quad (2.12.123)$$

откуда получаем выражение, для простоты приравненное к w (известной величине):

$$t C_2 + u S_2 = \frac{-a_3^2 + t^2 + u^2 + a_2^2}{2a_2} = w. \quad (2.12.124)$$

Далее следует, что

$$\theta_2 = -\operatorname{arctg} \left(\frac{\pm [1 - (w/q)^2]^{1/2}}{w/q} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{t} \right), \quad \text{где} \quad (2.12.125)$$

$$q = (t^2 + u^2)^{1/2}. \quad (2.12.126)$$

Следовательно, из уравнений (2.12.121) и (2.12.122)

$$\operatorname{tg}(\theta_2 + \theta_3) = \left(\frac{u - a_2 S_2}{t - a_2 C_2} \right), \quad \text{или} \quad (2.12.127)$$

$$\theta_3 = \operatorname{arctg} \left(\frac{u - a_2 S_2}{t - a_2 C_2} \right) - \theta_2 \quad (2.12.128)$$

и, наконец,

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3 \text{ и } \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \quad (2.12.129)$$

— полностью известны.

Этим завершается решение обратной задачи кинематики для робота общего вида для случая, когда $\theta_4 \neq 0$ (невыврожденный случай).

Вырожденный случай: $\theta_5 = 0 \pm \pi$. Если $S_5 = 0$ ($\theta_5 = 0 \pm \pi$), геометрическая конфигурация исполнительного механизма становится вырожденной, так как θ_{234} становится по существу произвольным в соответствии с соотношением (2.11.68). При этом часто используется текущее значение θ_{234} . Для сокращения вычислений положим $\theta_{234} = k$ (произвольное значение при $\theta_5 = 0$ или $\pm \pi$); тогда из формул (2.11.62) и (2.11.65) получим

$$n_z = -C_5 C_6 S_{234} - S_6 C_{234}, \quad (2.12.130)$$

$$o_z = -C_6 C_{234} + S_6 C_5 S_{234}, \quad (2.12.131)$$

откуда

$$C_6 = -n_z S_{234} C_5 - o_z C_{234}, \quad (2.12.132)$$

$$S_6 = C_5 o_z S_{234} - n_z C_{234}, \quad (2.12.133)$$

так что

$$\theta_6 = \arctg \left(\frac{C_5 o_z S_{234} - n_z C_{234}}{-C_5 n_z S_{234} - o_z C_{234}} \right). \quad (2.12.134)$$

И опять, умножив выражение (2.11.69) на C_1 и (2.11.70) на S_1 , а затем сложив полученные выражения, при S_5 , равном нулю, получим

$$p_x C_1 + p_y S_1 = a_4 C_{234} + a_3 C_{23} + a_2 C_2. \quad (2.12.135)$$

Выражение (2.11.71) для вырожденного случая принимает вид

$$p_z = -a_3 S_{23} - a_2 S_2 + d_1 - a_4 S_{234}. \quad (2.12.136)$$

Тогда из формул (2.12.134) и (2.12.135) получается следующее выражение, которое приравняем к X (известной величине):

$$a_3 C_{23} + a_2 C_2 + a_2 C_2 = p_x C_1 + p_y S_1 - a_4 C_{234} = X. \quad (2.12.137)$$

Из соотношения (2.12.135) получаем следующее выражение, которое приравняем к Y :

$$a_3 S_{23} + a_2 S_2 = -p_z + d_1 - a_4 S_{234} = Y. \quad (2.12.138)$$

Таким образом, из соотношений (2.12.136) и (2.12.138) окончательно получаем

$$\theta_2 = \arctg \left(\frac{Z/R}{\pm [1 - (Z/R)^2]^{1/2}} \right) - \arctg \left(\frac{X}{Y} \right), \quad (2.12.139)$$

где

$$Z = \frac{a_2^2 + X^2 + Y^2 - a_3^2}{2a_2}, \quad (2.12.140)$$

$$R = (X^2 + Y^2)^{1/2}. \quad (2.12.141)$$

Теперь из соотношений (2.12.136) и (2.12.137) легко определить

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3 = \arctg \left(\frac{Y - a_2 S_2}{X - a_2 C_2} \right); \quad (2.12.142)$$

тогда

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \theta_{23} - \theta_2, \\ \theta_4 &= k - \theta_{23}. \end{aligned} \quad (2.12.143)$$

На этом решение для одного из вырожденных случаев завершается; очевидно, существует множество таких вырожденных решений, которые можно получить.

Решение обратной задачи кинематики для второго случая. Этот случай (рис. 2.11.8) описывается формулами (2.11.77) — (2.11.88). Заметим, что структура этих соотношений аналогична структуре предыдущих соотношений (2.11.60) — (2.11.71), за исключением того, что o_x , o_y и o_z заменены на a_x , a_y и a_z соответственно. Таким образом, очевидно, что если бы мы заменили в полученных выше формулах решения для невырожденного и вырожденного случаев o_x на a_x , a_x на $-o_x$, o_y на a_y , a_y на $-o_y$, o_z на a_z и a_z на $-o_z$, то получили бы точные формулы решения для второго случая. При этом формулы для невырожденного состояния имеют вид

$$\theta_1 = \arctg \left(\frac{p_y + d_6 o_y}{p_y + d_6 o_x} \right) \text{ и } \theta_1 = \theta_1 + \pi, \quad (2.12.144)$$

$$\theta_5 = \arctg \left(\frac{\pm d_6 [1 - (o_x S_1 - o_y C_2)^2]^{1/2}}{p_y C_1 - p_x S_1} \right), \quad (2.12.145)$$

$$\theta_{234} = \arctg \left(\frac{-o_z}{o_x C_1 + o_y S_1} \right) \text{ для } \theta_5 > 0, \quad (2.12.146)$$

$$\theta_{234} = \theta_{234} + \pi \text{ для } \theta_5 < 0, \quad (2.12.147)$$

$$\theta_6 = \arctg \left(\frac{a_x S_1 - a_y C_1}{n_y C_1 - n_x S_1} \right) \text{ для } \theta_5 > 0, \quad (2.12.148)$$

$$\theta_6 = \theta_6 + \pi \text{ для } \theta_5 < 0, \quad (2.12.149)$$

$$\theta_2 = -\arctg \left(\frac{\pm [1 - (3/q)]^{1/2}}{w/q} \right) + \arctg \left(\frac{u}{t} \right), \quad (2.12.150)$$

$$\theta_3 = \arctg \left(\frac{u - a_2 S_2}{t - a_2 C_2} \right) - \theta_2 \quad (2.12.151)$$

и, наконец,

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_{23}. \quad (2.12.152)$$

Этим завершается решение задачи обратной кинематики робота с шестью степенями подвижности общего вида со вторым типом схвата для случая, когда $\theta_5 \neq 0$.

Для вырожденного случая, когда $\theta_5 = 0$, аналогичным образом находим

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{p_y + d_6 o_y}{p_x + d_6 o_x}\right) \text{ и } \theta_1 = \theta_1 + \pi, \quad (2.12.153)$$

$$\theta_5 = 0 \pm n\pi \text{ и } \theta_{234} = k \text{ (произвольная величина)}, \quad (2.12.154)$$

$$\theta_6 = \arctg\left(\frac{C_5 a_2 S_{234} - n_2 C_{234}}{-C_5 n_2 S_{234} - a_2 C_{234}}\right), \quad (2.12.155)$$

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{Z/R}{\pm [1 - (Z/R)^2]^{1/2}}\right) - \arctg\left(\frac{X}{Y}\right), \quad (2.12.156)$$

$$\theta_3 = \arctg\left(\frac{Y - a_2 S_2}{X - a_2 C_2}\right) - \theta_2, \quad (2.12.157)$$

$$\theta_4 = k - \arctg\left(\frac{Y - a_2 S_2}{X - a_2 C_2}\right). \quad (2.12.158)$$

На этом заканчивается решение задачи для вырожденных случаев для робота с шестью степенями подвижности общего вида со схватом второго типа.

Пример 2.12.9 ■

Найти точное решение обратной задачи кинематики для манипуляционного робота модели Rhino XR-2, схематически изображенного на рис. 2.12.3.

Решение. В соответствии с рис. 2.12.4, на котором показан полный набор систем координат, можно построить табл. 2.12.1 обобщенных параметров (рис. 2.12.5). Далее на основании уравнения (2.12.4) и табл. 2.12.1 могут быть получены матрицы Де-

Таблица 2.12.1. Параметры сочленений манипуляционного робота RHINO XR-2

Сочленение	θ_i	α_i	τ_i	d_i
1	θ_1	-90°	0	d_1
2	θ_2	0°	a_2	0
3	θ_3	0°	a_3	0
4	θ_4	-90°	a_4	0
5	θ_5	0°	0	d_5

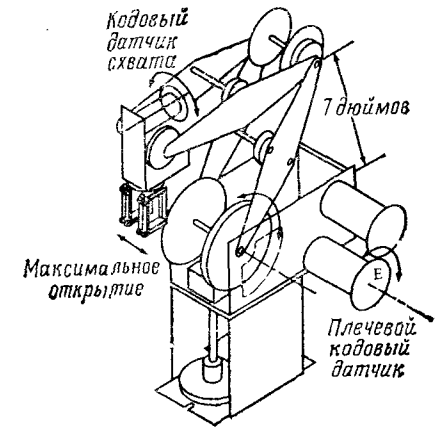


Рис. 2.12.3. Робот Rhino XR-2. (С разрешения Unimation Robots, Inc.)

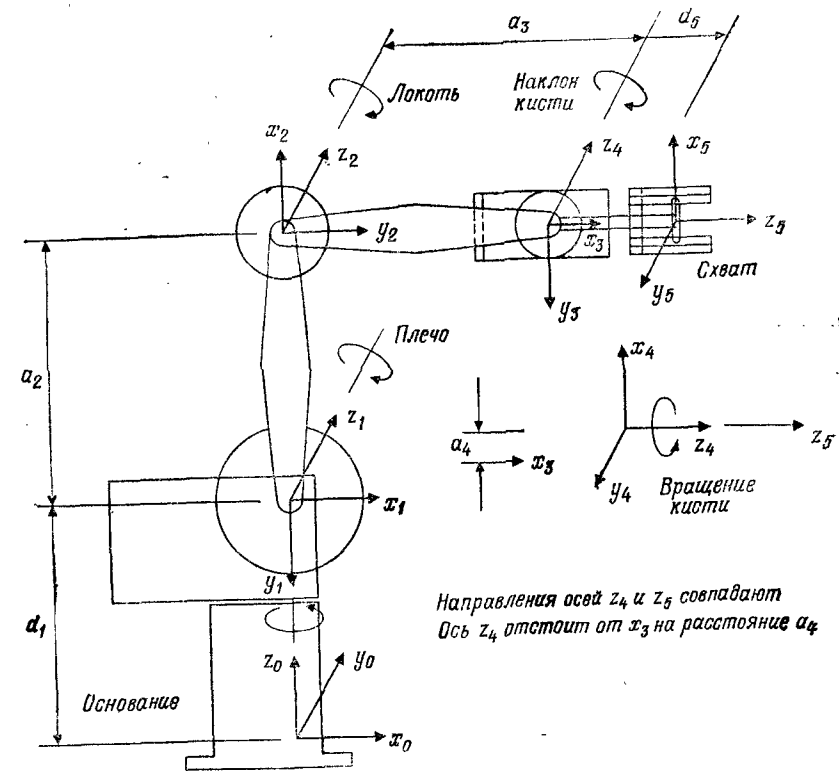


Рис. 2.12.4. Схематическое изображение манипулятора Rhino XR-2 и его систем координат в сочленениях.

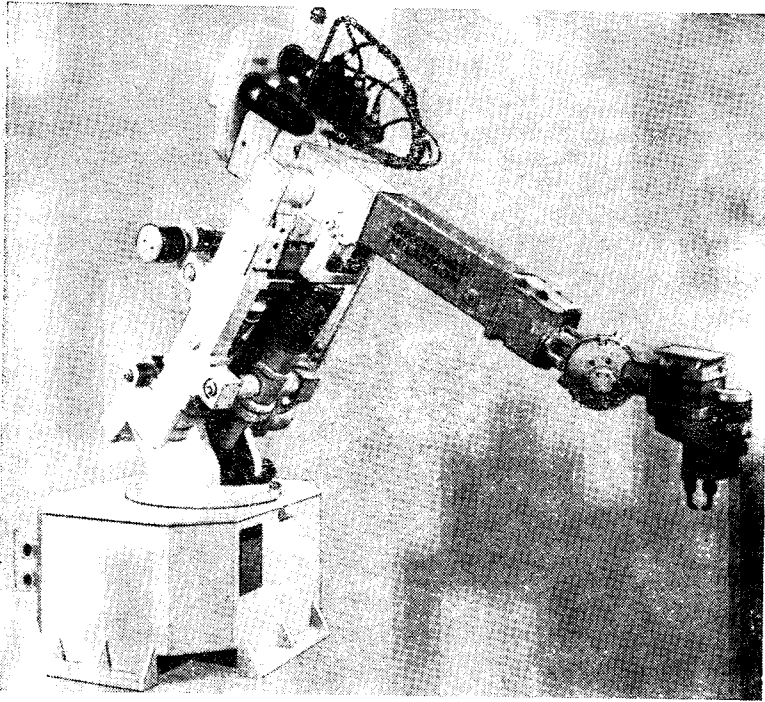


Рис. 2.12.5. Робот Т³-766. (С разрешения Cincinnati Milacron.)

навита — Хартенберга, описывающие расположение звеньев:

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12.159)$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12.160)$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12.161)$$

$$A_3^4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & a_4 C_4 \\ S_4 & 0 & C_4 & a_4 S_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12.162)$$

$$A_4^5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12.163)$$

Уравнение обратной задачи кинематики теперь имеет вид

$$T_0^5 = A_0^1 A_1^2 A_2^3 A_3^4 A_4^5, \quad (2.12.164)$$

где матрица T_0^5 известна и равна

$$T_0^5 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12.165)$$

Теперь задача заключается в том, чтобы выразить пять неизвестных $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ и θ_5 через элементы матрицы положения T_0^5 и другие параметры конструкции. Обратную задачу кинематики можно решить, просто расписав поэлементно уравнение (2.12.164). Тогда получим следующие соотношения:

$$n_x = C_1 C_{234} C_5 + S_1 S_5, \quad (2.12.166)$$

$$o_x = -C_1 C_{234} S_5 + S_1 C_5, \quad (2.12.167)$$

$$a_x = -C_1 S_{234}, \quad (2.12.168)$$

$$p_x = -d_5 C_1 S_{234} + a_4 C_1 C_{234} + a_3 C_1 C_{23} + a_2 C_1 C_2, \quad (2.12.169)$$

$$n_y = S_1 C_{234} C_5 - C_1 S_5, \quad (2.12.170)$$

$$o_y = -S_1 C_{234} S_5 - C_1 C_5, \quad (2.12.171)$$

$$a_y = S_1 S_{234}, \quad (2.12.172)$$

$$p_y = -d_5 S_1 S_{234} + a_4 S_1 C_{234} + a_3 S_1 C_{23} + a_2 S_1 C_2, \quad (2.12.173)$$

$$n_z = -S_{234} C_5, \quad (2.12.174)$$

$$o_z = S_{234} S_5, \quad (2.12.175)$$

$$a_z = -C_{234}, \quad (2.12.176)$$

$$p_z = -d_5 C_{234} - a_4 S_{234} - a_3 S_{23} - a_2 S_2 + d_1. \quad (2.12.177)$$

Из формул (2.12.176) следует

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \arccos(-a_z). \quad (2.12.178)$$

Умножим выражение (2.12.169) на S_1 и (2.12.173) на C_1 , а затем из первого полученного выражения вычтем второе; при этом получим

$$S_1 p_x = C_1 p_y = 0 \text{ при } \theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{p_y}{p_x}\right). \quad (2.12.179)$$

Далее, если $S_{234} \neq 0$, то из формул (2.12.174) и (2.12.175) получаем

$$\theta_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-o_z}{n_z}\right) \text{ и } S_{234} \neq 0, \quad (2.12.180)$$

но если $S_{234} = 0$ (вырожденный случай), то $\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$ (соответственно $\pm n_l$) (вертикальная ориентация схвата для Rhino). Тогда $C_{234} = 1$ (соответственно ± 1). Из формул (2.12.166) и (2.12.167) имеем

$$n_x = \pm C_1 C_3 + S_1 S_3 = \cos(\theta_1 \mp \theta_3), \quad (2.12.181)$$

$$o_x = \mp C_1 S_3 + S_1 C_3 = \sin(\theta_1 \mp \theta_3). \quad (2.12.182)$$

Следовательно,

$$\theta_1 \pm \theta_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{o_x}{n_x}\right), \text{ если } S_{234} = 0. \quad (2.12.183)$$

Из формул (2.12.169) и (2.12.173) можно показать, что

$$C_1 p_x + S_1 p_y = -d_5 S_{234} + a_1 C_{234} + a_2 C_2 + a_3 C_{23}, \quad (2.12.184)$$

а из формул (2.12.177) и (2.12.184) можно увидеть, что

$$a_2 S_2 + a_3 S_{23} = d_1 - d_5 C_{234} - a_1 S_{234} - p_z = \alpha, \quad (2.12.185)$$

$$a_2 C_2 + a_3 C_{23} = C_1 p_x + S_1 p_y + d_5 S_{234} - a_1 C_{234} = \beta, \quad (2.12.186)$$

где α и β являются известными величинами, так как $\theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ уже известна. Из формул (2.12.185) и (2.12.186) можно показать, что

$$\alpha^2 + \beta^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 C_3, \text{ т. е.} \quad (2.12.187)$$

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3}\right). \quad (2.12.188)$$

Решение с использованием функции арккосинуса в данном случае приемлемо, так как легко показать, что аргумент не превосходит ± 1 . Вообще же говоря, решения с использованием арктангенса предпочтительнее, так как в этом случае аргумент

охватывает всю область от $-\infty$ до $+\infty$. Расписав подробнее соотношения (2.12.185) и (2.12.186), получим

$$a_3(S_2 C_3 + C_2 S_3) + a_2 S_2 = \alpha, \quad (2.12.189)$$

$$a_3(C_2 C_3 - S_2 S_3) + a_2 C_2 = \beta. \quad (2.12.190)$$

Умножим выражение (2.12.189) на S_2 и (2.12.190) на C_2 , а затем сложим:

$$a_3 C_3 + a_2 = \alpha S_2 + \beta C_2. \quad (2.12.191)$$

Теперь умножим выражение (2.12.189) на C_2 и (2.12.190) на S_2 , а затем из первого полученного выражения вычтем второе, что даст

$$a_3 S_3 = \alpha C_2 - \beta S_2. \quad (2.12.192)$$

Умножив выражение (2.12.191) на β и (2.12.192) на α и сложив полученные выражения, получим

$$\beta(a_3 C_3 + a_2) + \alpha a_3 S_3 = (\alpha^2 + \beta^2) C_2. \quad (2.12.193)$$

Умножим выражение (2.12.191) на α и (2.12.192) на β , а затем из первого полученного выражения вычтем второе, что даст

$$\alpha(a_3 C_3 + a_2) - \beta a_3 S_3 = (\alpha^2 + \beta^2) S_2. \quad (2.12.194)$$

Теперь из формул (2.12.193) и (2.12.194) находим

$$\theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha(a_3 C_3 + a_2) - \beta a_3 S_3}{\beta(a_3 C_3 + a_2) + \alpha a_3 S_3}\right) \quad (2.12.195)$$

и из формул (2.12.178), (2.12.188) и (2.12.195) получаем

$$\theta_4 = \arccos(-a_z) - \arccos\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha(a_3 C_3 + a_2) - \beta a_3 S_3}{\beta(a_3 C_3 + a_2) + \alpha a_3 S_3}\right). \quad (2.12.196)$$

На этом решение обратной задачи кинематики для Rhino XR-2 заканчивается.

В табл. 2.12.2 приведены соотношения для решения обратной задачи кинематики, а также указаны области допустимых значений углов для любых движений в сочленениях робота Rhino XR-2.

Аппаратное обеспечение Rhino XR-2 спроектировано так, что, когда включается двигатель плечевого сочленения для осуществления поворота $\theta_2 = \delta$, одновременно включается двигатель локтевого сочленения для выполнения поворота $\theta_3 = -\delta$, т. е. Rhino работает таким образом, что сумма $\theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ остается

Таблица 2.12.2. Соотношения для решения обратной задачи кинематики для робота Rhino XR-2

Сочле-нения	Решения	Допустимые значения углов
1	$\theta_1 = \text{arctg} \left(\frac{p_y}{p_x} \right)$	$-180^\circ \leq \theta_1 \leq 180^\circ$
2	$\theta_2 = \text{arctg} \left(\frac{\alpha (a_3 C_3 + a_2) - \beta a_3 S_3}{\beta (a_3 C_3 + a_2) + \alpha a_3 S_3} \right)$	$-90^\circ \leq \theta_2 \leq 90^\circ$
3	$\theta_3 = \arccos \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} \right)$	$0^\circ \leq \theta_3 \leq 180^\circ$
4	$\theta_4 = \arccos(-a_z) - \arccos \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} \right) - \text{arctg} \left(\frac{\alpha (a_3 C_3 + a_2) - \beta a_3 S_3}{\beta (a_3 C_3 + a_2) + \alpha a_3 S_3} \right)$	$-270^\circ \leq \theta_4 \leq 90^\circ$
5	$\theta_5 = \text{arctg} \left(\frac{-o_z}{n_z} \right)$, если $S_{234} \neq 0$ $\pm \theta_5 = \text{arctg} \left(\frac{p_y}{p_x} \right) - \text{arctg} \left(\frac{o_x}{n_x} \right)$, если $S_{234} = 0$	$-180^\circ \leq \theta_5 \leq 180^\circ$

постоянной при включении двигателей как плечевого, так и локтевого сочленений.

Это означает, что на ориентацию кисти по отношению к основанию не влияют ни двигатель плечевого, ни двигатель локтевого сочленений. Таким образом, для задания суммы $\theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ может быть использован двигатель привода качания кисти, двигатель локтевого сочленения может быть применен для задания суммы $\theta_2 + \theta_3$, и, наконец, двигатель плечевого

Таблица 2.12.3. Управление углами со стороны двигателей манипулятора

Двигатель	Функция	Управляемые углы
A	Пальцы	—
B	Вращение кисти	θ_5
C	Наклон кисти	$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4$
D	Локоть	$\theta_2 + \theta_3$
E	Плечо	θ_2
F	Основание	θ_1
G	Поворотный стол	—
H	Запасной двигатель	—

сочленения может быть использован для задания значения θ_2 . В табл. 2.12.3 показано, как влияют двигатели Rhino XR-2 на углы в сочленениях.

Теперь рассмотрим вектор начальных значений углов $\theta^h = [0^\circ \ -90^\circ \ 90^\circ \ -90^\circ \ 0^\circ]^T$. Обозначим углы в приводах как $\varphi^h \equiv [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4 \ \varphi_5]^T$. Заметим, что $\varphi_1 = \theta_1$, $\varphi_2 = \theta_2$, $\varphi_3 = \theta_3 + (\theta_2 - \theta_2^h) = \theta_2 + \theta_3 + 90^\circ$, $\varphi_4 = \theta_4 + (\theta_2 - \theta_2^h) + (\theta_3 - \theta_3^h) = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \theta_{234}$ и $\varphi_5 = \theta_5$. Очевидно, что

$$\varphi^h = \begin{bmatrix} 0 \\ -90 \\ 90 \\ -90 \\ 0 \end{bmatrix} = \theta^h. \quad (2.12.197)$$

Следовательно,

$$\Delta\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta\theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12.198)$$

где $\Delta\varphi$ и $\Delta\theta$ — приращения углов в приводах и сочленениях соответственно.

Для решения обратной задачи кинематики можно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм 2.12.1.

1. Вычислить θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 и θ_5 , используя табл. 2.12.2.
2. Повернуть двигателем В кисть до положения $\varphi_5 = \theta_5$.
3. Обеспечить двигателем С качание кисти до положения $\varphi_4 = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$.
4. Перевести двигателем D локтевое сочленение в положение $\varphi_3 = \theta_2 + \theta_3$.
5. Перевести двигателем E плечевое сочленение в положение $\varphi_2 = \theta_2$.
6. Перевести двигателем F основание робота в положение $\varphi_1 = \theta_1$.

Приведенная процедура может использоваться для вычисления желаемых значений компонент вектора углов в сочленениях θ и выражения их через углы в приводах. Углы в приводах затем могут быть отработаны при использовании (в устройстве управления) соответствующих команд управления сочленениями.

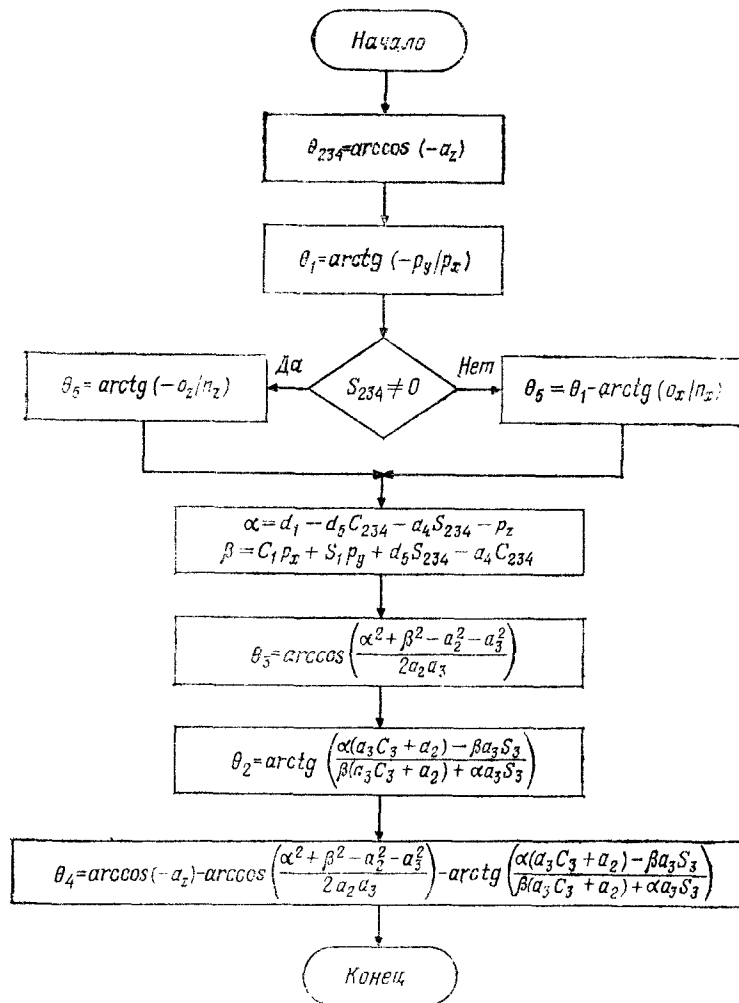


Рис. 2.12.6. Алгоритм решения обратной задачи кинематики для Rhino XR-2.

На рис. 2.12.6 представлена блок-схема вычислений для осуществления этой цели.

Основываясь на алгоритме, приведенном на рис. 2.12.6, может быть создана программа для ЭВМ, производящая решение обратной задачи кинематики для выполнения движений роботом Rhino XR-2. Эта программа рассматривается в гл. 9, посвященной программированию роботов. В гл. 9 приводятся также и другие программы движения.

2.13. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ КИНЕМАТИКИ

Иногда использование некоторых соображений, относящихся к геометрии манипуляционных роботов, значительно упрощает процедуру вывода для этих роботов соотношений обратной задачи кинематики. Геометрический подход может быть распространен на решение обратной задачи кинематики для большого числа промышленных роботов-манипуляторов. Существует большое количество геометрических методик, пригодных для этой цели. Однако наиболее общей является процедура, при которой решение обратной задачи кинематики проводится в два этапа. На первом этапе вычисляется вектор положения узла схвата робота, используемый для поиска решения для первых трех со-

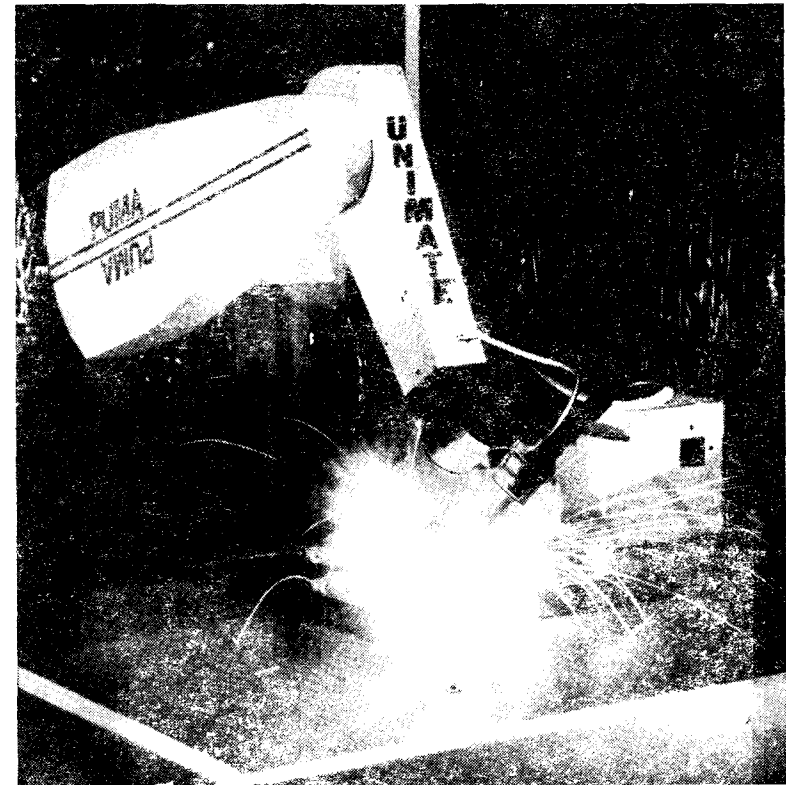


Рис. 2.13.1. Робот PUMA 600. (С разрешения Unimation Robots.)

членений. Соотношения, полученные на первом этапе, применяются на втором этапе для решения обратной задачи кинематики для трех последних сочленений. В следующем примере эта методика используется применительно к манипуляционному роботу PUMA 600 (рис. 2.13.1).

Пример 2.13.1 ■

В соответствии с рис. 2.13.2 решить обратную задачу кинематики для манипуляционного робота серии PUMA 600, полагая, что a_3 пренебрежимо мало (см. задачу 25 домашнего задания для случая, когда $a_3 \neq 0$; a_3 является смещением между осями координат y_3 и z_2 и равняется приблизительно 20 мм).

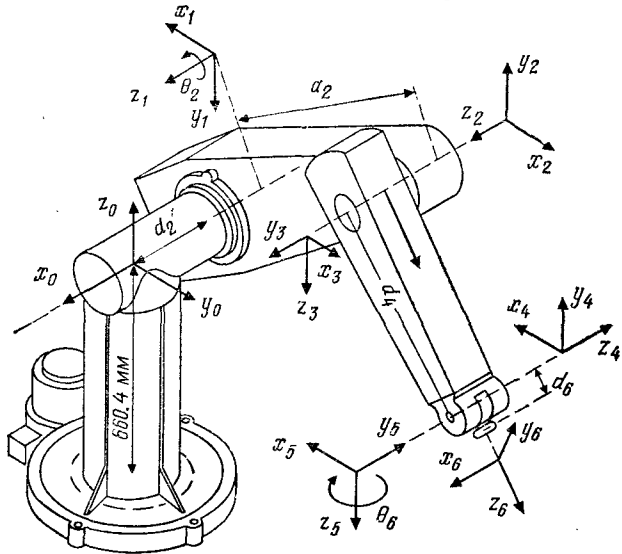


Рис. 2.13.2. Новое расположение систем координат для робота PUMA 600, гая, что a_3 пренебрежимо мало (см. задачу 25 домашнего задания для случая, когда $a_3 \neq 0$; a_3 является смещением между осями координат y_3 и z_2 и равняется приблизительно 20 мм).

Решение. На основании рис. 2.13.2 и алгоритма (2.10.1) можно построить табл. 2.13.1 обобщенных параметров.

Таблица 2.13.1. Кинематические параметры манипулятора PUMA 600

Сочленение i	θ_i	α_i	a_i (мм)	d_i (мм)	Диапазон
1	θ_1	-90°	0	0	$-160^\circ, 160^\circ$
2	θ_2	0°	432	149.5	$-225^\circ, -45^\circ$
3	θ_3	90°	0	0	$-45^\circ, -225^\circ$
4	θ_4	-90°	0	432.0	$-110^\circ, -170^\circ$
5	θ_5	90°	0	0	$-100^\circ, -100^\circ$
6	0	0°	0	56.5	$-266^\circ, 266^\circ$

На основании табл. 2.13.1 обобщенных параметров получаем следующие А-матрицы:

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.13.1)$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3^4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.13.2)$$

$$A_4^5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5^6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.13.3)$$

Теперь может быть получена матрица $T_0^6 = A_0^1 A_1^2 A_2^3 A_3^4 A_4^5 A_5^6$, так как

$$A_{11} = n_x = C_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6), \quad (2.13.4)$$

$$A_{21} = n_y = S_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] + C_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6), \quad (2.13.5)$$

$$A_{31} = n_z = -S_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - C_{23} S_5 C_6, \quad (2.13.6)$$

$$A_{12} = o_x = C_1 [-C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (-S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6), \quad (2.13.7)$$

$$A_{22} = o_y = S_1 [-C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] + C_1 (-S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6), \quad (2.13.8)$$

$$A_{32} = o_z = S_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - C_{23} S_5 C_6, \quad (2.13.9)$$

$$A_{13} = a_x = C_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) - S_1 S_4 S_5, \quad (2.13.10)$$

$$A_{23} = a_y = S_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + C_1 S_4 S_5, \quad (2.13.11)$$

$$A_{33} = a_z = -S_{23} C_4 S_5 + C_{23} C_5, \quad (2.13.12)$$

$$A_{14} = p_x = C_1 [56.5 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + 432 S_{23} + 432 C_2] - S_1 (56.5 S_4 S_5 + 149.5), \quad (2.13.13)$$

$$A_{24} = p_y = S_1 [56.5 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + 432 S_{23} + 432 C_2] + C_1 (56.5 S_4 S_5 + 149.5), \quad (2.13.14)$$

$$A_{34} = p_z = 56.5 (C_{23} C_5 - S_{23} C_4 S_5) + 432 C_{23} - 432 S_2. \quad (2.13.15)$$

Применим теперь геометрический подход для решения обратной задачи кинематики. Сначала определим вектор положения, направленный из плечевого сочленения к узлу схвата, с помощью которого найдем θ_1 , θ_2 и θ_3 . Затем полученные результаты используем при определении θ_4 , θ_5 и θ_6 для оставшейся части исполнительного механизма, т. е. для схвата. Заметим, что вектор положения, исходящий из начала системы координат основания к узлу схвата, может быть определен как вектор \mathbf{p}^* , такой, что

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - d_6 \mathbf{a}, \quad (2.13.16)$$

и, очевидно, является известной величиной. Отметим, что \mathbf{p}^* образует последний столбец матрицы $\mathbf{T}_0^4 = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_3^4$. Тогда легко можно показать, что

$$p_x^* = C_1(a_2 C_2 + d_4 S_{23}) - d_2 S_1, \quad (2.13.17)$$

$$p_y^* = S_1(a_2 C_2 + d_4 S_{23}) + d_2 C_1, \quad (2.13.18)$$

$$p_z^* = d_4 C_{23} - a_2 S_2. \quad (2.13.19)$$

Из формул (2.13.17) и (2.13.18) можно получить

$$\theta_1 = \arctg \left(\frac{\pm p_y (\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^* - p_x^{*2} - d_2^2)^{1/2} - d_2 p_x^*}{\pm p_x (\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^* - p_x^{*2} - d_2^2)^{1/2} + d_2 p_y^*} \right), \quad (2.13.20)$$

$$\theta_2 = \arctg \left(\frac{-[p_z^* (a_2 + d_4 S_3) + (d_4 C_3) \pm (\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^* - p_z^{*2} - d_2^2)^{1/2}]}{p_z (d_4 C_3) - (a_2 + d_4 S_3) [\pm (\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^* - p_z^{*2} - d_2^2)^{1/2}]} \right), \quad (2.13.21)$$

$$\theta_3 = \arctg \left(\frac{\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^* - d_4^2 - a_2^2 + d_2^2}{\pm [4d_4^2 a_2^2 - (\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^* - d_4^2 - a_2^2 - d_2^2)^2]^{1/2}} \right). \quad (2.13.22)$$

Различные комбинации знаков приводят к различным возможным конфигурациям, представляющим решение. Из формул (2.13.10) и (2.13.11) замечаем, что

$$C_1 a_y - S_1 a_x = S_4 S_5, \quad (2.13.23)$$

и

$$C_1 C_{23} a_x + S_2 C_{23} a_y = C_{23} C_4 C_5 + C_{23} S_{23} C_5, \quad (2.13.24)$$

а из формул (2.13.24) и (2.13.12) получаем

$$C_1 C_{23} a_x + S_2 C_{23} a_y - S_{23} a_z = C_4 S_5, \quad (2.13.25)$$

Таким образом, из формул (2.13.23) и (2.13.25) находим, что

$$\theta_4 = \arctg \left(\frac{C_1 a_y - S_1 a_x}{C_1 C_{23} a_x + S_1 C_{23} a_y - S_{23} a_z} \right). \quad (2.13.26)$$

Аналогично из формул (2.13.10), (2.13.11) и (2.13.13) можно показать, что

$$(C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_x + (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_y - C_4 S_{23} a_z = S_5, \quad (2.13.27)$$

$$C_1 S_{23} a_x + S_1 S_{23} a_y + C_{23} a_z = C_5 \quad (2.13.28)$$

и, следовательно,

$$\theta_5 = \arctg \left(\frac{(C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_x + (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_y - C_4 S_{23} a_z}{C_1 S_{23} a_x + S_1 S_{23} a_y + C_{23} a_z} \right). \quad (2.13.29)$$

Заметим, что при $\theta_5 = 0$ решение является вырожденным, т. е. робот превращается в исполнительный механизм с пятью степенями подвижности и, как показано ниже, требует специального обращения

Вырожденный случай: $\theta_5 = 0$. В этом случае величина угла θ_4 , соответствующая первой степени подвижности (вращения) кисти, становится по существу произвольной, и поэтому мы выбираем текущее значение; зададим $\theta_4 = 0$. Тогда сумма величин углов θ_4 и θ_6 , соответствующих первой и второй степеням подвижности (вращения) кисти, определяет направление вектора \mathbf{o} . Остальные соотношения в основном остаются теми же. В частности, выражение для θ_6 можно получить из формул (2.13.4) — (2.13.6):

$$(-S_1 C_4 - C_1 C_{23} S_4) n_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) n_y + S_4 S_{23} n_z = S_6, \quad (2.13.30)$$

$$(-S_1 C_4 - C_1 C_{23} S_4) o_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) o_y + S_4 S_{23} o_z = C_6. \quad (2.13.31)$$

Таким образом,

$$\theta_6 = \arctg \left(\frac{(-S_1 C_4 - C_1 C_{23} S_4) n_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) n_y + S_4 S_{23} n_z}{(-S_1 C_4 - C_1 C_{23} S_4) o_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) o_y + S_4 S_{23} o_z} \right). \quad (2.13.32)$$

Этим завершается решение обратной задачи кинематики для вектора углов в сочленениях исполнительного механизма робота PUMA при заданном кинематическом положении системы координат схвата.

В заключение нужно заметить, что в настоящее время имеются некоторые обобщенные алгоритмы, позволяющие пользователю получать довольно точные решения обратной задачи кинематики для исполнительных механизмов общего вида. Однако природа таких алгоритмов существенно итеративна и решение

обратной задачи в реальном масштабе времени для манипуляционного робота общего вида в настоящее время невозможно¹⁾.

ЛИТЕРАТУРА

1. Campbell D., An Iterative Algorithm for the Inverse Kinematics Solution of a General n -axis Robot Manipulator Using Powell's Optimization Technique, M. Sc. thesis, Department of Mechanical Engineering, Clarkson University, Potsdam, NY (Aug.), 1984.
2. Denavit J., Hartenberg R. S., A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices, *ASME J. Appl. Mech.*, 22, 215—221, 1955.
3. Duffy J., Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators, Wiley, New York, 1980.
4. Duffy J., Rooney J., A Foundation for a Unified Theory of Analysis of Spatial Mechanisms, *J. Eng. Indus. Trans. ASME, Ser. B*, 97(4), 1159—1164, 1975.
5. Goldenberg A. A., Lawrence D. L., A Generalized Solution to the Inverse Kinematics of Robot Manipulators, *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 107, 103—106, 1985.
6. Goldenberg A. A., Benhabib B., Fenton R. G., A Complete Generalized Solution to the Inverse Kinematics of Robots, *IEEE J. Robotics Automation*, RA-1(1), 14—20, 1985.
7. Hollerbach J. M., Gideon Sahar, Wrist-Partitioned, Inverse Kinematic Accelerations and Manipulator Dynamics, *Int. J. Robotics Res.*, 4, 61—76, 1983.
8. Lee C. S. G., Ziegler M., Geometric Approach in Solving Inverse Kinematics of PUMA Robots, *IEEE Trans. Aerospace & Electron. Syst.*, AES-20(6), 695—706, 1984.
9. Lumelsky V. J., Iterative Procedure for Inverse Coordinate Transformation for One Class of Robots, Rept. No. 82CRD332, General Electric Co., (Feb.), 1983.
10. Paul R. P., Kinematics Control Equations for Simple Manipulators, *IEEE Trans. Syst. Man & Cyberne.*, SMC-11(6), 449—455, 1981.
11. Paul R. P., Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control, M. I. T. Press, Cambridge, MA, 1981.
12. Pieper D. L., The Kinematics of Manipulators Under Computer Control, Ph. D. Dissertation, Mechanical Engineering Department, Stanford University, 1969, также AIM72.
13. Pieper D. L., Roth B., The Kinematics of Manipulators Under Computer Control, Proceedings of the Second International Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Zakopane, Poland, vol. 2, pp. 159—168, 1969.
14. Powell M. J. D., An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables Without Calculating Derivatives, *Comput. J.*, 155—164, 1964.
15. Shahinpoor M., The Exact Inverse Kinematics Solutions for the Rhino XR-2 Robot Manipulators, *Robotics Age J. Intelligent Machines*, 7(8), 6—14, 1985.
16. Tsai L. W., Morgan A. P., Solving the Kinematics of the Most General Six- and Five-Degree of Freedom Manipulators by Continuation Methods, General Motors Res. Rept. No. GMR-4631 (Oct.), 1984.

¹⁾ Существуют реально работающие роботы, в которых используются итерационные процедуры решения обратной кинематической задачи. — Прим. ред.

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Для заданной матрицы положения T_0^n , такой, что

$$T_0^n = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

найдите матрицу, обратную T_0^n , используя традиционные методы, рассмотренные в разд. 2.4.

2. Опишите набор преобразований, определяющих отражение объекта в зеркале на расстоянии d от зеркала.

3. Найдите матрицу сложного однородного преобразования, описывающего следующие движения:

- (а) перенос на расстояние a вдоль оси w ;
- (б) поворот на угол θ относительно оси x ;
- (в) поворот на угол ψ относительно оси u ;
- (г) перенос на расстояние b вдоль оси y ;
- (д) поворот на угол φ относительно оси z .

Ответ: $H = R(z, \varphi)T(y, b)R(x, \theta)T(w, a)R(u, \psi)$.

4. Схват робота сначала расположен вдоль оси y таким образом, что направление схлопывания губок совпадает с направлением оси z , которая совпадает с осью u схвата, как показано на рис. 3 2.4. Схват затем перемещается на 4 единицы вдоль оси y , поворачивается вокруг оси z на -90° , затем вокруг оси w на 150° и, наконец, вокруг оси u на -90° . Найдите:

- (а) суммарное однородное преобразование H ;
- (б) конечное положение схвата.

5. Для схвата, описанного в задаче 4, определите последовательность поворотов относительно осей x , y и z , которые приведут к тому же конечному положению.

Ответ: Сначала $R(x, -90)$, затем $R(y, 150)$, потом $T(y, 4)$ и, наконец, $R(z, -90)$.

6. Предположим, что схват в задачах 4 и 5 держит коробку с размерами 6, 4 и 2, центр которой находится в точке $p \equiv [0 \ 3 \ 0 \ 1]^T$, как показано на рис. 3 2.6. Найдите:

- (а) матрицу начальной конфигурации (положения) для коробки;
- (б) матрицу конечной конфигурации после осуществления над коробкой преобразования H из задачи 1.

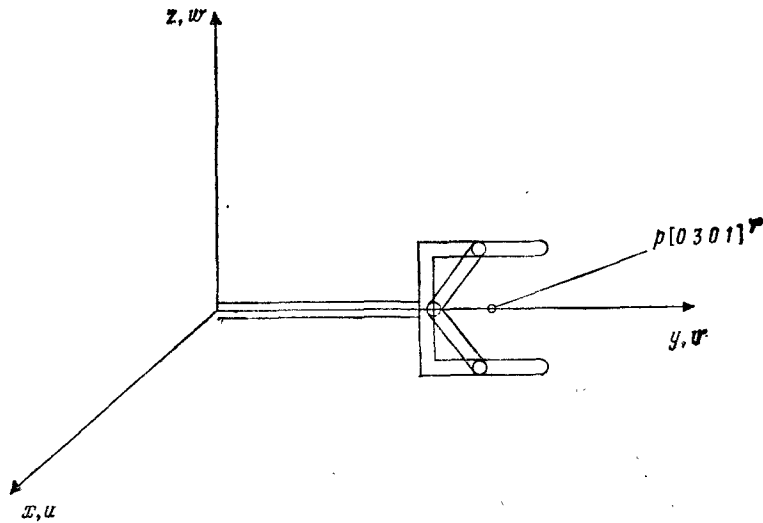


Рис. 32.4. Конфигурация схвата.

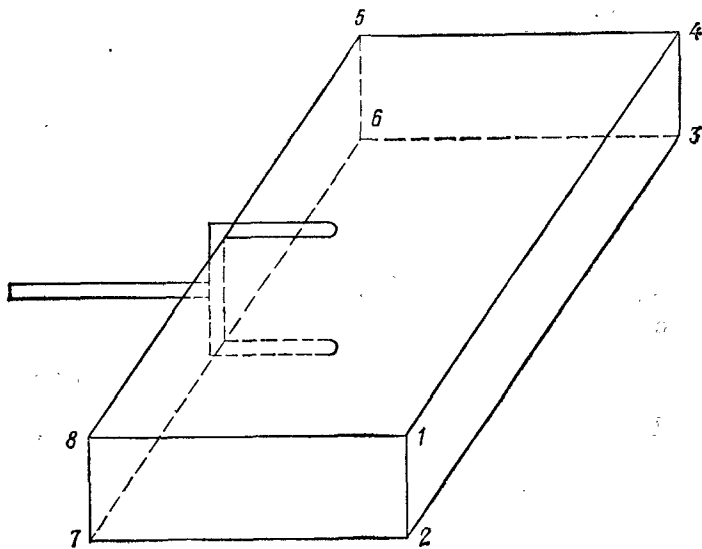


Рис. 32.6.

Ответы:

$$(a) (\text{Коробка})_{\text{начальн}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) (\text{Коробка})_{\text{конечн}} = \mathbf{H} (\text{Коробка})_{\text{начальн}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 \\ 5.1 & 5.1 & -0.1 & -0.1 & -2.1 & -2.1 & -3.1 & 3.1 \\ 2.8 & 2.8 & 5.8 & 5.8 & 2.36 & 2.36 & -0.63 & -0.63 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Определите новое положение схвата, а также матрицу положения коробки, если схват поворачивается на 50° относительно оси, единичный вектор которой $\mathbf{k} = [(2)^{1/2}/2 \ 0 \ (2)^{1/2}/2 \ 1]^T$.

Ответ: $\mathbf{p} \equiv [-1.625 \ 1.929 \ 1.625 \ 1]^T$ и

$$(\text{Коробка})_{\text{конечн}} = \mathbf{H} (\text{Коробка})_{\text{начальн}},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.8215 & -0.5416 & 0.1785 & 0 \\ 0.5416 & 0.643 & -0.5416 & 0 \\ 0.1785 & 0.5416 & 0.8215 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Определите направление \mathbf{k} и угол θ поворота относительно этого направления, при которых схват перемещается из начальной точки $\mathbf{p}_0 \equiv [0 \ 0 \ 4 \ 1]^T$ в конечное положение $\mathbf{p} \equiv [2 \ 2 \ (8)^{1/2} \ 1]^T$.

9. Схват находится первоначально в точке $\mathbf{p} \equiv [1 \ 1 \ 3 \ 1]^T$. Затем он поворачивается относительно оси z на -90° , потом относительно собственной оси v — на 150° и, наконец, относительно собственной оси u на -90° (рис. 32.9).

(а) Найдите результирующее однородное преобразование \mathbf{H} .

(б) Найдите конечное положение схвата.

Ответы:

$$(a) \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \mathbf{p} \equiv [3 \ 1.366 \ 0.366 \ 1]^T.$$

10. Для робота модели Rhino XR-2, находящегося в начальном положении (рис. 32.10), используйте методику Денавита — Хартенберга для построения соответствующей таблицы обобщенных параметров

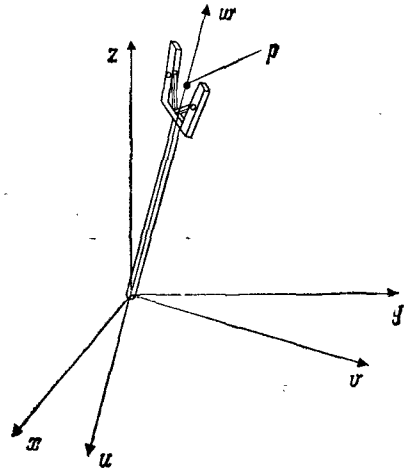


Рис. 32.9.

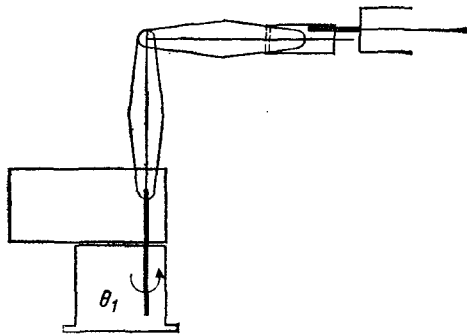


Рис. 32.10.

щенных параметров d_i , a_i , α_i и θ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, при помощи соответствующего набора систем координат сочленений.

11. Робот, изображенный на рис. 32.11, находится в своем начальном положении. Оси перемещений такие, как показано на рисунке.

(а) Завершите описание всех систем координат сочленений назначением надлежащего набора осей x и y .

(б) Постройте таблицу обобщенных параметров α_i , θ_i , a_i и d_i для этого робота.

(в) При $\theta = [90^\circ \ 0^\circ \ 90^\circ \ 0^\circ \ 90^\circ]$ определите матрицу T_0^5 .

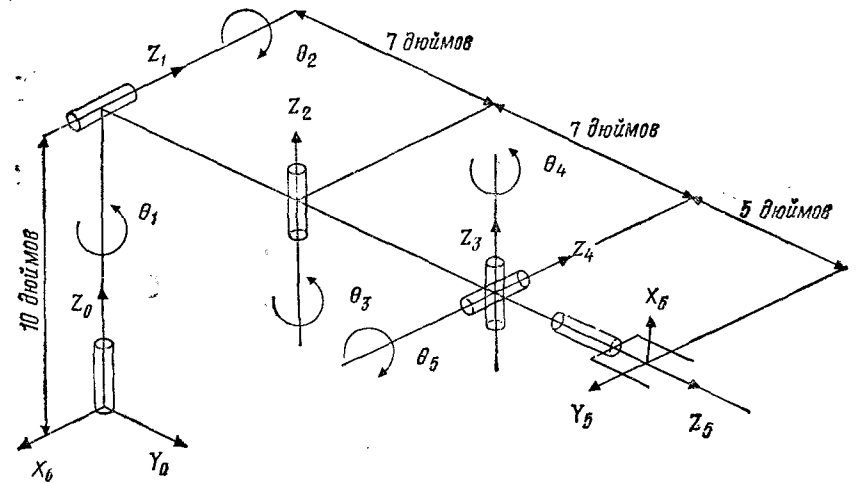


Рис. 32.11.

12. Робот-манипулятор с шестью степенями подвижности описан в табл. 32.12.1, в которой даны параметры систем координат сочленений. Найдите решение обратной задачи кинематики относительно углов в сочленениях $\theta_i \equiv (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)^T$.

Таблица 32.12.1.

Сочленение i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	θ_1	-90°	0	0
2	θ_2	0°	a_2	d_2
3	θ_3	90°	0	0
4	θ_4	-90°	0	d_3
5	θ_5	90°	0	0
6	θ_6	0°	0	d_6

Предполагается, что положение и ориентация схвата, т. е. T_0^6 , по отношению к системе координат основания полностью

известны:

$$T_0^6 \equiv \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Для схвата робота в задаче 9 определите последовательность поворотов относительно осей x , y и z , которая приведет его в то же конечное положение.

Ответ: Сначала $R(x, -90)$, затем $R(y, 150)$ и, наконец, $R(z, -90)$.

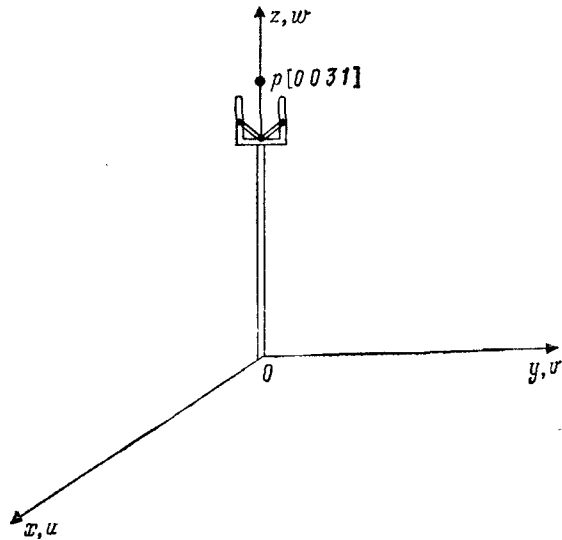


Рис. 32.15.

14. Предположим, что схват робота, первоначально расположенный в точке $p \equiv [1 \ 1 \ 3 \ 1]^T$, держит эллипсоид, большая ось которого имеет длину шесть единиц и направлена параллельно оси u , а малая ось имеет длину три единицы и направлена параллельно оси v (рис. 32.6). Центр эллипсоида находится в точке p . Определите конечную матрицу положения эллипсоида после однородного преобразования из задачи 6. (Подсказка: сначала опишите начальное положение матрицей 4×6 , затем умножьте на H , чтобы получить конечное положение.)

15. Схват первоначально расположен вдоль оси z , совпадающей с осью w схвата (рис. 32.15). Системы координат $0xyz$ и

$0uvw$ сначала совпадают. Схват поворачивается сначала относительно оси z на -90° , затем относительно оси v на 180° и, наконец, относительно оси u на -90° . Найдите результирующее преобразование вращения — качания RPY. Заметим, что

$$RPY(\varphi, 0, \psi) = R(z, -90) R(v, 180) R(u, -90).$$

Ответ:

$$RPY = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16. Какая последовательность поворотов приведет к такому же конечному положению, как в задаче 15, если поворот совершается относительно осей x , y и z ?

Ответ: Сначала $R(x, -90)$, затем $R(y, 180)$ и, наконец, $R(z, -90)$.

17. Предположим, что в предыдущих задачах схват держит куб единичного размера и куб первоначально ориентирован по

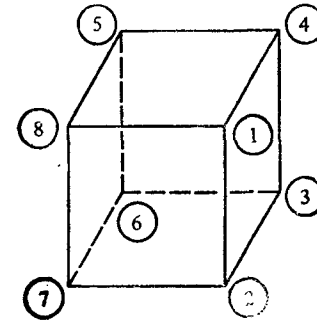


Рис. 32.17.

осям системы координат xuz с центром в точке $p \equiv [0 \ 0 \ 3 \ 1]^T$, являющейся также началом системы координат схвата (рис. 32.17). Определите конечную матрицу положения куба после преобразования RPY из задачи 1.

Ответ:

$$(Куб)_{конечн} = \begin{bmatrix} 3.5 & 2.5 & 2.5 & 3.5 & 3.5 & 2.5 & 2.5 & 3.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

18. Найдите новое положение точки p схвата, а также матрицу положения куба, если схват поворачивается на 45° относительно оси, единичный вектор которой равен $k \equiv [1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3} \ 1]^T$.

Ответы: $p_{\text{конечн}} = [1.52 \ -0.98 \ 2.42 \ 1]^T$,

(Куб) $_{\text{конечн}} =$

$$= \begin{bmatrix} 2.0177 & 1.5118 & 0.707 & 1.213 & 1.524 & 1.018 & 1.822 & 2.328 \\ -0.432 & -0.1212 & -0.627 & -0.938 & -1.74 & -1.43 & -0.926 & -1.34 \\ 2.914 & 2.1094 & 2.421 & 3.225 & 2.719 & 1.914 & 1.603 & 2.408 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Напишите программу на Бейсике для перемножения последовательности матриц размера 4×4 вида

$$A = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

20. Для исполнительного механизма с шестью степенями подвижности общего вида уравнениями обратной задачи кинематики относительно шести неизвестных θ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, обобщенного вектора являются следующие 12 уравнений:

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^6 \begin{bmatrix} C\theta_i & -Ca_i S\theta_i & Sa_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & Ca_i C\theta_i & -Sa_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & Sa_i & Ca_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В табл. 32.20.1 даны параметры систем координат сочленений. Заметим, что все значения α_i , a_i и d_i считаются известными. Найдите как можно больше решений задачи.

Таблица 32.20.1

Сочленение	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	θ_1	α_1	a_1	d_1
2	θ_2	α_2	a_2	d_2
3	θ_3	α_3	a_3	d_3
4	θ_4	α_4	a_4	d_4
5	θ_5	α_5	a_5	d_5
6	θ_6	α_6	a_6	d_6

Таблица 32.21.1

Сочленение	θ_i	α_i	d_i	a_i	Ca_i	Sa_i
1	θ_1	90°	0	0	0	1
2	θ_2	0°	0	a_2	1	0
3	θ_3	0°	0	a_3	1	0
4	θ_4	-90°	0	a_4	0	-1
5	θ_5	90°	0	0	0	1
6	θ_6	0°	0	0	1	0

21. Для простого манипулятора в табл. 32.21.1 даны обобщенные параметры. Получите решение обратной задачи кинематики.

22. Решите обратную задачу кинематики для робота модели Rhino XR-2 ($a_4 \neq 0$), если $\theta_2 + \theta_3 = 0$. Заметим, что это позволяет ориентировать схват робота в любом произвольном направлении, не обязательно перпендикулярном рабочей поверхности.

23. Манипуляционный робот с шестью степенями подвижности описывается обобщенными параметрами, приведенными

Таблица 32.23.1

Сочленение i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	θ_1	-90°	0	d_1
2	θ_2	0°	a_2	0
3	θ_3	0°	a_3	0
4	θ_4	90°	0	0
5	θ_5	0°	0	d_5
6	$\theta_6 = \pi$	0°	0	0

в табл. 32.23.1. Решите обратную задачу кинематики. Предполагается, что положение и ориентация схвата, т. е. матрица T_0^5 в системе координат основания полностью известны:

$$T_0^5 \equiv \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

24. Манипуляционный робот описывается обобщенными параметрами, приведенными в табл. 32.24.1.

Таблица 32.24.1

Сочленение	θ_i	a_i	a_i	d_i
1	θ_1	-90°	0	d_1
2	θ_2	0°	a_2	0
3	θ_3	0°	a_3	0
4	θ_4	-90°	a_4	0
5	θ_5	90°	0	d_5
6	θ_6	0°	0	d_6

(а) Задайте полностью и нарисуйте в подходящем масштабе системы координат.

(б) Решите обратную задачу кинематики.

25. В соответствии с примером 2.11.8 и табл. 2.11.6 решите обратную задачу кинематики для робота серии PUMA 600 при $a_3 \neq 0$.

Однородные дифференциальные преобразования в робототехнике

3.1. ВВЕДЕНИЕ

В робототехнике имеется множество важных приложений, требующих некоторых знаний в области однородных дифференциальных преобразований. В основном знание однородных дифференциальных преобразований становится существенно важным, когда сколь-либо важны малые (дифференциальные) изменения матриц общего положения (положения и ориентации) — при малых (дифференциальных) перемещениях объектов, схватов роботов, сочленений роботов, камер и любого другого оборудования, связанного с робототехнической системой. Особую важность имеют перемещения сочленений и преобразования скоростей и ускорений. Как уже отмечалось ранее, с манипуляционными роботами связываются два различных кинематических пространства. Одним из них является пространство координат сочленений, а другим — декартово пространство конечного звена, или схвата.

В робототехнических приложениях всегда представляет интерес получение преобразований, связывающих кинематические и динамические соотношения в пространстве координат сочленений с соотношениями в декартовом пространстве схвата. Например, если даны скорости сочленений в виде вектора скоростей сочленений, то каков будет обобщенный вектор скоростей конечного звена? Аналогично если дан вектор ускорений сочленений, то какой будет обобщенный вектор ускорений конечного звена? Ответы на эти вопросы будут даны в гл. 5 и 7.

Во многих робототехнических приложениях система технического зрения, например телекамера (с возможной оцифровкой изображения), отслеживает перемещения как объекта, так и манипулятора, чтобы выполнять целый ряд сборочных задач,

таких, как запрессовка или позиционирование деталей. Малые изменения положений как объекта, так и манипулятора должны постоянно передаваться в микроЭВМ, чтобы обеспечить выполнение различных сборочных процессов. Таким образом, было бы желательно уметь вычислять дифференциальные изменения при помощи подходящих дифференциальных преобразований. Дифференциальные приращения важны также и потому, что они без труда могут быть связаны с соответствующими дифференциальными приращениями вектора координат сочленений $\theta_i \equiv [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$. Такие дифференциальные приращения могут быть связаны с угловыми скоростями и ускорениями. Рассмотрим, например, обобщенную матрицу Денавита — Хартенберга \mathbf{A}_{i-1}^i , которая имеет вид

$$\mathbf{A}_{i-1}^i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -Ca_i S\theta_i & Sa_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & Ca_i C\theta_i & -Sa_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & Sa_i & Ca_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.1)$$

Заметим, что

$$\frac{d\mathbf{A}_{i-1}^i}{d\theta_i} = \begin{bmatrix} -S\theta_i & -Ca_i C\theta_i & Sa_i C\theta_i & -a_i S\theta_i \\ C\theta_i & -Ca_i S\theta_i & +Sa_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{i-1}^i. \quad (3.1.2)$$

Кроме того, справедливо также и то, что

$$\frac{d\mathbf{A}_{i-1}^i}{dt} = \dot{\mathbf{A}}_{i-1}^i = \begin{bmatrix} -S\theta_i & -Ca_i C\theta_i & Sa_i C\theta_i & -a_i S\theta_i \\ C\theta_i & -Ca_i S\theta_i & +Sa_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta_i}{dt}, \quad (3.1.3)$$

где для краткости можно ввести обозначение $d\theta_i/dt = \dot{\theta}_i$.

$$\frac{d^2\mathbf{A}_{i-1}^i}{dt^2} = \ddot{\mathbf{A}}_{i-1}^i = \mathbf{B}_{i-1}^i \ddot{\theta}_i + \begin{bmatrix} -C\theta_i & +Ca_i S\theta_i & -Sa_i S\theta_i & -a_i C\theta_i \\ -S\theta_i & -Ca_i C\theta_i & Sa_i C\theta_i & -a_i S\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_i. \quad (3.1.4)$$

Из формул (3.1.1) и (3.1.2) видно, что

$$\mathbf{A}_{i-1}^i + d\mathbf{A}_{i-1}^i = \text{Trans}(d\mathbf{r}) \mathbf{R}(k, d\theta) \mathbf{A}_{i-1}^i. \quad (3.1.5)$$

Следовательно,

$$d\mathbf{A}_{i-1}^i = [\text{Trans}(d\mathbf{r}) \mathbf{R}(k, d\theta) - \mathbf{I}] \mathbf{A}_{i-1}^i. \quad (3.1.6)$$

Выражение в квадратных скобках обозначается как Δ_{i-1}^i и называется матрицей дифференциального преобразования, т. е. матрицей дифференциального переноса — поворота. Таким образом,

$$d\mathbf{A}_{i-1}^i = \Delta_{i-1}^i \mathbf{A}_{i-1}^i. \quad (3.1.7)$$

Правило умножения, однако, остается прежним! А именно: если происходит умножение на Δ_{i-1}^i слева, то приращение берется по отношению к базовой или $(i-1)$ -й системе координат. Однако справедливо также, что

$$d\mathbf{A}_{i-1}^i = \mathbf{A}_{i-1}^i {}^A\Delta_{i-1}^{i-1}, \quad (3.1.8)$$

где в данном случае осуществляется умножение на ${}^A\Delta_{i-1}^{i-1}$ справа, а это означает преобразование по отношению к системе координат \mathbf{A} .

Дифференциальное преобразование Δ можно проанализировать далее, заметив, что

$$\text{Trans}(d\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.9)$$

и можно показать, что $\mathbf{R}(k, d\theta)$ имеет вид

$$\mathbf{R}(k, d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -k_z d\theta & k_y d\theta & 0 \\ k_z d\theta & 1 & -k_x d\theta & 0 \\ -k_y d\theta & k_x d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.10)$$

Пример 3.1.1 ■

Показать, что $\mathbf{R}(k, d\theta)$ имеет вид (3.1.10).

Решение. В соответствии с уравнением (2.4.40) имеем

$$\mathbf{R}(k, \theta) = \begin{bmatrix} k_x^2(1-C\theta) + C\theta & k_y k_x(1-C\theta) - k_z S\theta & k_z k_x(1-C\theta) + k_y S\theta & 0 \\ k_x k_y(1-C\theta) + k_z S\theta & k_y^2(1-C\theta) + C\theta & k_z k_y(1-C\theta) - k_x S\theta & 0 \\ k_x k_z(1-C\theta) - k_y S\theta & k_y k_z(1-C\theta) + k_x S\theta & k_z^2(1-C\theta) + C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.11)$$

Далее, так как $\theta \rightarrow d\theta$, то $\sin d\theta \approx d\theta$, $\cos \theta \approx 1$ и $1 - C\theta \approx 0$; таким образом, выражение (3.1.11) преобразуется к виду (3.1.10). Что и требовалось доказать.

Заметим, что дифференциальное преобразование Δ в этом случае может быть определено как

$$\Delta = \text{Trans}(dr) \mathbf{R}(k, d\theta) - \mathbf{I}, \quad \text{или} \quad (3.1.12)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -k_z d\theta & k_y d\theta & 0 \\ k_z d\theta & 1 & -k_x d\theta & 0 \\ -k_y d\theta & k_x d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.13)$$

Окончательно получаем следующее выражение для дифференциального преобразования

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -k_z d\theta & k_y d\theta & dx \\ k_z d\theta & 0 & -k_x d\theta & dy \\ -k_y d\theta & k_x d\theta & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.14)$$

Это дифференциальное преобразование общего вида. Оно может быть записано для i -го звена как

$$\Delta_{i-1}^i = \begin{bmatrix} 0 & -k_{iz} d\theta_i & k_{iy} d\theta_i & dx_i \\ k_{iz} d\theta_i & 0 & -k_{ix} d\theta_i & dy_i \\ -k_{iy} d\theta_i & k_{ix} d\theta_i & 0 & dz_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.15)$$

что представляет собой дифференциальное преобразование по отношению к $(i-1)$ -й системе координат. Можно показать, что на основании формул (2.4.10) и (2.4.11) получаются следующие соотношения:

$$\mathbf{R}(x, \delta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_x & 0 \\ 0 & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.16)$$

$$\mathbf{R}(y, \delta_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.17)$$

$$\mathbf{R}(z, \delta_z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & 0 & 0 \\ \delta_z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.18)$$

Можно вычислить Δ , заметив, что без переноса справедливо соотношение $\Delta = \Delta^*$, так что

$$\Delta^* = \mathbf{R}(x, \delta_x) \mathbf{R}(y, \delta_y) \mathbf{R}(z, \delta_z) = \mathbf{R}(z, \delta_z) \mathbf{R}(y, \delta_y) \mathbf{R}(x, \delta_x) \quad (3.1.19)$$

не зависит от порядка, в котором выполняются повороты. Таким образом, получаем, что $\Delta = \text{Trans}(dr) \Delta^* - \mathbf{I}$ преобразуется к тому же виду, если положить $k_x d\theta = \delta_x$, $k_y d\theta = \delta_y$ и $k_z d\theta = \delta_z$:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.20)$$

Два вектора $dr \equiv [dx \ dy \ dz]^T$ и $\delta \equiv [\delta_x \ \delta_y \ \delta_z]^T$ называются векторами дифференциального переноса и дифференциального вращения. Иногда мы будем обращаться к ним, комбинируя их в вектор общего дифференциального перемещения:

$$\mathbf{D} = [dx \ dy \ dz \ \delta_x \ \delta_y \ \delta_z]^T. \quad (3.1.21)$$

Пример 3.1.2 ■

Покажите, что ${}^A \Delta_{i-1}^i = \mathbf{A}_{i-1}^i \Delta_{i-1}^i \mathbf{A}_{i-1}^i$.

Решение. Обратившись к формулам (2.13.7) и (2.13.8), находим

$${}^A\Delta_{i-1} = \mathbf{A}_{i-1}^t {}^A\Delta. \quad (3.1.22)$$

Заметим, что $\Delta = \Delta_{i-1}^t$ и ${}^A\Delta = \Delta_{i-1}^{t-1}$. Таким образом, умножив слева обе части уравнения (3.1.22) на $(\mathbf{A}_{i-1}^t)^{-1}$, получаем

$${}^A\Delta = (\mathbf{A}_{i-1}^t)^{-1} \Delta_{i-1}^t \text{ или } \Delta_{i-1}^{t-1} = \mathbf{A}_{i-1}^{t-1} \Delta_{i-1}^t, \quad (3.1.23)$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что ${}^A\Delta$ является дифференциальным преобразованием общего вида относительно i -й системы координат. Уравнение (3.1.15) можно теперь записать упрощенно:

$${}^A\Delta_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{iz} & \delta_{iy} & dx_i \\ \delta_{iz} & 0 & -\delta_{ix} & dy_i \\ -\delta_{iy} & \delta_{ix} & 0 & dz_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.24)$$

где $\delta_{ix} = k_{ix}d\theta_i$, $\delta_{iy} = k_{iy}d\theta_i$ и $\delta_{iz} = k_{iz}d\theta_i$. Вектор дифференциального поворота i -го звена сочленения $\delta_i \equiv [\delta_{ix} \delta_{iy} \delta_{iz}]^T$ может быть получен из вектора дифференциального поворота сочленения $\delta \equiv [\delta_x \delta_y \delta_z]^T$ относительно системы координат основания, а именно:

$$\delta_{ix} = \delta \cdot \mathbf{n}, \quad \delta_{iy} = \delta \cdot \mathbf{o}, \quad \delta_{iz} = \delta \cdot \mathbf{a}, \quad (3.1.25)$$

где \mathbf{n} , \mathbf{o} и \mathbf{a} принадлежат \mathbf{A} или \mathbf{T} -матрицам. Кроме того,

$$dx_i = \delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{n}) + d \cdot \mathbf{n}, \quad (3.1.26)$$

$$dy_i = \delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{o}) + d \cdot \mathbf{o}, \quad (3.1.27)$$

$$dz_i = \delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{a}) + d \cdot \mathbf{a}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (3.1.28)$$

Пример 3.1.3 ■

Вывести соотношения (3.1.25) — (3.1.28).

Решение. Чтобы вывести уравнения (3.1.25) — (3.1.28), заметим, что

$${}^A\Delta_{i-1}^{-1} = [\mathbf{A}_{i-1}^t]^{-1} \Delta_{i-1}^t [\mathbf{A}_{i-1}^t], \text{ где} \quad (3.1.29)$$

$$\mathbf{A}_{i-1}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.30)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{o} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{o} \times \mathbf{a} = \mathbf{n}, \quad (3.1.31)$$

$$\mathbf{A}_{ii} \mathbf{A}_{ii}^T \equiv \mathbf{I}, \quad (3.1.32)$$

$$\Delta_{i-1}^t = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.1.33)$$

Легко видеть, что

$${}^A\Delta_{i-1}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & -\mathbf{A}_{11}^T \mathbf{p} \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{p} \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \text{ или} \quad (3.1.34)$$

$${}^A\Delta_{i-1}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & -\mathbf{A}_{11}^T \mathbf{p} \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{R} \mathbf{p} + \mathbf{d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.35)$$

$${}^A\Delta_{i-1}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T \mathbf{R} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{11} [\mathbf{R} \mathbf{p} + \mathbf{d}] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.36)$$

Далее,

$$\mathbf{A}_{11}^T \mathbf{R} \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ o_x & o_y & o_z \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y \\ \delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}, \quad (3.1.37)$$

или

$$\mathbf{A}_{11}^T \mathbf{R} \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \\ \mathbf{o}^T \\ \mathbf{a}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\delta_y n_z - n_y \delta_z) & (\delta_y o_z - o_y \delta_z) & (\delta_y a_z - a_y \delta_z) \\ (\delta_z n_x - n_z \delta_x) & (\delta_z o_x - o_z \delta_x) & (\delta_z a_x - a_z \delta_x) \\ (\delta_x n_y - n_x \delta_y) & (\delta_x o_y - o_x \delta_y) & (\delta_x a_y - a_x \delta_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \\ \mathbf{o}^T \\ \mathbf{a}^T \end{bmatrix} [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2 \quad \mathbf{S}_3], \text{ где} \quad (3.1.38)$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \delta_x & \delta_y & \delta_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\delta_y n_z - n_y \delta_z) \\ (\delta_z n_x - n_z \delta_x) \\ (\delta_x n_y - n_x \delta_y) \end{bmatrix} = \delta \times \mathbf{n}. \quad (3.1.39)$$

Аналогично

$$\mathbf{S}_2 = \delta \times \mathbf{o} \text{ и } \mathbf{S}_3 = \delta \times \mathbf{a}. \quad (3.1.40)$$

Тогда

$$\mathbf{A}_{11}^T \mathbf{R} \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot (\delta \times \mathbf{n}) & \mathbf{n} \cdot (\delta \times \mathbf{o}) & \mathbf{n} \cdot (\delta \times \mathbf{a}) \\ \mathbf{o} \cdot (\delta \times \mathbf{n}) & \mathbf{o} \cdot (\delta \times \mathbf{o}) & \mathbf{o} \cdot (\delta \times \mathbf{a}) \\ \mathbf{a} \cdot (\delta \times \mathbf{n}) & \mathbf{a} \cdot (\delta \times \mathbf{o}) & \mathbf{a} \cdot (\delta \times \mathbf{a}) \end{bmatrix}. \quad (3.1.41)$$

Окончательно

$$\mathbf{A}_{ii}^T \mathbf{R} \mathbf{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \cdot \mathbf{a} & \delta \cdot \mathbf{o} \\ \delta \cdot \mathbf{a} & 0 & -\delta \cdot \mathbf{n} \\ -\delta \cdot \mathbf{o} & \delta \cdot \mathbf{n} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.42)$$

Так как справедливы соотношения

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \quad (3.1.43)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{o} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{o} \times \mathbf{a} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{n} = \mathbf{o}, \quad (3.1.44)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{o} \times \mathbf{o} = \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{o}, \quad (3.1.45)$$

можно заключить, что

$$\mathbf{A}_{ii}^T [\mathbf{R} \mathbf{p} + \mathbf{d}] = \mathbf{A}_{ii}^T \mathbf{R} \mathbf{p} + \mathbf{A}_{ii}^T \mathbf{d}. \quad (3.1.46)$$

Кроме того, поскольку

$$\mathbf{A}_{ii}^T \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \\ \mathbf{o}^T \\ \mathbf{a}^T \end{bmatrix} [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{o} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \end{bmatrix} \text{ и} \quad (3.1.47)$$

$$\mathbf{A}_{ii}^T \mathbf{R} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \\ \mathbf{o}^T \\ \mathbf{a}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & +\delta_y \\ +\delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & +\delta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}. \quad (3.1.48)$$

что означает, что

$$\mathbf{A}_{ii}^T \mathbf{R} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \\ \mathbf{o}^T \\ \mathbf{a}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_y p_z - \delta_z p_y \\ \delta_z p_x - \delta_x p_z \\ \delta_x p_y - \delta_y p_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \\ \mathbf{o}^T \\ \mathbf{a}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, \text{ где} \quad (3.1.49)$$

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_y p_z - \delta_z p_y \\ \delta_z p_x - \delta_x p_z \\ \delta_x p_y - \delta_y p_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \delta_x & \delta_y & \delta_z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} = \delta \times \mathbf{p}, \text{ то} \quad (3.1.50)$$

$$\mathbf{A}_{ii}^T \mathbf{R} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \\ \mathbf{o}^T \\ \mathbf{a}^T \end{bmatrix} [\delta \times \mathbf{p}] = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot (\delta \times \mathbf{p}) \\ \mathbf{o} \cdot (\delta \times \mathbf{p}) \\ \mathbf{a} \cdot (\delta \times \mathbf{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{n}) \\ \delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{o}) \\ \delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{a}) \end{bmatrix}. \quad (3.1.51)$$

$$\mathbf{A}_{ii}^T [\mathbf{R} \mathbf{p} + \mathbf{d}] = \begin{bmatrix} \delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \\ \delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{o}) + \mathbf{o} \cdot \mathbf{d} \\ \delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (3.1.52)$$

и окончательно

$${}^A \Delta^{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \cdot \mathbf{a} & \delta \cdot \mathbf{o} & [\delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}] \\ \delta \cdot \mathbf{a} & 0 & -\delta \cdot \mathbf{n} & [\delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{o}) + \mathbf{o} \cdot \mathbf{d}] \\ -\delta \cdot \mathbf{o} & \delta \cdot \mathbf{n} & 0 & [\delta \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.53)$$

что и требовалось доказать. ■■

Пример 3.1.4 ■

Предположим, что одна из матриц \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A}_{i-1}^i = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.54)$$

и, кроме того, что $\mathbf{d} = 0.5\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\delta = 0\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Найдите эквивалентные дифференциальные перенос и поворот относительно системы координат \mathbf{A} .

Решение.

$$\mathbf{A}_{i-1}^i = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.55)$$

Следовательно, $\mathbf{n} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{o} \equiv 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{a} \equiv \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ и $\mathbf{p} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Далее,

$${}^A \Delta_{i-1}^i = \Delta_{i-1}^i \mathbf{A}_{i-1}^i = \mathbf{A}_{i-1}^i {}^A \Delta_{i-1}^i \text{ и} \quad (3.1.56)$$

$$\Delta_{i-1}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & dx \\ 0 & 0 & 0 & dy \\ -0.1 & +0 & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.57)$$

Таким образом,

$$\Delta_{i-1}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.58)$$

$$dA_{i-1}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ +0 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.59)$$

Рассмотрим $dA_{i-1}^i = A_{i-1}^i \Delta_{i-1}^i$. В этом уравнении

$${}^A\Delta_{i-1}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \cdot a & \delta \cdot o & [\delta \cdot (p \times n) + d \cdot n] \\ \delta \cdot a & 0 & -\delta \cdot n & [\delta \cdot (p \times o) + d \cdot o] \\ -\delta \cdot o & \delta \cdot n & 0 & [\delta \cdot (p \times a) + d \cdot a] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.60)$$

Теперь имеем $\delta \cdot a = 0$, $\delta \cdot o = 0.1$ и $\delta \cdot n = 0.2$. Кроме того,

$$p \times n = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -6i + 5j + 0k, \quad (3.1.61)$$

$$p \times o = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1i - 0j + 5k, \quad (3.1.62)$$

$$p \times a = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0i + j - 6k. \quad (3.1.63)$$

Таким образом,

$$\delta \cdot (p \times n) = 0.5 \quad \delta \cdot (p \times o) = -0, \quad d \cdot n = -1, \\ d \cdot o = 0, \quad d \cdot a = 0.5 \quad \text{и} \quad \delta \cdot (p \times a) = 0. \quad (3.1.64)$$

Выражение (3.1.60) упрощается к виду

$${}^A\Delta_{i-1}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.0 & -0.0 \\ -0.1 & +0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.65)$$

Далее $dA_{i-1}^i = A_{i-1}^i \Delta_{i-1}^i$, и, следовательно, на основании формул (3.1.54) и (3.1.60) имеем

$$dA_{i-1}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.66)$$

Окончательно

$$dA_{i-1}^i = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.67)$$

Пример 3.1.5 ■

Робототехническая система зрения отслеживает перемещение объекта при помощи телекамеры, закрепленной на звене 5 манипулятора (рис. 3.1.1 и 3.1.2). Преобразование, описывающее камеру по отношению к звену 5, обозначено ${}^T_5\text{CAM}$ и численно выражено в виде

$${}^T_5\text{CAM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.68)$$

Схват описывается матрицей A_5^6 , такой, что

$$A_5^6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.69)$$

Объект находится непрерывно под наблюдением камеры, и его положение описывается преобразованием $({}^{C\text{am}}\text{Object}) \equiv {}^{C\text{am}}O$. Дифференциальные изменения движения объекта переводятся в дифференциальные изменения в системе координат камеры. Пусть они имеют вид

$${}^{C\text{am}}d = -0.1i + 0.2j + 0k, \quad (3.1.70)$$

$${}^{C\text{am}}\delta = 0i + 0j + 0.2k. \quad (3.1.71)$$

Определите соответствующее дифференциальное приращение dT_6^5 положения схвата, которое приведет схват в соприкосновение с объектом.

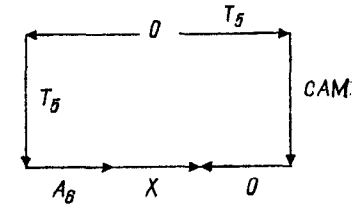


Рис. 3.1.3. Граф преобразования для примера 3.1.5.

Решение. Обращаясь к рис. 3.1.3, заметим, что

$$T_0^5 A_5^6 X = T_0^5 T_3^5 CAM^{CAM} O, \quad (3.1.72)$$

где X — матрица преобразования, описывающая положение объекта относительно схвата, т. е.

$$X \equiv T_6^5 Object \equiv T_6^5 O. \quad (3.1.73)$$

Таким образом, система координат схвата описывается матрицей преобразования ${}^C G$, имеющей вид

$${}^C G = CAM^{-1} A_5^6. \quad (3.1.74)$$

Выражение (3.1.74) для ${}^C G$ принимает вид

$${}^C G = CAM^{-1} A_5^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.75)$$

или

$${}^C G = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.76)$$

Таким образом, $n = 0i + 1j + 0k$, $o = 0i + 0j - 1k$, $a = -i + 0j + 0k$ и $p = 2i + 0j - 6k$. Легко можно получить

$${}^T d_x = \delta \cdot (p \times n) + d \cdot n = n \cdot [(\delta \times p) + d], \quad (3.1.77)$$

$${}^T d_y = \delta \cdot (p \times o) + d \cdot o = o \cdot [(\delta \times p) + d], \quad (3.1.78)$$

$${}^T d_z = \delta \cdot (p \times a) + d \cdot a = a \cdot [(\delta \times p) + d], \quad (3.1.79)$$

$${}^T \delta_x = n \cdot \delta, \quad {}^T \delta_y = o \cdot \delta, \quad {}^T \delta_z = a \cdot \delta. \quad (3.1.80)$$

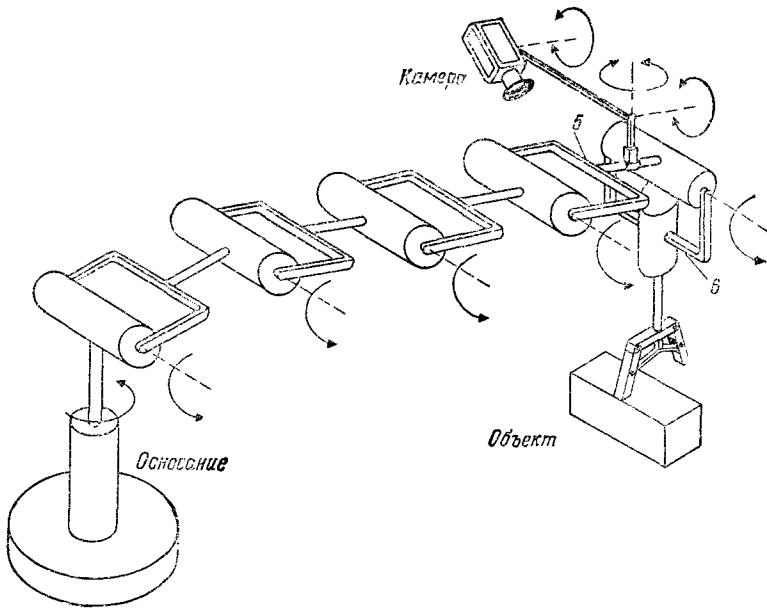


Рис. 3.1.1. Отслеживание объекта роботом-манипулятором, оборудованным ТВ-камерой.



Рис. 3.1.2. Типичная ситуация отслеживания роботом объекта на автомобильном заводе.

Тогда

$$\delta \times p = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} = 0i + 0.4j + 0k \quad (3.1.81)$$

и, следовательно,

$$\delta \times p + d = -0.1i - 0.2i + 0k. \quad (3.1.82)$$

Окончательно

$${}^T c d = -0.2i + 0j + 0.1k, \quad (3.1.83)$$

$${}^T c \delta = 0i - 0.2j + 0k. \quad (3.1.84)$$

3.2. ЯКОБИАН ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В робототехнике якобиан преобразования¹⁾ — это матрица, устанавливающая связь дифференциальных приращений в двух системах координат. Она также устанавливает связь дифференциальных приращений в пространстве координат сочленений и пространстве координат конечного звена.

Вспомним выражение для обобщенного дифференциального перемещения ${}^A D$, измеренного относительно системы координат A , а именно

$${}^A D = [{}^A dx \quad {}^A dy \quad {}^A dz \quad {}^A \delta_x \quad {}^A \delta_y \quad {}^A \delta_z]^T. \quad (3.2.1)$$

${}^A D$ в свою очередь связана с ${}^B D$ дифференциальным перемещением в другой системе координат B того же робота, посредством якобиана ${}^B J_A$, а именно

$${}^B D = {}^B J_A {}^A D, \quad (3.2.2)$$

где ${}^B J_A$ является якобианом преобразования от системы координат A к системе координат B . Чтобы прояснить положение, обозначим через y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, координаты системы координат B и через x_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, координаты системы координат A , т. е.

$$dx_1 = {}^A dx, \quad dx_2 = {}^A dy, \quad dx_3 = {}^A dz, \quad (3.2.3)$$

$$dx_4 = {}^A \delta_x, \quad dx_5 = {}^A \delta_y, \quad dx_6 = {}^A \delta_z, \quad (3.2.4)$$

$$dy_1 = {}^B dx, \quad dy_2 = {}^B dy, \quad dy_3 = {}^B dz, \quad (3.2.5)$$

$$dy_4 = {}^B \delta_x, \quad dy_5 = {}^B \delta_y, \quad dy_6 = {}^B \delta_z. \quad (3.2.6)$$

¹⁾ Речь идет о матрице Якоби. Якобианом называют определитель этой матрицы (если она квадратная). — Прим. ред.

Заметим, что существуют функциональные соотношения между координатами y_i и x_i , а именно:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (3.2.7)$$

и, следовательно,

$$dy_i = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (3.2.8)$$

Заметим, что

$$dy_i = \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \\ dy_4 \\ dy_5 \\ dy_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B dx \\ {}^B dy \\ {}^B dz \\ {}^B \delta_x \\ {}^B \delta_y \\ {}^B \delta_z \end{bmatrix} = {}^B D, \quad (3.2.9)$$

$$dx_i = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \\ dx_5 \\ dx_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A dx \\ {}^A dy \\ {}^A dz \\ {}^A \delta_x \\ {}^A \delta_y \\ {}^A \delta_z \end{bmatrix} = {}^A D. \quad (3.2.10)$$

Тогда на основании формул (3.2.2), (3.2.8) — (3.2.10) имеем

$${}^B J_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{bmatrix}, \quad (3.2.11)$$

или, вообще говоря, компонентами матрицы ${}^B J_A$ являются просто $\partial f_i / \partial x_j$ для $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Разделив выражение (3.2.2)

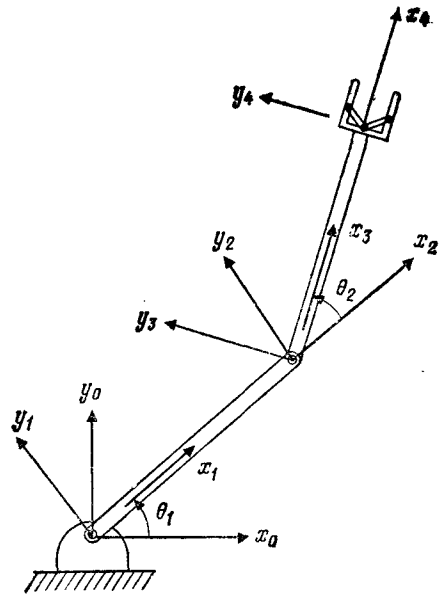


Рис. 3.2.1. Геометрия двухзвенного манипулятора.

на dt , получим обобщенное уравнение для скоростей

$${}^A\mathbf{V} = \begin{bmatrix} A\frac{dx}{dt} & A\frac{dy}{dt} & A\frac{dz}{dt} & A\frac{\delta x}{dt} & A\frac{\delta y}{dt} & A\frac{\delta z}{dt} \end{bmatrix}^T \quad (3.2.12)$$

или

$${}^A\mathbf{V} = [{}^Av_x \quad {}^Av_y \quad {}^Av_z \quad {}^A\omega_x \quad {}^A\omega_y \quad {}^A\omega_z]^T, \quad (3.2.13)$$

где ${}^A\omega_x, {}^A\omega_y, {}^A\omega_z$ — угловые скорости вращения системы координат A относительно осей x, y и z соответственно. Итак, справедливо также, что

$${}^B\mathbf{V} = {}^B\mathbf{J}_1 {}^A\mathbf{V}, \quad (3.2.14)$$

где обобщенные шестимерные скорости определяются как

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Подобным же образом можно связать обобщенную скорость конечного звена ${}^0\mathbf{V}$ с вектором скоростей сочленений $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\theta}_4 \quad \dot{\theta}_5 \quad \dot{\theta}_6] \quad (3.2.16)$$

для робота с шестью степенями подвижности. При этих условиях

$${}^0\mathbf{V} = {}^0\mathbf{J}(\theta) \dot{\theta}, \quad (3.2.17)$$

где ${}^0\mathbf{J}(\theta)$ — якобиан преобразования, связывающий обобщенное дифференциальное перемещение ${}^0\mathbf{D}$ конечного звена относительно системы координат основания с вектором перемещений сочленений $d\theta \equiv [d\theta_1 \quad d\theta_2 \quad d\theta_3 \quad d\theta_4 \quad d\theta_5 \quad d\theta_6]^T$, такой, что

$${}^0\mathbf{D} = {}^0\mathbf{J}(\theta) d\theta. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (3.2.18)$$

Пример 3.2.1

Для плоскостного манипуляционного робота с двумя степенями подвижности (рис. 3.2.1) вывести выражения для якобианов преобразований между системами координат, а также между пространством координат конечного звена и пространством координат сочленений.

Решение. Запишем преобразования Денавита — Хартенберга \mathbf{A}_i^j , связывающие системы координат в следующей форме:

$$\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.19)$$

$$\mathbf{A}_0^2 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1^3 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.20)$$

$$\mathbf{A}_0^3 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1 C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^3 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.21)$$

$$\mathbf{A}_0^4 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1^4 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_1 + l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.22)$$

$$A_2^4 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.23)$$

Обобщенные скорости iV_i i -й системы координат относительно j -й системы координат можно легко найти в виде

$${}^0V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad {}^1V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0V_2 = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 \dot{\theta}_1 \\ l_1 C_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.24)$$

$${}^1V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad {}^0V_3 = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 \dot{\theta}_2 \\ l_1 C_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad {}^2V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.2.25)$$

$${}^0V_4 = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 \dot{\theta}_1 - l S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 C_1 \dot{\theta}_1 + l C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad {}^1V_4 = \begin{bmatrix} -l_2 S_2 \dot{\theta}_2 \\ l_2 C_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.2.26)$$

$${}^2V_4 = \begin{bmatrix} -l_2 S_2 \dot{\theta}_2 \\ l_2 C_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad {}^3V_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2.27)$$

Теперь можно вывести соответствующие якобианы преобразований, основываясь на соотношении (3.2.14), а именно:

$${}^1J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_1 S_1 \\ 0 & 0 & l_1 C_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0V_2 = {}^1J_2 {}^0V_1; \quad (3.2.28)$$

$${}^2J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \dot{\theta}_2/\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad {}^0V_3 = {}^2J_3 {}^0V_2; \quad (3.2.29)$$

$${}^1J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_1 S_1 \\ 0 & 0 & l_1 C_1 \\ 0 & 0 & 1 + \dot{\theta}_2/\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad {}^0V_3 = {}^1J_3 {}^0V_2; \quad (3.2.30)$$

$${}^1J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_1 S_1 - l_2 S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)/\dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)/\dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & 1 + \dot{\theta}_2/\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad {}^0V_4 = {}^1J_4 {}^0V_1; \quad (3.2.31)$$

$${}^2J_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_2 S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)/\dot{\theta}_1 \\ 0 & 1 & l_2 C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)/\dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & 1 + \dot{\theta}_2/\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad {}^0V_4 = {}^2J_4 {}^0V_2; \quad (3.2.32)$$

$${}^2J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & [l_1 S_1 \dot{\theta}_1 - l_2 S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)/\dot{\theta}_1] \\ 0 & 0 & l_1 C_1 \dot{\theta}_1 + l_2 C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)/\dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & 1 + \dot{\theta}_2/\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad {}^0V_4 = {}^3J_4 {}^0V_3. \quad (3.2.33)$$

Соотношение между скоростью конечного звена 0V_4 и вектором скоростей сочленений ${}^0\theta = [{}^0\theta_1 {}^0\theta_2]^T$ выражается через якобиан преобразования $J(\theta)$ следующим образом:

$${}^0V_4 = J(\theta) \dot{\theta}, \quad \text{где} \quad (3.2.34)$$

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_1 C_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.35)$$

Вообще говоря, используя множество обобщенных координат q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, можно записать

$$\frac{\partial T_0^n}{\partial q_i} = T_0^n T_0^n \Delta_i \quad (3.2.36)$$

или при $n=6$ приведенное соотношение может быть записано как

$$dT_6^1 = dT_6 = T_6^T \Delta_i dq_i. \quad (3.2.37)$$

Его можно записать при помощи девяти матриц Якоби преобразования размера 6×6 в виде

$$dT_6 = J dq, \quad (3.2.38)$$

или в расширенной форме

$$dT_6 = \begin{bmatrix} T_6 d_x \\ T_6 d_y \\ T_6 d_z \\ T_6 \delta_x \\ T_6 \delta_y \\ T_6 \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{2x} & d_{3x} & d_{4x} & d_{5x} & d_{6x} \\ d_{1y} & d_{2y} & d_{3y} & d_{4y} & d_{5y} & d_{6y} \\ d_{1z} & d_{2z} & d_{3z} & d_{4z} & d_{5z} & d_{6z} \\ \delta_{1x} & \delta_{2x} & \delta_{3x} & \delta_{4x} & \delta_{5x} & \delta_{6x} \\ \delta_{1y} & \delta_{2y} & \delta_{3y} & \delta_{4y} & \delta_{5y} & \delta_{6y} \\ \delta_{1z} & \delta_{2z} & \delta_{3z} & \delta_{4z} & \delta_{5z} & \delta_{6z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{bmatrix}. \quad (3.2.39)$$

Легко можно показать, что

$$d_{ix} = (-n_x p_y + n_y p_x) \mathbf{i}, \quad d_{iy} = (o_y p_x - o_x p_y) \mathbf{j},$$

$$d_{iz} = (a_y p_x - a_x p_y) \mathbf{k}; \quad (3.2.40)$$

$$\delta_{ix} = n_x \mathbf{i} + o_x \mathbf{j} + a_x \mathbf{k}, \quad \delta_{iy} = n_y \mathbf{i} + o_y \mathbf{j} + a_y \mathbf{k}. \quad (3.2.41)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Featherstone R., Position and Velocity Transformations Between Robot End-Effector Coordinates and Joint Angles, *Int. J. Robotics Res.*, 2(2), 35—45, 1983.
2. Groom R. C., Jr., Force Feedback Steering of a Teleoperator System, M. Sc. Thesis, M. I. T., Cambridge, MA, 1972.
3. Hollerbach J. M., Gideon Sahar, Wrist-Partitioned, Inverse Kinematic Accelerations and Manipulator Dynamics, *Int. J. Robotics Res.*, 2(4), 61—76, 1983.
4. Luh J. Y. S., Walker M. W., Paul R. P., Resolved Acceleration Control of Mechanical Manipulators, *IEEE Trans. Autom. Control*, 25(3), 468—474, 1980.
5. Paul R. P., Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control, M. I. T. Press, Cambridge, MA, 1983.
6. Whitney D. E., Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses, *IEEE Trans. Man, Machine, Syst.*, 10(2), 47—53, 1969.
7. Whitney D. E., The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators, *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 303—309 (Dec.), 1972.

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Дана матрица A в виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где A описывает положение некоторой системы координат по отношению к системе координат основания робота. Определите дифференциальное преобразование dA , получающееся в результате переноса системы координат на d и ее дифференциального поворота на δ , таких, что

$$d = 0.1\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k},$$

$$\delta = 0.1\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k}.$$

Найти dA по отношению к системе координат **основания и к** самой системе A .

2. Для робототехнической системы зрения, описанной в примере 3.1.5, дифференциальные приращения перемещения и поворота чашки относительно камеры равны

$${}^{CAM}d = 0.1\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k},$$

$${}^{CAM}\delta = 0.1\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k}.$$

Определите соответствующие дифференциальные приращения, которые должен выполнить схват для того, чтобы двинуться по направлению к чашке и затем соприкоснуться с движущейся чашкой.

3. Если матрица A представлена в форме

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и описывает положение системы координат относительно системы координат основания робота, то каково дифференциальное преобразование dA , получающееся после того, как система координат переносится на d , такое, что

$$d = 0.1\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j} - 0.1\mathbf{k},$$

$$\delta = -0.1\mathbf{i} - 0.1\mathbf{j} + 0.1\mathbf{k}$$

(d и δ выражены в системе координат основания).

4. Используя данные задачи 3, вычислите соответствующее дифференциальное преобразование ${}^A dA$ относительно системы координат A , а также соответствующие перенос ${}^A d$ и поворот ${}^A \delta$ относительно системы координат A .

5. Для робототехнической дифференциальной системы слежения (рис. 3.1.2) дифференциальные приращения перемещения и поворота объекта относительно камеры равны

$${}^{CAM}d = -0.1\mathbf{i} - 0.1\mathbf{j} - 0.1\mathbf{k} \quad \text{и} \quad {}^{CAM}\delta = 0.1\mathbf{i} - 0.1\mathbf{j} + 0.1\mathbf{k}.$$

Определите соответствующие дифференциальные приращения ${}^{T_e}d$ и ${}^{T_e}\delta$ схвата, необходимые для того, чтобы отследить движение чашки и затем соприкоснуться с ней.

6. Найдите якобиан преобразований между обобщенными скоростями конечной точки манипулятора и скоростями сочленений для манипуляционного робота PUMA 600, подобно тому, как описано в примере 3.2.1.

7. Найдите якобиан дифференциального преобразования между обобщенными дифференциальными перемещениями сочленений и конечной точки манипулятора.

Рабочее пространство робота и планирование траекторий

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Рабочее пространство робота определяется как множество всех точек в трехмерном пространстве, которых может достичь характерная точка, расположенная на схвате. В более ограниченной интерпретации рабочее пространство робота определяется также как множество всех точек, достигаемых при фиксированной ориентации схвата. Знание рабочих пространств роботов важно при организации гибкой производственной ячейки, в которую включен робот, и при оценке эффективности производственной линии.

В общем случае граница рабочего пространства робота, называемая оболочкой рабочего пространства, представляет собой сложную поверхность, которую трудно описать явно геометрическими уравнениями. Чтобы получить математические выражения для рабочих поверхностей роботов, обычно используют однородные преобразования Денавита—Хартенберга, с помощью которых описывается геометрическое место точек траекторий схвата робота.

Вообще говоря, анализ рабочих пространств роботов включает два вопроса.

1. Если дана кинематическая схема робота, т. е. таблица его кинематических параметров, то какова геометрическая структура рабочего пространства?

2. Если дано геометрическое описание желаемого рабочего пространства робота для практических приложений, то какова необходимая конструкция робота?

Чтобы ответить на два приведенных вопроса, начнем с изучения общей структуры рабочих пространств роботов.

4.2. ОБЩАЯ СТРУКТУРА РАБОЧИХ ПРОСТРАНСТВ РОБОТОВ

Так как рабочее пространство робота представляет собой объединение всех возможных положений точки, связанной со схватом, начнем с анализа рабочего пространства для точки. Рассмотрим манипулятор с n поворотными сочленениями, подобный показанному на рис. 4.2.1. Пусть P — точка, связанная с началом системы координат схвата. Рабочее пространство точки P по отношению к системе координат конечного звена n обозначается через $W_n(P)$, где n — номер ближайшей к P оси вращения. Очевидно, что (см. рис. 4.2.2):

$$W_n(P) = \text{Окружность } (n). \quad (4.2.1)$$

Следовательно, рабочее пространство точки P относительно $(n-1)$ -й оси вращения представляет собой тор, такой, что

$$W_n(P) = R_{n-1}W_n(P) = R_{n-1} \text{ окружность } (n) = \text{тор } (n-1), \quad (4.2.2)$$

где R_{n-1} — оператор вращения, поворачивающий рабочую область относительно оси $n-1$. Повторяя операцию, получим области, являющиеся пространственными кольцами с пустотами в центре, такие, что

$$W_{n-1}(P) = R_{n-2}W_{n-1}(P) = R_{n-2}[\text{тор } (n-1)] = \text{SHR } (n-2) \quad (4.2.3)$$

⋮

$$W_1(P) = R_1[W_2(P)] = R_1[\text{SHR } (2)] = \text{SHR } (1), \quad (4.2.4)$$

где SHR — *пространственное полое кольцо* — обозначение, которое впервые предложили Гупта и Рот в 1982 г.

Обратившись к рис. 4.2.3, можно показать, что уравнение тора $(i-1)$ в системе координат $x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \{x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2 + (z_{i-1} - d_{i-1})^2 - [a_{i-1}^2 + a_i^2 + (d_{i+1} + d_i)^2]\}^2 = \\ = 4a_{i-1}^2 \left\{ a_i^2 - \frac{[(z_{i-1} - d_{i-1}) - (d_{i+1} + d_i) \cos \alpha_{i-1}]^2}{\sin \alpha_{i-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Так как P является конечной точкой манипулятора, вышеприведенное уравнение легко может быть преобразовано в уравнение, описывающее тор $(n-1)$ в $(n-1)$ -й системе координат.

Заметим, что если $a/a_{n-1} \leq 1$, то имеется полая недостижимая область (канал) вокруг оси z_{n-1} . Если a достаточно велико,

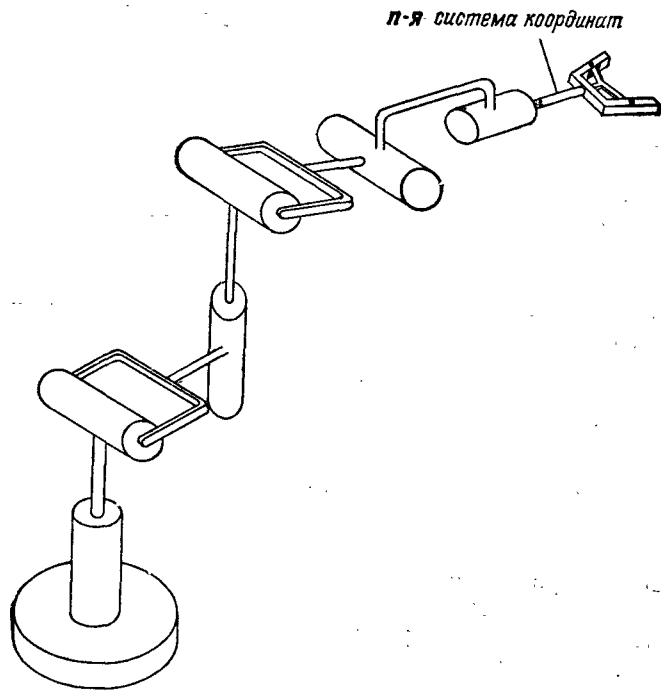


Рис. 4.2.1. Манипулятор с n вращательными сочленениями.

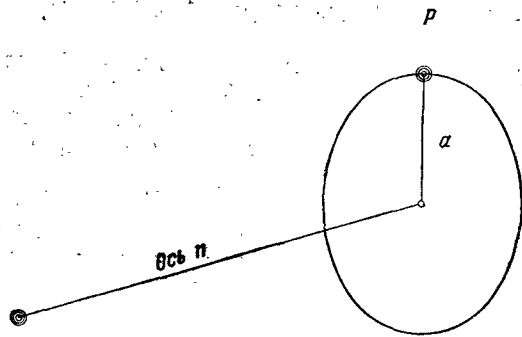


Рис. 4.2.2. Рабочее пространство $W_n(P) = \text{Окружность } (n)$.

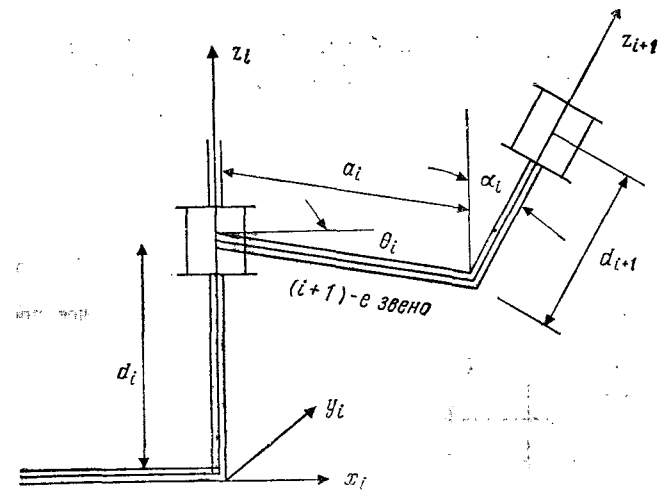


Рис. 4.2.3. Представление параметров звена: d_i — расстояние между звеньями, a_i — длина звена, θ_i — поворот звена, α_i — кручение звена.

то канал пропадает, потому что тор пересекает сам себя. Это происходит всегда, когда ось $n-1$ проходит через окружность (n) . Таким образом, в этом случае

$$a^2 \geq a_{n-1}^2 + (d + d_n)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_{n-1}. \quad (4.2.6)$$

Пример 4.2.1 ■

Рассмотрим условия, касающиеся существования или отсутствия полости в рабочем пространстве.

Решение. Из формулы (4.2.6) видно, что если либо сумма $d + d_n$, либо величина α_{n-1} равна нулю, то полость отсутствует,

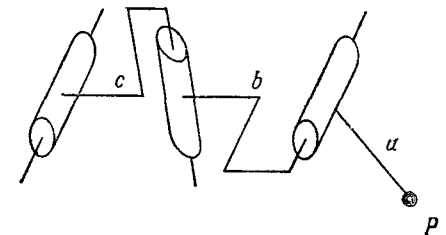


Рис. 4.2.4. Специальный манипулятор.

пока $a \leq a_{n-1}$. Однако, если $\alpha_{n-1} = \pm 90^\circ$ и $d + d_n \neq 0$, полость всегда существует, так как величина a конечна. При этих условиях полости можно избежать, если $d = -d_n$. ■ ■

Пример 4.2.2 ■

Рассмотрим рис. 4.2.3 и 4.2.4. Пусть $d_1 = d_2 = d = 0$, $\alpha_1 = 90^\circ$, $a_1 = c$, $a_2 = b$ и $a \leq b \leq c$. Определите рабочие области $W_3(P)$, $W_2(P)$ и $W_1(P)$.

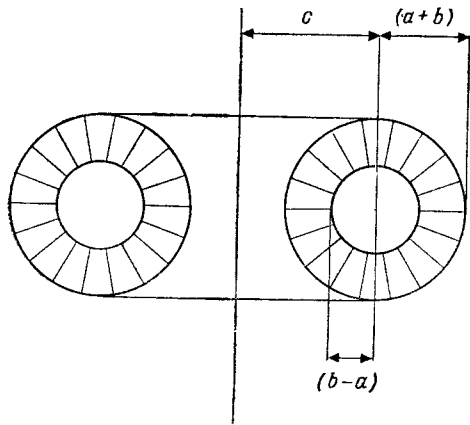


Рис. 4.2.5. Рабочее пространство $W_1(P)$ для манипулятора, показанного на рис. 4.2.4.

Решение. Очевидно, что $W_3(P)$ — окружность (3), $W_2(P)$ — тор (2) и $W_1(P)$ — SHR (1), как показано на рис. 4.2.5. ■ ■

4.3. МАНИПУЛЯТОРЫ С n ПОВОРОТНЫМИ СОЧЛЕНЕНИЯМИ

Для манипулятора с n последовательно расположенными поворотными сочленениями существует n систем координат для описания его конфигурации. В общем случае в i -й системе коор-

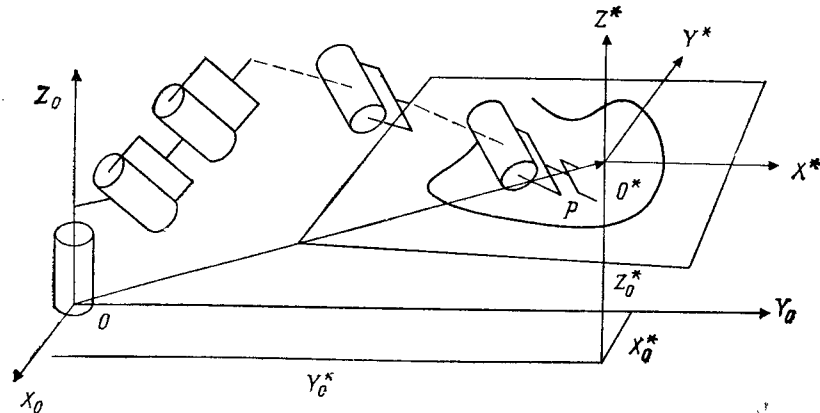


Рис. 4.3.1. Рабочее пространство на плоскости.

динат ось Z_i — ось движения, а ось X_i — ось, перпендикулярная и к оси Z_i , и к оси Z_{i+1} .

Как отмечалось в гл. 2, имеется четыре параметра — θ_i , α_i , a_i , — необходимые для полного описания расположения одного звена относительно другого. Рассмотрим манипулятор общего вида с n звеньями, n -е звено которого связано со схватом, а центр находится в точке P (рис. 4.3.1).

4.3.1. ПОЛОЖЕНИЕ СХВАТА РОБОТА НА ПЛОСКОСТИ

Если даны положение и ориентация i -й и $(i + 1)$ -й систем координат X_i и X_{i+1} соответственно, то очевидно, что

$$R_i = A_i X_{i+1}, \text{ где} \tag{4.3.1}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & S_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X_i = (X_i \ Y_i \ Z_i \ 1)^T. \tag{4.3.2}$$

Поскольку при построении рабочего пространства робота нас интересует движение конечной точки манипулятора, приведем некоторые дифференциальные соотношения. Пусть имеется малое приращение $\delta\theta_i$ в i -м сочленении, такое, что

$$\theta_i = \theta_{i0} + \delta\theta_i, \tag{4.3.3}$$

где θ_{i0} — начальное значение θ_i , имевшееся до малого приращение. Заметим, что новое значение A_i теперь имеет вид

$$A_i = A_{i0} + \delta\theta_i B_{i0}, \tag{4.3.4}$$

где A_{i0} — значение A_i при θ_{i0} и

$$B_{i0} = \begin{bmatrix} -S\theta_{i0} & -C\theta_{i0} C\alpha_i & C\theta_{i0} S\alpha_i & -a_i S\theta_{i0} \\ C\theta_{i0} & -S\theta_{i0} C\alpha_i & S\theta_{i0} S\alpha_i & a_i C\theta_{i0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3.5}$$

Тогда соотношение между системой координат R и системой координат R_{n+1} , связанной с вершиной схвата (с началом

координат в точке P), имеет вид

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}_n^* \mathbf{x}_n, \quad \text{где} \quad (4.3.6)$$

$$\mathbf{A}_n^* = \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n, \quad (4.3.7)$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \cos(x_0, x^*) & \cos(x_0, y^*) & \cos(x_0, z^*) & -x_0^* \\ \cos(y_0, x^*) & \cos(y_0, y^*) & \cos(y_0, z^*) & -y_0^* \\ \cos(z_0, x^*) & \cos(z_0, y^*) & \cos(z_0, z^*) & -z_0^* \end{bmatrix}. \quad (4.3.8)$$

Результатом является преобразование между системами координат \mathbf{x}^* и \mathbf{R}_0 . Теперь, подставив выражение (4.3.4) в (4.3.7), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n^* = & \mathbf{A}_{n0}^* + \delta\theta_1 (\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_{10} \mathbf{A}_{20} \mathbf{A}_{30} \dots \mathbf{A}_{n0}) + \\ & + \delta\theta_2 (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_{10} \mathbf{B}_{20} \mathbf{A}_{30} \mathbf{A}_{40} \dots \mathbf{A}_{n0}) + \dots \\ & + \delta\theta_n (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_{10} \mathbf{A}_{20} \mathbf{A}_{30} \dots \mathbf{B}_{n0}). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Пример 4.3.1 ■

Вывести соотношение (4.3.9).

Решение. Подставив выражение (4.3.4) в (4.3.7), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n^* = & (\mathbf{A}_0 + \delta\theta_0 \mathbf{B}_0) (\mathbf{A}_{10} + \delta\theta_1 \mathbf{B}_{10}) (\mathbf{A}_{20} + \delta\theta_2 \mathbf{B}_{20}) \dots \\ & \dots (\mathbf{A}_{n0} + \delta\theta_n \mathbf{B}_{n0}). \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Заметим теперь, что $\delta\theta_0 = 0$ и, следовательно, соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n^* = & (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_{10} \mathbf{A}_{20} \dots \mathbf{A}_{n0}) + \delta\theta_1 (\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_{10} \mathbf{A}_{20} \dots \mathbf{A}_{n0}) + \dots + \\ & + \delta\theta_n (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_{10} \mathbf{A}_{20} \dots \mathbf{A}_{n0}) + \\ & + \text{Члены более высокого порядка относительно } \delta\theta_i. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Пренебрегая членами более высокого порядка и заметив, что (4.3.10) упрощается к виду

$$\mathbf{A}_{n0}^* = \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_{10} \mathbf{A}_{20} \dots \mathbf{A}_{n0}, \quad (4.3.12)$$

получим желаемый результат (4.3.9).

Определим теперь приращение $\delta\mathbf{A}_n^*$ как

$$\delta\mathbf{A}_n^* = \mathbf{A}_n^* - \mathbf{A}_{n0}^* = \begin{bmatrix} \delta n_1 & \delta o_1 & \delta a_1 & \delta x_0 \\ \delta n_2 & \delta o_2 & \delta a_2 & \delta y_0 \\ \delta n_3 & \delta o_3 & \delta a_3 & \delta z_0 \end{bmatrix}, \quad (4.3.13)$$

где подматрица $\delta\mathbf{R}$, равная

$$\delta\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \delta n_1 & \delta o_1 & \delta a_1 \\ \delta n_2 & \delta o_2 & \delta a_2 \\ \delta n_3 & \delta o_3 & \delta a_3 \end{bmatrix}, \quad (4.3.14)$$

имеет смысл изменения ориентации системы координат \mathbf{x}_n по отношению к системе координат \mathbf{R}^* . Очевидно, что компоненты векторов $\delta\mathbf{n}$, $\delta\mathbf{o}$ и $\delta\mathbf{a}$ связаны таким образом, что

$$\delta\mathbf{n} \times \delta\mathbf{o} = \delta\mathbf{a}. \quad (4.3.15)$$

Итак, как пояснялось ранее,

$$\delta\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{n} = \delta\mathbf{o} \cdot \delta\mathbf{o} = \delta\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{a} = 1. \quad (4.3.16)$$

Следовательно, из матричного уравнения (4.3.13) можно получить шесть независимых уравнений. Без потери общности можно

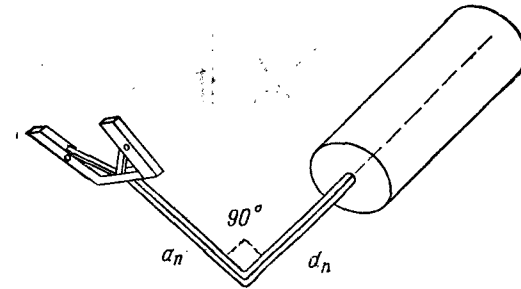


Рис. 4.3.2. Конфигурация схвата, описанная соотношениями (4.3.17)–(4.3.22).

взять любую комбинацию $\delta n_1, \delta n_2, \delta n_3, \delta o_1, \delta o_2, \delta o_3, \delta a_1, \delta a_2, \delta a_3$ и $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$. Например, рассмотрим

$$\delta x_0 = f_1(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots, \delta\theta_n), \quad (4.3.17)$$

$$\delta y_0 = f_2(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots, \delta\theta_n), \quad (4.3.18)$$

$$\delta z_0 = f_3(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots, \delta\theta_n), \quad (4.3.19)$$

$$\delta n_3 = f_4(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots, \delta\theta_n), \quad (4.3.20)$$

$$\delta o_1 = f_5(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots, \delta\theta_n), \quad (4.3.21)$$

$$\delta a_1 = f_6(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots, \delta\theta_n). \quad (4.3.22)$$

Эти уравнения налагают условие, чтобы схват робота был перпендикулярен оси последнего звена, как показано на рис. 4.3.2.

4.3.2. ДВИЖЕНИЕ СХВАТА ПО ГРАНИЦЕ РАБОЧЕГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть схват робота перемещается по плоскости вдоль оси x_0 при $\delta y_0 = \delta z_0 = 0$, а его ориентация сохраняется неизменной, т. е. $\delta n_3 = \delta \alpha_1 = \delta \alpha_2 = 0$. Чтобы максимально быстро переместить схват к границе рабочей области при сохранении малой

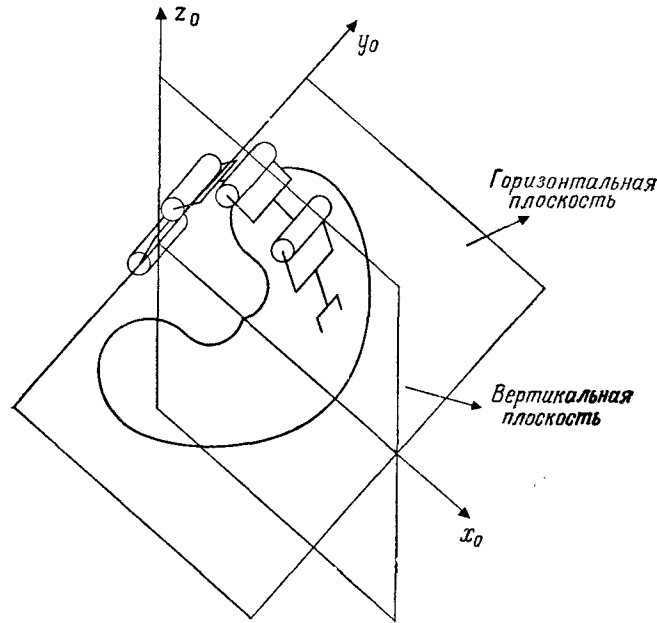


Рис. 4.3.3. Движение манипулятора в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

величины $\delta \theta_i$, нужно найти экстремум δx_0 при всех наложенных ограничениях. Например, нужно максимизировать

$$\delta R_0 = f_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (4.3.23)$$

при следующих ограничениях:

$$f_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0, \quad (4.3.24)$$

$$f_3(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0, \quad (4.3.25)$$

$$f_4(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0, \quad (4.3.26)$$

$$f_5(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0, \quad (4.3.27)$$

$$f_6(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0, \quad (4.3.28)$$

$$(\delta \theta_i)_{\min} \leq (\delta \theta_i) \leq (\delta \theta_i)_{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3.29)$$

Пример 4.3.2 ■

Для простого манипулятора, описываемого обобщенными параметрами из табл. 4.3.1, найти границы рабочей области в горизонтальной и вертикальной плоскостях (рис. 4.3.3).

Таблица 4.3.1. Таблица параметров сочленений

Сочленения	θ_i	α_i	a_i	d_i	Ограничения
1	θ_1	90°	0	0	$-120^\circ \leq \theta_1 \leq 120^\circ$
2	θ_2	0°	a_2	0	$0^\circ \leq \theta_2 \leq 90^\circ$
3	θ_3	0°	a_3	0	$-120^\circ \leq \theta_3 \leq 0^\circ$
4	θ_4	-90°	a_4	0	$-120^\circ \leq \theta_4 \leq 120^\circ$
5	θ_5	90°	0	0	$-30^\circ \leq \theta_5 \leq 210^\circ$
6	θ_6	0°	0	0	$-240^\circ \leq \theta_6 \leq 240^\circ$

Решение. Для типичных значений $a_2 = a_3 = 5a_4$ типичные рабочие границы в горизонтальной и вертикальной плоскостях

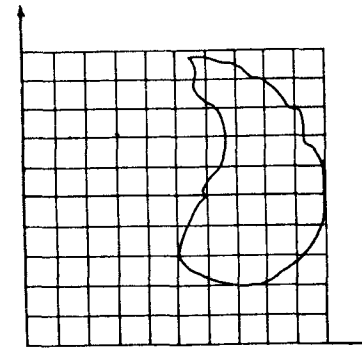


Рис. 4.3.4. Проекция рабочего пространства 6R-манипулятора на вертикальную плоскость.

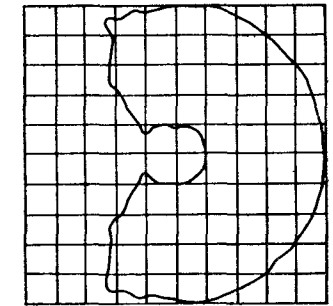


Рис. 4.3.5. Проекция рабочего пространства 6R-манипулятора на горизонтальную плоскость.

могут быть получены путем рисования границ (контура) рабочей области при помощи программы на ЭВМ. Типичные рабочие области приведены на рис. 4.3.4 и 4.3.5 в допущении, что схват робота — это точка (из работы [6]). ■

4.4. ПОКАЗАТЕЛЬ КАЧЕСТВА РАБОЧЕГО ПРОСТРАНСТВА РОБОТА

При рассмотрении рабочего пространства роботов важным является выбор показателя качества. Еще в 1983 г. Ли и Янг [3] доказали теорему, которая ясным образом определяет

такой показатель. Перед тем как ее сформулировать, рассмотрим манипуляционный робот общего вида с вращательными сочленениями с длинами звеньев a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и расстояниями между звеньями d_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть для простоты

$$a_i = l_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad (4.4.1)$$

$$d_i = l_{i+n}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4.4.2)$$

Тогда на основании пространственного анализа объем рабочего пространства для этого манипулятора может быть представлен в общем виде как

$$V = \sum_{i, j, k}^{2n} \mu_{ijk} l_i l_j l_k, \quad (4.4.3)$$

где i, j и k — целые от 1 до $2n$ и μ_{ijk} — соответствующий коэффициент при члене $l_i l_j l_k$. Теперь можно сформулировать очень важную теорему [6].

Теорема Ли — Янга. Для данного манипулятора (для которого заданы углы поворота звеньев, пределы изменения углов в сочленениях и отношения длин звеньев) отношение объема рабочего пространства к кубу полной длины является константой, т. е.

$$\frac{V}{(l_1 + l_2 + \dots + l_{2n})^3} = \frac{V}{L^3} = \text{const}. \quad (4.4.4)$$

Доказательство. Длины всех звеньев и расстояния между ними могут быть выражены через осевое смещение последнего звена $d_n = l_{2n}$. Таким образом,

$$l_i = p_i l_{2n}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n, \quad (4.4.5)$$

где p_i — известные коэффициенты пропорциональности. Подставив выражения, определяемые формулами (4.4.5), в (4.4.3), получим

$$V = \sum_{i, j, k}^{2n} \mu_{ijk} l_i l_j l_k = \sum_{i, j, k}^{2n} \mu_{ijk} p_i p_j p_k l_{2n}^3 = P_1 l_{2n}^3, \quad (4.4.6)$$

где $P_1 = \sum_{i, j, k}^{2n} \mu_{ijk} p_i p_j p_k$ — константа. Теперь пусть $L = l_1 + l_2 + \dots + l_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} l_i$ является полной длиной. Тогда очевидно, что

$$P_1 = \sum_{i=1}^{2n} l_i = \sum_{i=1}^{2n} p_i l_{2n} = P_2 l_{2n}, \quad (4.4.7)$$

где $P_2 = \sum_{i=1}^{2n} p_i$ — другая константа. Таким образом, показатель качества рабочего пространства может быть определен как

объемный коэффициент VI, такой, что

$$VI = \frac{V}{L^3} = \frac{P_1 l_{2n}^3}{P_2^3 l_{2n}^3} = P_1 P_2^{-3}. \quad (4.4.8)$$

На этом доказательство теоремы завершается.

Очевидно, что максимальное значение VI получается для робота с рабочим пространством в виде сферы радиуса L . В этом случае

$$(VI)_{\text{макс}} = \frac{4\pi L^3/3}{L^3} = \frac{4\pi}{3} \approx 4,188. \quad (4.4.9)$$

Основываясь на этом значении, можно определить нормированный показатель качества NVI как кинематический показатель

Таблица 4.4.1. Показатель качества промышленных роботов

Робот	Степени подвижности	L (дюйм)	V (дюйм ³)	VI	NVI
PUMA600	6	51.0	183986	1.39	0.331
C.M.T ³	6	101.0	2295233	2.23	0.532
Pana-Robo	5	59.84	355937	1.66	0.397
AID-800	5	59.02	267350	1.30	0.310
CT-V30	5	94.49	1299251	1.54	0.368

качества для количественной оценки манипуляторов по их рабочему пространству. В табл. 4.4.1, взятой из книги Ли и Янга [3], даны показатели VI и NVI для нескольких промышленных манипуляторных роботов.

4.5. ПРЕДЕЛЫ ДОСЯГАЕМОСТИ СХВАТА

Рассмотрим исполнительный механизм с двумя вращательными сочленениями ($2R$) с расстояниями между осями сочленений d_1 и d_2 и длинами звеньев a_1 и a_2 , как показано на рис. 4.5.1. Заметим, что в этом случае

$$R_{32}^2 = d_1^2 + a_1^2 + d_2^2 + a_2^2 + 2d_1 d_2 \cos \alpha_1 + 2a_2 (d_1 \sin \alpha_1 \sin \theta_2 + a_1 \cos \theta_2). \quad (4.5.1)$$

Таким образом, условие экстремума расстояния до схвата имеет вид

$$\text{tg } \theta_2 = \frac{d_1 \sin \alpha_1}{a_1}, \quad (4.5.2)$$

что, очевидно, соответствует двум экстремумам — максимальному и минимальному расстояниям.

Пример 4.5.1 ■

Найти пределы досягаемости манипуляционного робота общего вида с двумя вращательными сочленениями, изображенного на рис. 4.5.1.

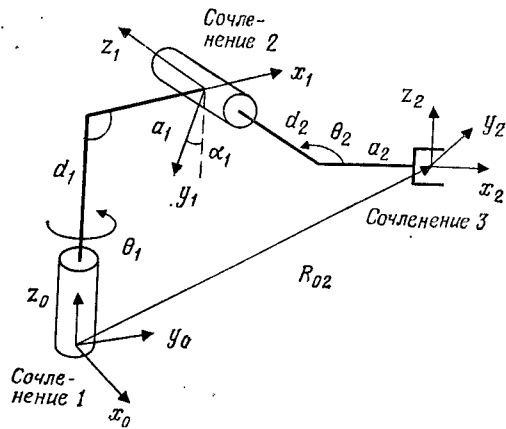


Рис. 4.5.1. 2R-манипулятор.

Решение. Подставив значение θ_2 из (4.5.2) в (4.5.1), что соответствует экстремальным значениям (4.5.1), получим

$$(R_{02})_{\text{макс. мин}}^2 = d_1^2 + a_1^2 + d_2^2 + a_2^2 + 2d_1d_2 \cos \alpha_1 + 2a_2 \{ d_1 \sin \alpha_1 \sin [\arctg (a_1 d_1 \sin \alpha_1)] + a_1 \cos [\arctg (a_1^{-1} d_1 \sin \alpha_1)] \}. \quad (4.5.3)$$

Чтобы вывести общее выражение, рассмотрим манипуляционный робот с любым числом сочленений произвольного типа, оси движений которых обозначены через z_i . Вектор p положения схвата

$$p = p_x i + p_y j + p_z k, \quad (4.5.4)$$

где, очевидно (рис. 4.5.2),

$$p_x = \hat{p}_x(\theta_i), \quad p_y = \hat{p}_y(\theta_i), \quad p_z = \hat{p}_z(\theta_i). \quad (4.5.5)$$

Заметим, что

$$p = |p| = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}. \quad (4.5.6)$$

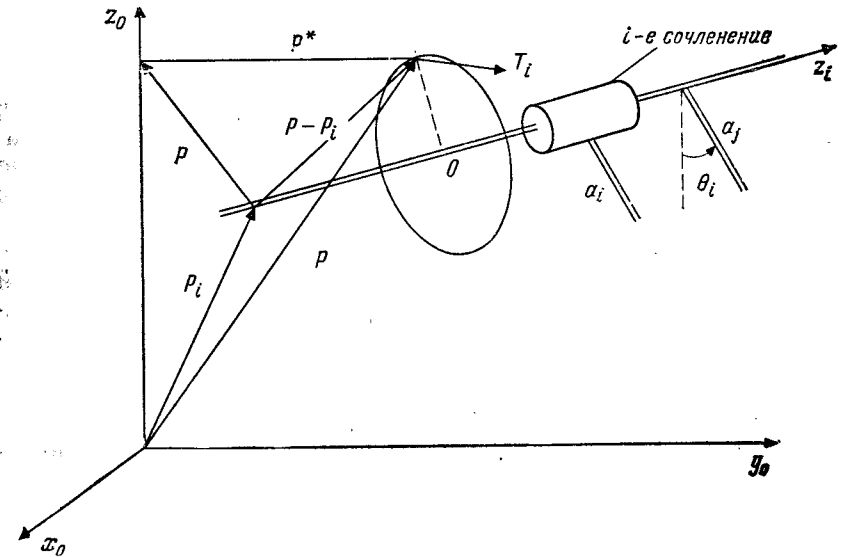


Рис. 4.5.2. Сочленение манипулятора и влияние его вращения на движение схвата в рабочем пространстве.

Чтобы получить пределы досягаемости для этого робота, нужно найти $dp/d\theta_i$, т. е.

$$\frac{dp}{d\theta_i} = p^{-1} (p T_i), \quad \text{где} \quad (4.5.7)$$

$$T_i = \frac{dp}{d\theta_i} = \frac{\partial p_x}{\partial \theta_i} i + \frac{\partial p_y}{\partial \theta_i} j + \frac{\partial p_z}{\partial \theta_i} k; \quad (4.5.8)$$

T_i является касательной к сфере радиуса p и перпендикулярно к оси z_i . Для обеспечения экстремума (экстремального расстояния) необходимо выполнение условия $dp/d\theta_i = 0$, и, следовательно,

$$p \cdot T_i = 0. \quad (4.5.9)$$

Заметим, что, вообще говоря, для того чтобы вектор T_i был перпендикулярен и вектору p , и оси z_i , и касательным к сфере радиуса p , а также имел начальную точку в начале системы координат основания, необходимо, чтобы

$$T_i = z_i \times (p - p_i), \quad (4.5.10)$$

где p_i — произвольный вектор, проведенный из начала координат вдоль направления оси z_i . Таким образом, общим

условием экстремума является

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{p}_i \times \mathbf{z}_i) = 0. \quad (4.5.11)$$

Итак, три вектора \mathbf{p} , \mathbf{p}_i и \mathbf{z}_i должны лежать в одной плоскости, а оси промежуточных сочленений должны пересекать линию, имеющую экстремальную длину. Таким образом, можно сформулировать следующую общую теорему Сугимото, Даффи и Томаса (СДТ).

Теорема 4.5.1 (СДТ-I). Для сочленения робота, показанного на рис. 4.5.2, три вектора \mathbf{p} , \mathbf{p}_i и \mathbf{z}_i должны лежать в одной плоскости и оси всех промежуточных сочленений должны пересекать линию, проведенную к точке с экстремальным удалением.

Доказательство. Рассмотрим соотношения (4.5.4) — (4.5.11). Обращаясь снова к рис. 4.5.2, рассмотрим вектор \mathbf{p}^* , проведенный из точки касания и перпендикулярный оси z_0 . Итак, \mathbf{p}^* представляется в виде

$$\mathbf{p}^* = p_x^* \mathbf{i} + p_y^* \mathbf{j}. \quad (4.5.12)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial p^*}{\partial \theta_i} = \mathbf{p}^* (\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{T}_i), \quad \text{где} \quad (4.5.13)$$

$$p^* = (p_x^{*2} + p_y^{*2})^{1/2}. \quad (4.5.14)$$

Как и ранее, чтобы точка касания имела экстремальное удаление относительно оси z_0 , необходимо, чтобы

$$\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{T}_i = 0; \quad p \neq 0. \quad (4.5.15)$$

Но из соотношения (4.5.2) следует, что

$$\mathbf{p} = p_z \mathbf{k} + \mathbf{p}^*. \quad (4.5.16)$$

Подставив выражение (4.5.16) в (4.5.10), получим

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{z}_i \times (p_z \mathbf{k} + \mathbf{p}^* - \mathbf{p}_i). \quad (4.5.17)$$

Подставив теперь выражение (4.5.17) в (4.5.15), будем иметь

$$\mathbf{p}^* \cdot [\mathbf{z}_i \times (p_z \mathbf{k} - \mathbf{p}_i)] = 0. \quad (4.5.18)$$

Отсюда следует вторая теорема Сугимото, Даффи и Томаса (СДТ-II).

Теорема 4.5.2. (СДТ-II). Для обобщенного сочленения, показанного на рис. 4.5.2, три вектора \mathbf{p} , \mathbf{z}_i и $(p_z \mathbf{k} - \mathbf{p}_i) = \mathbf{p}$ должны лежать в одной плоскости и оси всех промежуточных сочленений должны пересекать линию, проведенную в точку с экстремальным удалением.

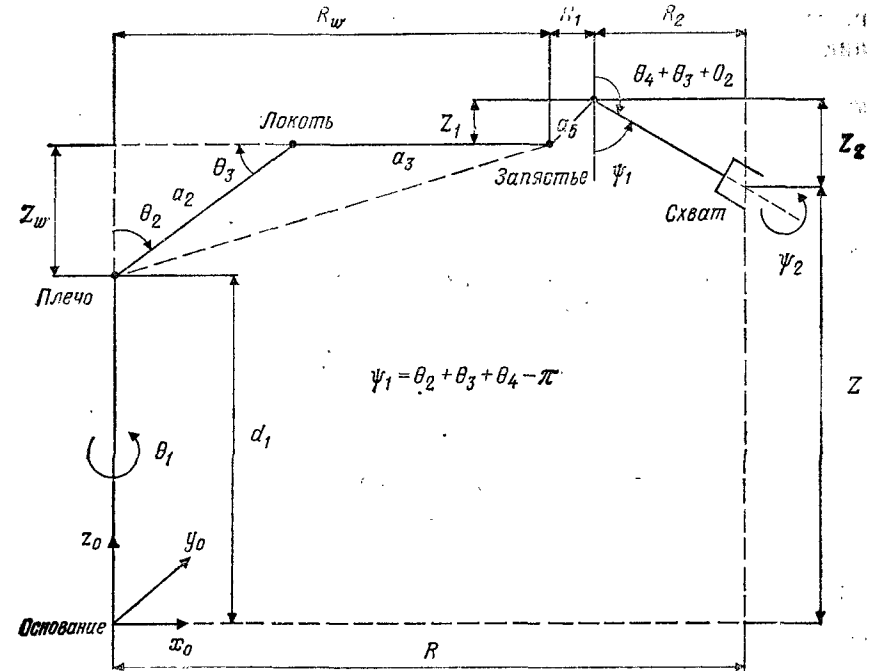


Рис. 4.5.3. Типичная геометрия рабочего пространства манипулятора Rhino XR-2.

Доказательство. Обратитесь к формулам (4.5.12) — (4.5.18) и рис. 4.5.2.

Пример 4.5.2 ■

Используя рис. 4.5.3, найдите предельно достижимые расстояния (границы рабочего пространства) для робота-манипулятора модели Rhino XR-2.

Решение. Из рис. 4.5.3 видно, что первоначально известны углы $\psi_1 = -(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$ и $\psi_2 = \theta_5$. Заметим, что

$$-90^\circ \leq (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \leq 0^\circ. \quad (4.5.19)$$

Кроме того,

$$-180^\circ \leq \theta_5 \leq 180^\circ, \quad (4.5.20)$$

и тогда угол ψ_1 — это чистый угол качания запястья относительно вертикального вектора подхода, направленного к рабочей поверхности, а угол ψ_2 — угол поворота пальца, измеренный относительно нулевого положения. Очевидно, что значение ψ_2

не влияет на положение точки захвата P , но влияет на ориентацию системы координат, связанной с точкой P .

Целью является определение верхней и нижней границ координат x , y и z точки P при условии, что ориентация схвата, описываемая углами ψ_1 и ψ_2 , уже задана. По существу границы должны выбираться таким образом, чтобы фиксированная точка P могла быть достигнута при определенных значениях набора углов в сочленениях θ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Чтобы найти такие экстремальные значения для координат x , y и z , нужно рассмотреть ограничения на положение запястного сочленения. Так, из рис. 4.5.3 найдем, что

$$R_w^2 + Z_w^2 \leq (a_2 + a_3)^2. \quad (4.5.21)$$

Теперь, если необходимо вычислить радиус вращения запястья R_w , из рис. 4.5.3 находим, что

$$R_w = R - R_1 - R_2 = (x^2 + y^2)^{1/2} - a_4 \cos \psi_1 - d_5 \sin \psi_1. \quad (4.5.22)$$

Высота запястного сочленения над плечевым Z_w может быть вычислена по формуле

$$Z_w = Z + Z_2 - d_1 - Z_1 = Z + d_5 \cos \psi_1 - a_4 \sin \psi_1 - d_1. \quad (4.5.23)$$

Подставив выражения (4.5.22) и (4.5.23) в неравенство (4.5.2), получим следующее расширенное неравенство с явно выраженной зависимостью от x , y и z :

$$[(x^2 + y^2)^{1/2} - \beta_1]^2 + (Z - \beta_2)^2 \leq (a_2 + a_3)^2, \quad \text{где} \quad (4.5.24)$$

$$\beta_1 = a_4 \cos \psi_1 + d_5 \sin \psi_1, \quad (4.5.25)$$

$$\beta_2 = a_4 \sin \psi_1 - d_5 \cos \psi_1 + d_1. \quad (4.5.26)$$

Заметим, что если угол ψ_1 определен, неравенство (4.5.24) позволяет найти верхнюю границу координат x , y и z . Рассмотрим эти границы.

Верхняя и нижняя границы координаты x . Если ограничить поворот сочленения в основании промежутком $[-90^\circ, +90^\circ]$, то $\psi_1 = \theta_1$ будет удовлетворять следующему граничному неравенству:

$$-90^\circ \leq \psi_1 \leq 90^\circ. \quad (4.5.27)$$

Это некоторым образом предупредит закручивание кабелей, связывающих манипулятор и систему управления, вокруг основания, и их натяжение. Из рис. 4.5.3 видно, что неравенство $|\theta_1| \leq 90^\circ$ предполагает, что $x \geq 0$. Чтобы получить верхнюю границу x , используем неравенство (4.5.24). Так, положив $y = 0$

и $z = \beta_2$, из (4.5.24) получим

$$0 \leq x \leq a_2 + a_3 + \beta_1 = R_{\text{макс}}. \quad (4.5.28)$$

Нижняя граница может не соответствовать действительности из-за конструктивных ограничений. Следовательно, для получения более реального значения нижней границы координаты x нужно использовать больше данных, касающихся манипулятора Rhino XR-2.

Верхняя и нижняя границы координаты y . Для получения соответствующих границ координаты y для робота Rhino XR-2 нужно опять использовать неравенство (4.5.24) при $Z = \beta_2$ и со значением x , выбранным в соответствии с неравенством (4.5.28). Это дает

$$|y| \leq [(a_2 + a_3 + \beta_1)^2 - x^2]^{1/2}. \quad (4.5.29)$$

Нижняя граница величины $|y|$ может быть установлена, если x приравнять его максимальному значению, которое равно $R_{\text{макс}}$. Выполнив это, получим в результате нуль. С другой стороны, нижняя граница $|y|$ может быть получена, если установлено минимальное значение для R ($R_{\text{мин}}$). Очевидно, $R_{\text{мин}} > 0$; в противном случае пальцы робота Rhino XR-2 будут затянuty в приводы основания (цепь и звездчатое колесо). Заметим, что расстояние между углом корпуса основания и началом системы координат основания составляет около 2 дюймов. Максимальный радиус схвата равен 3 дюймам, а длина схвата от торца до концов пальцев составляет 12 дюймов. Таким образом, $R_{\text{мин}}$ можно определить как

$$R_{\text{мин}} = 2 + 3 \cos \psi_1 + 12 \sin \psi_1. \quad (4.5.30)$$

С учетом того что $x^2 + y^2 \geq R_{\text{мин}}^2$, имеем

$$|y| \geq \max [0, (R_{\text{мин}}^2 - x^2)^{1/2}]. \quad (4.5.31)$$

Приведенное неравенство, следовательно, является условием предохранения схвата от попадания внутрь вертикально расположенного цилиндра с радиусом $R_{\text{мин}}$ и осью z_0 основания.

Верхняя и нижняя границы координаты z . Чтобы получить соответствующие верхнюю и нижнюю границы координаты z , опять воспользуемся неравенством (4.5.24). На данном этапе и x , и y уже определены. Тогда неравенство

$$z \leq \beta_2 + \{(a_2 + a_3)^2 - [(x^2 + y^2)^{1/2} - \beta_1]^2\}^{1/2} \quad (4.5.32)$$

устанавливает верхнюю границу координаты z . Чтобы найти нижнюю границу z , нужно заметить, что схват робота не должен проходить через рабочую поверхность ($z_0 = a$).

По существу нужно установить минимальное значение z (z_{\min}). Для этого случая заметим, что $z_m = 3 \sin \psi_i$ и, следовательно,

$$z \leq \max(z_m, \beta_2 - \{(a_2 + a_3)^2 - [(x^2 + y^2)^{1/2} - \beta_1]^2\}^{1/2}). \quad (4.5.33)$$

На этом рассмотрение рабочего пространства робота Rhino XR-2 завершается. Для любого другого робота процедура рассмотрения такая же.

Пример 4.5.3

Для робота Microbot Minimover, показанного на рис. 4.5.4, определите верхнюю и нижнюю границы координат x , y и z .

Решение. Сначала найдите общее неравенство, подобное (4.5.24), а затем проанализируйте задачу подобно тому, как

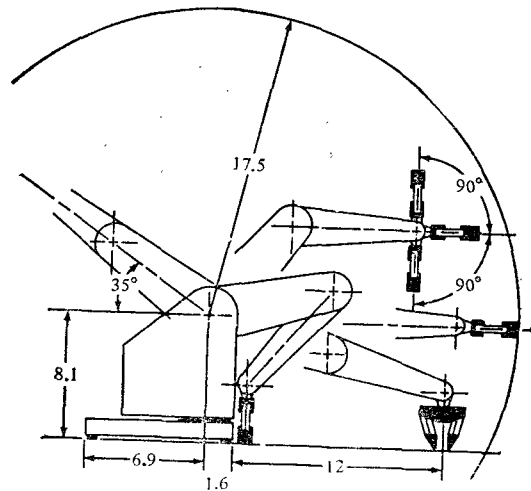


Рис. 4.5.4. Рабочая поверхность манипулятора Microbot Minimover. (Все линейные размеры даны в дюймах.)

рассмотрено в предыдущих разделах. Заметим, что из рис. 4.5.4 следует, что границы для x , y и z равны

$$-17.5 \leq x \leq 17.5 \text{ дюйма,}$$

$$-17.5 \leq y \leq 17.5 \text{ дюйма,}$$

$$0 \leq z \leq 25.6 \text{ дюйма.}$$

В табл. 4.5.1 приведены дополнительные характеристики робота Microbot Minimover.

Таблица 4.5.1. Характеристики робота

Перемещение	Максимальный диапазон перемещений	Скорость (с грузом)	Скорость (без груза)
Основание	$\pm 90^\circ$	0.37 рад/с	0.42 рад/с
Плечо	$\pm 144^\circ, -35^\circ$	0.15 рад/с	0.36 рад/с
Локоть	$+0^\circ, -149^\circ$	0.23 рад/с	0.82 рад/с
Вращение запястья	$\pm 360^\circ$	1.31 рад/с	2.02 рад/с
Наклон запястья	$\pm 90^\circ$	1.31 рад/с	2.02 рад/с
Рука	0—3 дюйм	8 мм/с	20 мм/с

4.6. ОПИСАНИЕ РОБОТОТЕХНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ (МАНИПУЛИРОВАНИЕ РОБОТ — ОБЪЕКТ)

Как отмечалось ранее, объекты могут быть описаны при помощи однородных матриц размера $4 \times n$. С другой стороны, подвижные системы координат могут быть описаны однородными матрицами размера 4×4 . Вообще говоря, для полного описания объекта достаточно преобразования (описания) размера 4×4 систем координат объекта. Для сложных объектов, таких, как чашка, может не хватать матриц размера 4×4 , и, возможно, более подходящим и удобным будет использование матриц размера $4 \times n$.

Рассмотрим чашку, изображенную на рис. 4.6.1. Задача может состоять в том, чтобы поднять чашку и перенести ее в точку, где из кофейного бака в нее можно налить кофе. Система координат основания робота связана с эталонной системой координат преобразованием Z . Z здесь является общим однородным преобразованием размера 4×4 .

Чашка сначала расположена так, что с системой координат основания ее связывает преобразование C_0 . Схват связан с системой координат основания преобразованием T_0^6 . Пусть преобразование, описывающее конечные положение и ориентацию чашки в системе координат основания, обозначено через C_A .

Задачу можно сформулировать с использованием следующей последовательности преобразований размера 4×4 .

1. Подход схвата к чашке $T_0^6 C_0$.
2. Отход схвата от чашки $T_0^6 C_A$.
3. Удерживание схватом чашки относительно системы координат $uvw T_0^6 C$.
4. Позиционирование и ориентирование чашки в процессе подъема $C_{ii}, i = 1, 2, \dots, L$.
5. Позиционирование и ориентирование чашки в процессе спуска $C_{is}, i = 1, 2, \dots, S$.

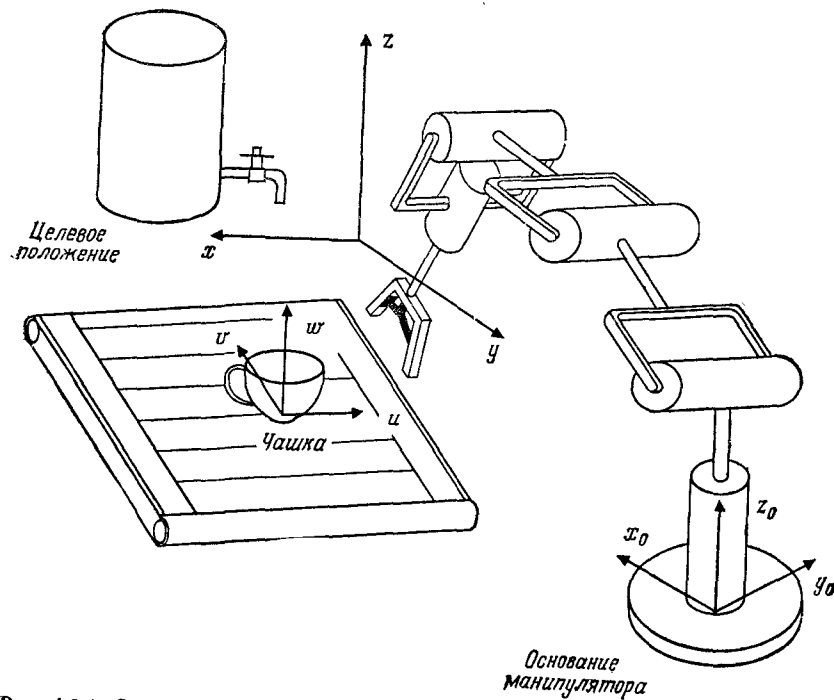


Рис. 4.6.1. Описание типичного задания.

6. Преобразования, относящиеся к операциям над краном кофейного бака. Таким образом, формулировка задачи робототехнического манипулирования заключается в описании набора матриц преобразований 4×4 . Каждое преобразование предполагает, что либо робот, либо предметы манипулирования изменили свои как положение, так и ориентацию, а последовательные преобразования, поскольку они перемножаются, означают последовательность перемещений и поворотов.

Описав задачу последовательностью однородных преобразований, мы оказываемся в ситуации, когда можно непосредственно связываться с управляющей ЭВМ, работающей как мозг робота, и запрашивать, чтобы такая последовательность была выполнена роботом. На этом этапе нужно спланировать траекторию перемещения робота, пригодную для выполнения описанной задачи (рис. 4.6.2).

Пример 4.6.1 ■

Опишите множество способов, при помощи которых последовательность преобразований может быть записана и сохранена в памяти управляющей ЭВМ.

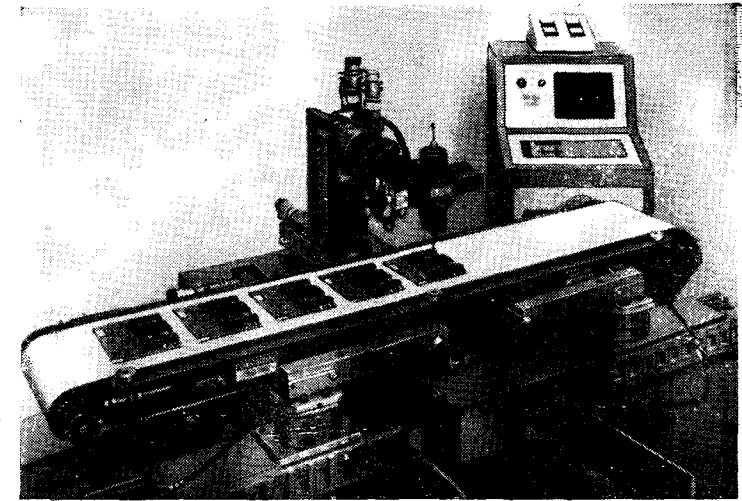


Рис. 4.6.2. Робот, inspectирующий печатные интегральные платы. (С разрешения Anorad Robots.)

Решение. Существует три весьма отличных друг от друга способа обучения робота выполнению задачи. Первая методика, особенно применимая для роботов с шаговыми двигателями, заключается в проведении робота вручную по траектории, связывающей точки, описываемые различными преобразованиями. Вторая методика состоит в управлении и планировании траектории перемещения вручную с помощью пульта обучения. По третьей методике числовые данные, относящиеся к различным преобразованиям, вводятся в ЭВМ. Эти данные используются для управления роботом в соответствии с этими преобразованиями. В следующем разделе мы рассмотрим подробности, относящиеся к планированию траекторий перемещения при полностью определенной робототехнической задаче.

4.7. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ РОБОТОВ

4.7.1. ВВЕДЕНИЕ

Мы изучили, каким образом можно описать задачу робототехнического манипулирования при помощи однородных преобразований; теперь нужно рассмотреть методы проектирования траекторий перемещения робота. Нужно описать желаемые дви-

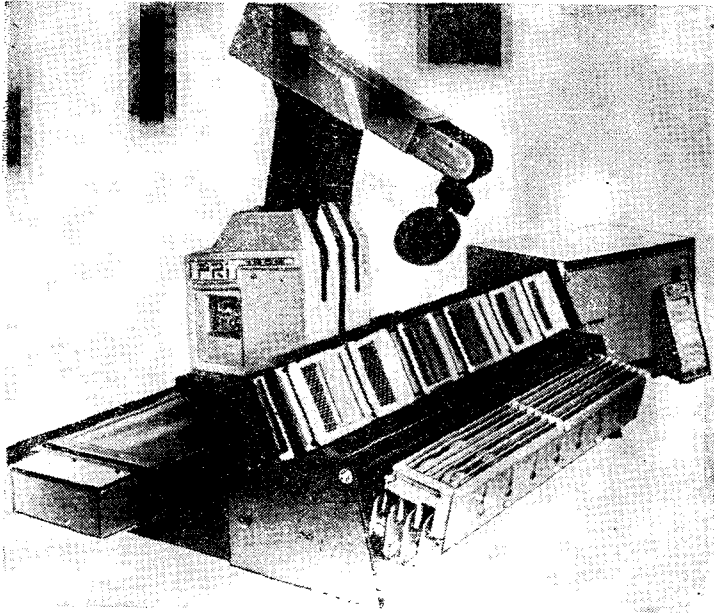


Рис. 4.7.1. Робот, размещающий МОП-пластины. (С разрешения PRI.)

жения манипуляционных роботов либо в пространстве обобщенных координат, либо в трехмерном рабочем пространстве, либо в координатах схвата в зависимости от того, интересуют ли нас зависимости от времени положения, ориентации, линейной скорости, угловой скорости, линейного ускорения и углового ускорения (рис. 4.7.1).

С точки зрения интересов человека-оператора робототехническая система должна быть способна позаботиться о деталях траектории движения, как только введены преобразования, описывающие задачу. Например, оператор может просто ввести желаемое кинематическое положение схвата робота для манипулирования объектом и предоставить системе управления роботом планировать форму траектории перемещения и такие детали, как профили изменения скорости и ускорения. Это определенным образом связано с так называемым *программированием на уровне задачи*, которое будет рассмотрено в гл. 9. Мы же обратимся к вопросу о том, каким образом траектории перемещения роботов интерпретируются управляющей ЭВМ и каким образом управляющая ЭВМ в действительности строит такие траектории и выдает команды роботу на выполнение же-

лаемых задач. Цифровой природой управляющей ЭВМ обусловлено то, что генерация траекторий осуществляется дискретным образом. Так, генерация каждой дискретной точки на траектории движения происходит за так называемое *время просчета траектории*. Точки могут генерироваться с частотой 10—300 Гц в зависимости от того, какая частота вычисления точек траектории может быть достигнута на управляющей ЭВМ. Задача состоит в том, чтобы переместить схват робота из начального кинематического положения $\mathbf{H}(0)$ в заданное кинематическое положение $\mathbf{H}(t)$ за время t . Естественным представляется описать движение гораздо более детально, чем определить лишь начальную и конечную точки, с тем чтобы избежать столкновений с предметами, находящимися в рабочей области. Таким образом, определяются *промежуточные точки*, в которых должно быть найдено кинематическое положение схвата робота. Для более подробно описанных траекторий должны быть определены значения обобщенной скорости и обобщенного ускорения. Очевидно, чтобы получить изменяющееся во времени кинематическое положение схвата робота $\mathbf{H}(t)$, необходимо прибегнуть к множеству изменяющихся во времени углов в сочленениях, или, иначе, к зависящему от времени вектору углов в сочленениях $\theta(t)$, такому, что

$$\theta(t) = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_n)^T, \quad (4.7.1)$$

где $\theta(t)$ — не что иное, как зависящее от времени решение обратной задачи кинематики с начальным $\mathbf{H}(0)$ и конечным $\mathbf{H}(t)$ кинематическими положениями схвата робота.

Далее мы опишем множество способов, применяемых для планирования и генерации желаемых векторов углов в сочленениях манипулятора.

4.7.2. КУБИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ УГЛОВ В СОЧЛЕНЕНИЯХ

Простейший и наиболее часто используемый способ определения закона изменения угла в сочленении $\theta_i(t)$ — это определение начального и конечного значений $\theta_i(t)$ и $\dot{\theta}_i(t)$, которые обычно принимают следующие значения:

$$\theta_i(0) = \theta_{i0}, \quad (4.7.2)$$

$$\theta_i(t_f) = \theta_{if}, \quad (4.7.3)$$

$$\dot{\theta}_i(0) = 0, \quad (4.7.4)$$

$$\dot{\theta}_i(t_f) = 0, \quad (4.7.5)$$

где t_f — конечный момент времени, а к схвату робота предъявляется требование, чтобы он находился в состоянии покоя в начальный момент времени $t=0$ и достигал состояния покоя в момент времени $t=t_f$.

Условиям (4.7.2) — (4.7.5) могут удовлетворить многочлены третьей степени от времени, т. е.

$$\theta_i(t) = \theta_{i0} + a_{1i}t + a_{2i}t^2 + a_{3i}t^3, \quad (4.7.6)$$

такие, что

$$\theta_{if} = \theta_{i0} + a_{1i}t_f + a_{2i}t_f^2 + a_{3i}t_f^3, \quad (4.7.7)$$

$$0 = a_{1i}, \quad (4.7.8)$$

$$0 = 2a_{2i}t_f + 3a_{3i}t_f^2, \quad (4.7.9)$$

откуда a_{2i} и a_{3i} получаются равными

$$a_{2i} = 3(\theta_{if} - \theta_{i0})t_f^{-2}, \quad (4.7.10)$$

$$a_{3i} = 2(\theta_{i0} - \theta_{if})t_f^{-3}. \quad (4.7.11)$$

Если начальная и конечная скорости не равны нулю, как в ситуации с роботом, отслеживающим движение конвейера, коэффициенты полинома получаются из условий выполнения следующих ограничений:

$$\dot{\theta}_i(0) = \dot{\theta}_{i0}, \quad (4.7.12)$$

$$\dot{\theta}_i(t_f) = \dot{\theta}_{if}. \quad (4.7.13)$$

После этого легко определить коэффициенты в формуле (4.7.6):

$$a_{1i} = \dot{\theta}_{i0}, \quad (4.7.14)$$

$$a_{2i} = 3(\theta_{if} - \theta_{i0})t_f^{-2} - 2\dot{\theta}_{i0}t_f^{-1} - \dot{\theta}_{if}t_f^{-1}, \quad (4.7.15)$$

$$a_{3i} = 2(\theta_{i0} - \theta_{if})t_f^{-3} + (\dot{\theta}_{i0} + \dot{\theta}_{if})t_f^{-2}. \quad (4.7.16)$$

Заметим, что соотношения (4.7.14) — (4.7.16) носят достаточно общий характер, чтобы быть применимыми к любой промежуточной точке между начальной и конечной точками траектории. Однако вследствие требования непрерывности положения, скорости и ускорения решение уравнений относительно коэффициентов становится более сложным.

Пример 4.7.1

Найдите коэффициенты для двух кубических законов изменения углов в сочленениях, приняв равными продолжительности прохождения по обоим участкам траектории.

Решение. Заметим, что в этом случае для первого и второго участков траектории движения

$$\theta_1(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3, \quad (4.7.17)$$

$$\theta_2(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3. \quad (4.7.18)$$

Ограничения имеют вид

$$\theta_1(0) = \theta_{10}, \quad \theta_2(0) = \theta_1(t_{f1}); \quad (4.7.19)$$

$$\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_{10}, \quad \dot{\theta}_2(0) = \dot{\theta}_1(t_{f1}); \quad (4.7.20)$$

$$\dot{\theta}_2(t_{f2}) = \dot{\theta}_{2f}, \quad \dot{\theta}_2(t_{f2}) = \dot{\theta}_{2f}; \quad (4.7.21)$$

$$\ddot{\theta}_1(0) = \ddot{\theta}_{10}, \quad \ddot{\theta}_2(0) = \ddot{\theta}_1(t_{f1}). \quad (4.7.22)$$

Из приведенных восьми формул могут быть найдены восемь коэффициентов a_{10} , a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{20} , a_{21} , a_{22} и a_{23} (см. домашнее задание 6)

Пример 4.7.2

Постройте графики положения, скорости и ускорения для траектории с двумя участками с непрерывным ускорением, такой, что $\theta_0 = 6^\circ$, $\theta_2(0) = 16^\circ = \theta_{20}$ и $\theta_{2f} = 39^\circ$; каждый участок

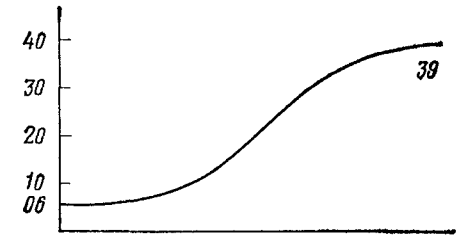


Рис. 4.7.2. Изменение положения.

траектории проходит в течение примерно одной секунды, а скорость в промежуточной точке равна $\dot{\theta}_{20} = 18^\circ/\text{с}$.

Решение. Заметим, что

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3,$$

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2,$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3t.$$

Для участка 1 $a_{01} = \theta_0$, $a_{11} = 0$, $a_{21} = 3t_{f1}^{-2}(\theta_{20} - \theta_0) - \dot{\theta}_{20}t_{f1}^{-1}$ и $a_{31} = 2t_{f1}^{-3}(\theta_0 - \theta_{20}) + \dot{\theta}_{20}t_{f1}^{-2}$, где $\dot{\theta}_{20} = \dot{\theta}_1(t_{f1})$. Для участка 2 $a_{02} = \theta_{20}$, $a_{22} = 3t_{f2}^{-2}(\theta_{2f} - \theta_{20}) - 2\dot{\theta}_{20}t_{f2}^{-1}$, $a_{32} = 2t_{f2}^{-3}(\theta_{20} - \theta_{2f}) + \dot{\theta}_{20}t_{f2}^{-2}$ и $a_{12} = \dot{\theta}_{20}$.

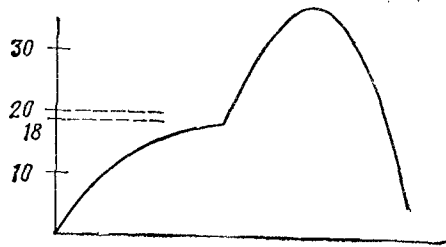


Рис. 4.7.3. Изменение скорости.

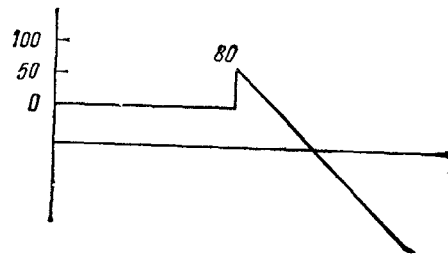


Рис. 4.7.4. Изменение ускорения.

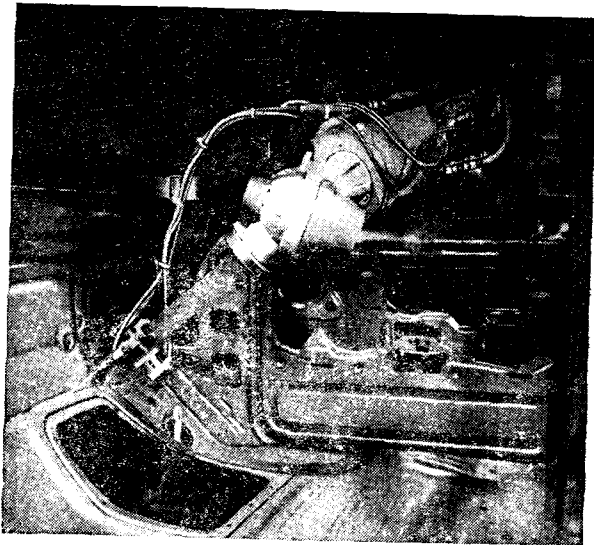


Рис. 4.7.5. Сложное движение манипулятора. (С разрешения Cincinnati Milacron.)

На основании приведенных формул можно построить графики положения, скорости и ускорения (см. рис. 4.7.2—4.7.5)¹⁾.

4.8. ОБЩИЕ АСПЕКТЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ

Вообще говоря, при планировании траектории робота нужно учитывать следующие обстоятельства.

1. Когда схват поднимает предмет, его движение должно быть направлено от опорной поверхности, чтобы избежать столкновения с ней.

2. Конечная точка подъема предмета должна лежать на нормали к поверхности, а начало системы координат схвата должно пройти через эту точку. Таким образом будет обеспечено допустимое движение схвата. Контроль за скоростью, с которой должен подниматься предмет, может осуществляться путем слежения за временем, требуемым для перехода в эту точку.

3. Расстояние от конечной точки подъема до опорной поверхности рекомендуется выбирать равным не меньше 25 % длины последнего звена робота ($0.25d_6 + \text{длина инструмента}$) (рис. 4.8.1).

4. Требования 1—3 относятся и к начальной точке спуска, т. е. схват должен перемещаться в направлении, перпендикулярном поверхности, и замедляться при подходе к опорной поверхности.

5. Из приведенных выше соображений следует, что на каждой траектории робота имеются четыре типа точек — начальная точка, конечная точка подъема, начальная точка спуска, конечная точка (рис. 4.8.2).

Таким образом, на процесс планирования траектории можно наложить следующие ограничения.

1. Начальное положение фиксировано.
2. Начальная скорость обычно равна нулю.
3. Начальное ускорение обычно равно нулю.
4. Конечное положение фиксировано.
5. Конечная скорость обычно равна нулю.
6. Конечное ускорение обычно равно нулю.
7. Конечная точка подъема должна находиться от опорной поверхности на расстоянии $0.25d_6 + \text{длина инструмента}$.
8. Начальная точка спуска должна находиться от опорной поверхности на расстоянии $0.25d_6 + \text{длина инструмента}$.

¹⁾ Приведенные на рис. 4.7.2—4.7.4 графики положения скорости и ускорения, по-видимому, относятся к разным счлениениям. — Прил. ред.

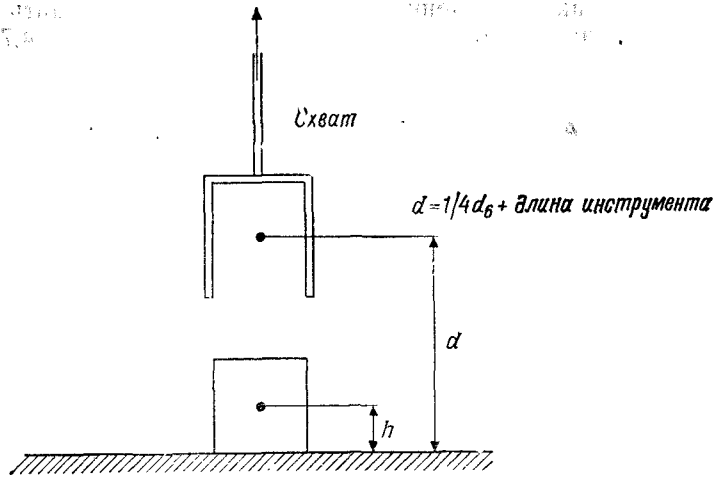
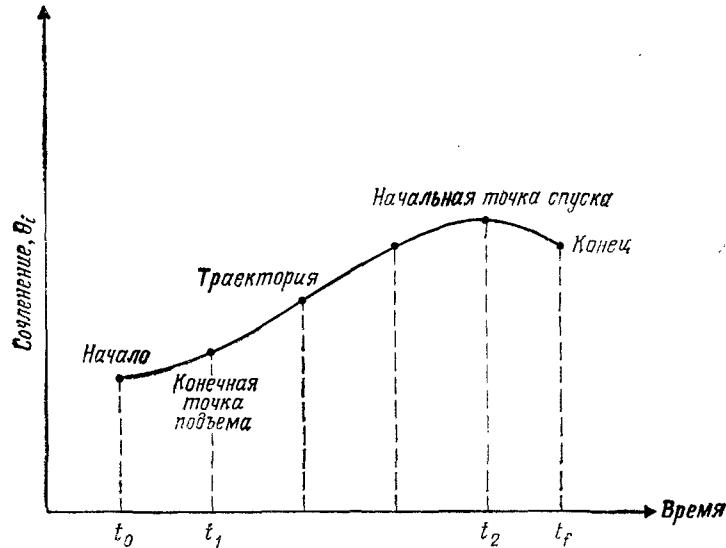


Рис. 4.8.1. Рекомендуемая конечная точка подъема.

Рис. 4.8.2. Типичная траектория движения i -го сочленения.

К перечисленным выше ограничениям можно также добавить ограничения на скорость и ускорение в промежуточных положениях, т. е. в точках подъема и спуска. Однако, опустив эти ограничения, мы будем иметь восемь ограничений, которые можно было бы удовлетворить полиномом с неизвестными коэффициентами не менее чем седьмой степени. Так, для любого угла в сочленении θ_i можно записать

$$\theta_i(t) = \sum_{n=0}^7 a_{ni} t^n, \quad (4.8.1)$$

где a_{ni} — элементы матрицы размера $8 \times i$.

Так как это выражение — полином седьмой степени, возможно, он будет иметь значительное число экстремумов (максимумов и минимумов), что было бы нежелательно для траекторий перемещения роботов. Кроме того, вычисление всех неизвестных коэффициентов может занять много времени (если $i = 6$,

Таблица 4.8.1. Ограничения, относящиеся к траекториям сочленений

	Описание ограничения	Уравнения ограничения
1	Начальное положение схвата	$\theta_i(t_0) = \theta_{i0}^*$
2	Начальная скорость робота	$\dot{\theta}_i(t_0) = \dot{\theta}_{i0}^*$
3	Начальное ускорение робота	$\ddot{\theta}_i(t_0) = \ddot{\theta}_{i0}^*$
4	Конечное положение робота при захвате	$\theta_i(t_1) = \theta_{i1}^*$
5	Непрерывность по положению в момент t_1	$\theta_i(t_1^-) = \theta_i(t_1^+)$
6	Непрерывность по скорости в момент t_1	$\dot{\theta}_i(t_1^-) = \dot{\theta}_i(t_1^+)$
7	Непрерывность по ускорению в момент t_1	$\ddot{\theta}_i(t_1^-) = \ddot{\theta}_i(t_1^+)$
8	Начальное положение робота при установке	$\theta_i(t_2) = \theta_{i2}^*$
9	Непрерывность по положению в момент t_2	$\theta_i(t_2^-) = \theta_i(t_2^+)$
10	Непрерывность по скорости в момент t_2	$\dot{\theta}_i(t_2^-) = \dot{\theta}_i(t_2^+)$
11	Непрерывность по ускорению в момент t_2	$\ddot{\theta}_i(t_2^-) = \ddot{\theta}_i(t_2^+)$
12	Конечное положение робота	$\theta_i(t_3) = \theta_{i3}^*$
13	Конечная скорость робота	$\dot{\theta}_i(t_3) = \dot{\theta}_{i3}^*$
14	Конечное ускорение робота	$\ddot{\theta}_i(t_3) = \ddot{\theta}_{i3}^*$

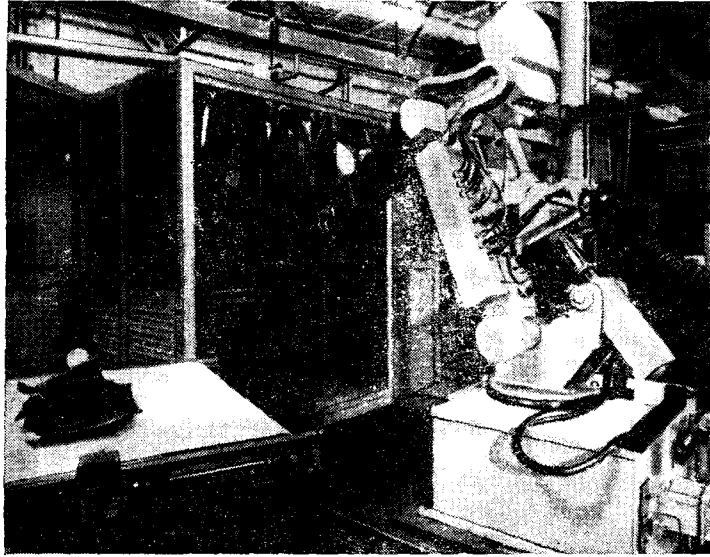


Рис. 4.8.3. Применение робота в лазерной резке. (С разрешения Cincinnati Milacron.)

имеем 48 коэффициентов). Нужно также найти экстремальные значения на траектории перемещения робота с тем, чтобы убедиться, что эти экстремумы не выходят за рабочую поверхность. Таким образом, желательно прибегнуть к полиномам низких степеней путем деления траектории на участки, для которых вычисления выполняются сравнительно легко. Преимуществом таких полиномов низких степеней является то, что для них легче вычислить неизвестные коэффициенты и найти корни их производных при вычислении экстремумов.

Все такие разделенные на участки траектории должны быть непрерывны по положению, скорости и ускорению для достижения плавности движений робота. Для того чтобы это выполнялось, значения перечисленных параметров должны совпадать на пересечениях участков.

Приняв во внимание все подобные ограничения, приходим в конце концов к 14 ограничениям для вычисления неизвестных коэффициентов в точках пересечения трех участков траектории, т. е. траектории типа 4—3—4 и 3—5—3. Три участка — начальный, промежуточный и конечный. В табл. 4.8.1 указаны 14 ограничений, относящихся к траекториям, разделенным на участки (рис. 4.8.3).

Чтобы полностью определить три полинома низкой степени при наложении приведенных выше 14 ограничений, сумма показателей степеней переменной t должна быть 14—3, потому что для этих трех различных полиномов имеются три свободных константы. Другими словами, должно быть 14 неизвестных, являющихся коэффициентами полиномов. Три из них являются свободными, так как они не умножаются на t . Таким образом, из-за того что полином m -й степени от t должен иметь $m+1$ коэффициентов, сумма степеней этих полиномов, относящихся к трем участкам, должна быть равна по меньшей мере 11. Существует множество способов удовлетворить этому условию, в частности $4+3+4$, $3+5+3$ или $5+2+4$. Рассмотрим подробнее некоторые из этих траекторий.

4.8.1. ТРАЕКТОРИЯ ТИПА 4—3—4

Для трех участков траектории перемещения, а именно: подъем, промежуточный участок и спуск, существуют полиномы четвертой, третьей и четвертой степеней, которые могут довольно хорошо аппроксимировать их. Для поиска решения на каждом из участков удобно ввести безразмерную переменную времени τ , такую, что

$$\tau = \frac{t - t_{m-1}}{t_m - t_{m-1}} \quad \text{и} \quad \tau_m = t_m - t_{m-1}, \quad (4.8.2)$$

где индексы m и $m-1$ относятся к m -му и $(m-1)$ -му участкам траектории движения робота. Таким образом, при движении по m -му участку траектории безразмерное время τ изменяется от 0 до 1, тогда как реальное время меняется от t_{m-1} до t_m . Введение соотношений (4.8.2) значительно упростит выкладки.

Участок 1: Полином четвертой степени. Пусть $\rho_{1i}(\tau)$ является полиномиальным представлением m -го участка траектории движения для i -го сочленения. Тогда

$$\rho_{1i}(t) = \sum_{j=0}^4 C_{1j} \tau^j = C_{10} + C_{11}\tau + C_{12}\tau^2 + C_{13}\tau^3 + C_{14}\tau^4, \quad (4.8.3)$$

$$\tau_1 \dot{\rho}_{1i}(t) = \sum_{j=0}^4 j C_{1j} \tau^{j-1} = C_{11} + 2C_{12}\tau + 3C_{13}\tau^2 + 4C_{14}\tau^3, \quad (4.8.4)$$

$$\tau_1^2 \ddot{\rho}_{1i}(t) = \sum_{j=0}^4 j(j-1) C_{1j} \tau^{j-2} = 2C_{12} + 6C_{13}\tau + 12C_{14}\tau^2. \quad (4.8.5)$$

Заметим, что эти полиномы должны удовлетворять ограничениям, приведенным в табл. 4.8.1. Таким образом,

$$\rho_{1i}(0) = \theta_{10}^*, \quad \dot{\rho}_1(0) = \dot{\theta}_{10}^*, \quad \ddot{\rho}_1(0) = \ddot{\theta}_{10}^*. \quad (4.8.6)$$

Налагая приведенные ограничения на (4.8.3), (4.8.4) и (4.8.5), получим

$$\rho_{1i}(\tau) = C_{14}\tau^4 + C_{13}\tau^3 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_{i0}^*\tau_1^2\tau^2 + \dot{\theta}_{i0}^*\tau_1\tau + \theta_{i0}^*. \quad (4.8.7)$$

Пример 4.8.1 ■

Определить закон движения схвата при подъеме.

Решение. Искомая зависимость относится к углу θ_6 и, следовательно, нужно положить $i = 6$ в (4.8.7). Таким образом,

$$\rho_{16}(\tau) = C_{14}\tau^4 + C_{13}\tau^3 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_{60}^*\tau_1^2\tau^2 + \dot{\theta}_{60}^*\tau_1\tau + \theta_{60}^*. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (4.8.8)$$

Заметим, что в (4.8.7) имеются две неизвестные величины, которые нужно найти, — C_{14} и C_{13} ; они определяются из условий непрерывности:

$$\rho_{1i}(1) = \rho_{2i}(0), \quad \dot{\rho}_{1i}(1) = \dot{\rho}_{2i}(0), \quad \ddot{\rho}_{1i}(1) = \ddot{\rho}_{2i}(0). \quad (4.8.9)$$

Итак, нужно сначала вычислить $\rho_{2i}(\tau)$.

Участок 2: Полином третьей степени. Используя подход, примененный для участка 1, получаем

$$\rho_{2i}(\tau) = \sum_{j=0}^3 C_{2j}\tau^j = C_{20} + C_{21}\tau + C_{22}\tau^2 + C_{23}\tau^3, \quad (4.8.10)$$

$$\tau_2\dot{\rho}_{2i}(\tau) = \sum_{j=0}^3 jC_{2j}\tau^{j-1} = C_{21} + 2C_{22}\tau + 3C_{23}\tau^2, \quad (4.8.11)$$

$$\tau_2^2\ddot{\rho}_{2i}(\tau) = \sum_{j=0}^3 j(j-1)C_{2j}\tau^{j-2} = 2C_{22} + 6C_{23}\tau. \quad (4.8.12)$$

Эти величины должны удовлетворять следующим условиям:

$$\rho_{2i}(0) = \theta_{i1}^*, \quad \dot{\rho}_{2i}(0) = \dot{\theta}_{i1}^*, \quad \ddot{\rho}_{2i}(0) = \ddot{\theta}_{i1}^*. \quad (4.8.13)$$

Соотношения (4.8.2) и (4.8.9) определяют некоторые из неизвестных коэффициентов. Имеем

$$C_{20} = \theta_{i1}^*, \quad C_{21} = \dot{\theta}_{i1}^*\tau_2, \quad C_{22} = \frac{1}{2}\ddot{\theta}_{i1}^*\tau_2^2, \quad (4.8.14)$$

$$C_{13} + C_{14} = \theta_{i1}^* - \left(\theta_{i0}^* + \dot{\theta}_{i0}^*\tau_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_{i0}^*\tau_1^2 \right), \quad (4.8.15)$$

$$4\tau_1^{-1}C_{14} + 3\tau_1^{-1}C_{13} - \tau_2^{-1}C_{21} = -(\dot{\theta}_{i0}^* + \tau_1\ddot{\theta}_{i0}^*), \quad (4.8.16)$$

$$6\tau_1^{-2}C_{13} + 12\tau_1^{-2}C_{14} - 2\tau_2^{-2}C_{22} = -\ddot{\theta}_{i0}^*. \quad (4.8.17)$$

В конце второго участка мы, однако, должны обеспечить выполнение условий непрерывности, т. е.

$$\rho_{2i}(1) = \rho_{3i}(0), \quad \dot{\rho}_{2i}(1) = \dot{\rho}_{3i}(0), \quad \ddot{\rho}_{2i}(1) = \ddot{\rho}_{3i}(0). \quad (4.8.18)$$

Таким образом, чтобы вычислить дополнительные коэффициенты, нужно найти полином для третьего участка.

Участок 3: Полином четвертой степени. По аналогии с подходами, использованными для участков 1 и 2, имеем

$$\rho_{3i}(\tau) = \sum_{j=0}^4 C_{3j}\tau^j = C_{30} + C_{31}\tau + C_{32}\tau^2 + C_{33}\tau^3 + C_{34}\tau^4, \quad (4.8.19)$$

$$\tau_3\dot{\rho}_{3i}(\tau) = \sum_{j=0}^4 jC_{3j}\tau^{j-1} = C_{31} + 2C_{32}\tau + 3C_{33}\tau^2 + 4C_{34}\tau^3, \quad (4.8.20)$$

$$\tau_3^2\ddot{\rho}_{3i}(\tau) = \sum_{j=0}^4 j(j-1)C_{3j}\tau^{j-2} = 2C_{32} + 6C_{33}\tau + 12C_{34}\tau^2. \quad (4.8.21)$$

Начальные условия имеют вид

$$\rho_{3i}(0) = \theta_{i2}^*, \quad \dot{\rho}_{3i}(0) = \dot{\theta}_{i2}^*, \quad \ddot{\rho}_{3i}(0) = \ddot{\theta}_{i2}^*, \quad (4.8.22)$$

которые в сочетании с формулами (4.8.8) — (4.8.10) дают

$$C_{30} = \theta_{i2}^*, \quad C_{31} = \dot{\theta}_{i2}^*\tau_3, \quad C_{32} = \frac{1}{20}\ddot{\theta}_{i2}^*\tau_3^2. \quad (4.8.23)$$

Соотношения непрерывности (4.8.18) дают теперь

$$C_{21} + C_{22} + C_{23} = \theta_{i2}^* - \theta_{i1}^*, \quad (4.8.24)$$

$$\tau_2^{-1}C_{21} + 2\tau_2^{-1}C_{22} + 3\tau_2^{-1}C_{23} - \tau_3^{-1}C_{31} = 0, \quad (4.8.25)$$

$$2\tau_2^{-2}C_{22} + 6\tau_2^{-2}C_{23} - 2\tau_3^{-2}C_{32} = 0. \quad (4.8.26)$$

Наконец, на конце участка должны выполняться ограничения:

$$\rho_{3i}(1) = \theta_{if}^*, \quad \dot{\rho}_{3i}(1) = \dot{\theta}_{if}^*, \quad \ddot{\rho}_{3i}(1) = \ddot{\theta}_{if}^*. \quad (4.8.27)$$

Используя соотношения (4.8.27) и (4.8.19) — (4.8.21), получаем

$$C_{31} + C_{32} + C_{33} + C_{34} = \theta_{if}^* - \theta_{i2}^*, \quad (4.8.28)$$

$$C_{31} + 2C_{32} + 2C_{33} + 4C_{34} = \tau_3\dot{\theta}_{if}^*, \quad (4.8.29)$$

$$2C_{32} + 6C_{33} + 12C_{34} = \tau_3^2\ddot{\theta}_{if}^*. \quad (4.8.30)$$

Отметим, что, так как в общем случае $\dot{\theta}_{i1}^*$, $\ddot{\theta}_{i1}^*$, $\dot{\theta}_{i2}^*$ и $\ddot{\theta}_{i2}^*$ неизвестны, мы определили в явном виде только пять из 14 неизвестных коэффициентов, которыми являются C_{10} , C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{14} , C_{20} , C_{21} , C_{22} , C_{23} , C_{30} , C_{31} , C_{32} , C_{33} и C_{34} . Известные коэффициенты — это

$$(C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{20}, C_{30}) \equiv \left(\theta_{i0}^*, \tau_1\dot{\theta}_{i0}^*, \frac{1}{2}\tau_1^2\ddot{\theta}_{i0}^*, \theta_{i1}^*, \theta_{i2}^* \right). \quad (4.8.31)$$

Остальные девять уравнений (4.8.15)—(4.8.17), (4.8.24)—(4.8.26) и (4.8.28)—(4.8.30) могут быть представлены в матричной форме, а именно

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\tau_1^{-1} & 4\tau_1^{-1} & -\tau_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6\tau_1^{-2} & 12\tau_1^{-2} & 0 & -2\tau_2^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_2^{-1} & 2\tau_2^{-1} & 3\tau_2^{-2} & -\tau_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\tau_2^{-2} & 6\tau_2^{-2} & 0 & -2\tau_3^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{13} \\ C_{14} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \\ C_{34} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_{i1}^* - \left(\theta_{i0}^* + \tau_1 \dot{\theta}_{i0}^* + \frac{1}{2} \tau_1^2 \ddot{\theta}_{i0}^* \right) \\ - (\dot{\theta}_{i1}^* + \ddot{\theta}_{i0}^* \tau_1) \\ - \ddot{\theta}_{i0}^* \\ \theta_{i2}^* - \theta_{i1}^* \\ 0 \\ 0 \\ \theta_{if}^* - \theta_{i2}^* \\ \tau_3 \dot{\theta}_{if}^* \\ \tau_3^2 \ddot{\theta}_{if}^* \end{bmatrix} \quad (4.8.32)$$

Представляя для простоты уравнение (4.8.32) в компактной форме, получаем

$$\mathbf{BC} = \delta, \quad (4.8.33)$$

где \mathbf{B} — 9×9 -матрица коэффициентов \mathbf{C} , а δ — некоторый векторный массив, относящийся к изменениям углов в сочленениях и их производных по времени, как показано в (4.8.32). Полное решение для \mathbf{C} (остальные девять коэффициентов, которые нужно найти) имеет вид

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \delta. \quad (4.8.34)$$

Пример 4.8.2 ■

Найти полные решения в явной форме для трех полиномов $\rho_1(\tau)$, $\rho_2(\tau)$ и $\rho_3(\tau)$.

Решение. Можно показать, что выражения для коэффициентов C_{13} , C_{14} , C_{21} , C_{22} , C_{23} , C_{31} , C_{32} , C_{33} и C_{34} имеют вид (см. при-

ложение А)

$$C_{13} = (\tau_2^{-1} \tau_3 + 2\tau_1^{-1} \tau_3 + 2 + 3\tau_1^{-1} \tau_2)^{-1} \times$$

$$\times \left\{ 2\delta_1^* (4 + 2\tau_2^{-1} \tau_3 + 2\tau_1^{-1} \tau_3 + 3\tau_1^{-1} \tau_2) - \delta_2^* \tau_2^{-1} \tau_1 (3 + \tau_2^{-1} \tau_3) + \right.$$

$$+ 2\delta_3^* \tau_3^{-1} \tau_1 - \dot{\theta}_{i0}^* \tau_1 (6 + 6\tau_1^{-1} \tau_2 + 4\tau_1^{-1} \tau_3 + 3\tau_2^{-1} \tau_3) -$$

$$\left. - \dot{\theta}_{if}^* \tau_1 - \ddot{\theta}_{i0}^* \tau_1 \tau_3 \left[\frac{5}{3} + 2\tau_3^{-1} \tau_1 + \tau_1 \tau_2^{-1} + \frac{5}{2} \tau_2 \tau_3^{-1} \right] + \ddot{\theta}_{if}^* \tau_1 \tau_3 \right\} =$$

$$= C_{13}(t), \quad (4.8.35)$$

$$C_{14} = \left[\delta_1^* - \dot{\theta}_{i0}^* \tau_1 - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i0}^* \tau_1^2 - C_{13}(t) \right], \quad (4.8.36)$$

$$C_{21} = \dot{\theta}_{i1}^* \tau_2, \quad C_{22} = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2^2, \quad C_{23} = \delta_2^* - \dot{\theta}_{i1}^* \tau_2 - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2^2, \quad (4.8.37)$$

$$C_{31} = \dot{\theta}_{i2}^* \tau_2, \quad C_{22} = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i2}^* \tau_2^2, \quad (4.8.38)$$

$$C_{33} = -8\delta_3^* + 5\dot{\theta}_{if}^* \tau_3 - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{if}^* \tau_3^2 + 3\ddot{\theta}_{i2}^* \tau_3, \quad (4.8.39)$$

$$\delta_1^* = \theta_{i1}^* - \theta_{i0}^*, \quad \delta_2^* = \theta_{i2}^* - \theta_{i1}^*, \quad \delta_3^* = \theta_{if}^* - \theta_{i2}^*. \quad (4.8.40)$$

Таким образом, полные решения для трех участков траектории имеют вид

$$\theta_{i1} = \rho_{i1}(\tau) = \theta_{i0}^* + (\dot{\theta}_{i0}^* \tau_1) \tau + \left(\frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i0}^* \tau_1^2 \right) \tau^2 + C_{13} \tau^3 +$$

$$+ \left(\delta_1 - \dot{\theta}_{i0}^* \tau_1 - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i0}^* \tau_1^2 - C_{13} \right) \tau^4, \quad (4.8.41)$$

$$\dot{\theta}_{i1}^* = \dot{\rho}_{i1}(1) \tau_1^{-1} = 4\tau_1^{-1} - 3\dot{\theta}_{i0}^* - \ddot{\theta}_{i0}^* \tau_1 - \tau_1^{-1} C_{13}, \quad (4.8.42)$$

$$\ddot{\theta}_{i1}^* = \ddot{\rho}_{i1}(1) \tau_1^{-2} = 12\tau_1^{-2} \delta_1 - 12\tau_1^{-1} \dot{\theta}_{i0}^* - 5\ddot{\theta}_{i0}^* - 6\tau_1^{-2} C_{13} \quad (4.8.43)$$

— для первого участка,

$$\theta_{i2} = \rho_{i2}(\tau) = \theta_{i1}^* + (\dot{\theta}_{i1}^* \tau_2) \tau + \left(\frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2^2 \right) \tau^2 + \left(\delta_2 - \dot{\theta}_{i1}^* \tau_2 - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2^2 \right) \tau^3,$$

$$(4.8.44)$$

$$\dot{\theta}_{i2}^* = \dot{\rho}_{i2}(1) \tau_2^{-1} = 3\tau_2^{-1} \delta_2 - 2\dot{\theta}_{i1}^* - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2, \quad (4.8.45)$$

$$\ddot{\theta}_{i2}^* = \ddot{\rho}_{i2}(1) \tau_2^{-2} = 6\tau_2^{-2} \delta_2 - 6\tau_2^{-1} \dot{\theta}_{i1}^* - 2\ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2 \quad (4.8.46)$$

— для второго участка и

$$\theta_{if} = \rho_{if}(\tau) = \theta_{i2}^* + (\dot{\theta}_{i2}^* \tau_3) \tau + \frac{1}{2} (\ddot{\theta}_{i2}^* \tau_3^2) \tau^2 +$$

$$+ \left(5\dot{\theta}_{if}^* \tau_3 - 8\delta_3 - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{if}^* \tau_3^2 + 3\ddot{\theta}_{i2}^* \tau_3 \right) \tau^3 +$$

$$+ \left(9\delta_3 - 4\dot{\theta}_{i2}^* \tau_3 - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i2}^* \tau_3^2 - 5\dot{\theta}_{if}^* \tau_3 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{if}^* \tau_3^2 \right) \tau^4 \quad (4.8.47)$$

— для третьего участка.

4.8.2. ТРАЕКТОРИЯ ТИПА 3—5—3

Используя ту же процедуру, что и при выводе соотношений (4.8.41) — (4.8.47), легко показать, что для трех участков траектории можно получить следующие выражения, описывающие движение сочленений:

$$\theta_{i1} = \rho_{i1}(\tau) = \theta_{i0}^* + (\dot{\theta}_{i0}^* \tau_1) \tau + \frac{1}{2} (\ddot{\theta}_{i0}^* \tau_1^2) \tau^2 + \left(\delta_1 - \dot{\theta}_{i0}^* \tau_1 - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i0}^* \tau_1^2 \right) \tau^3, \quad (4.8.48)$$

$$\dot{\theta}_{i1}^* = \dot{\rho}_{i1}(1) \tau_1^{-1} = 3\delta_1 \tau_1^{-1} - 2\dot{\theta}_{i0}^* - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i0}^* \tau_1, \quad (4.8.49)$$

$$\ddot{\theta}_{i1}^* = \ddot{\rho}_{i1}(1) \tau_1^{-2} = 6\delta_1 \tau_1^{-2} - 6\tau_1^{-1} \dot{\theta}_{i0}^* - 2\ddot{\theta}_{i0}^* \quad (4.8.50)$$

— для первого участка,

$$\begin{aligned} \theta_{i2} = \rho_{i2}(\tau) = & \theta_{i1}^* + (\dot{\theta}_{i1}^* \tau_2) \tau + \frac{1}{2} (\ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2^2) \tau^2 + \\ & + \left(10\delta_2 - 6\dot{\theta}_{i1}^* \tau_2 - 4\ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2 - \frac{3}{2} \dot{\theta}_{i1}^* \tau_2^2 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2^3 \right) \tau^3 + \\ & + \left(8\dot{\theta}_{i1}^* \tau_2 - 15\delta_2 + 7\ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2 + \frac{3}{2} \dot{\theta}_{i1}^* \tau_2^2 - \ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2^3 \right) \tau^4 + \\ & + \left(-\frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2^2 + 6\delta_2 - 3\dot{\theta}_{i1}^* \tau_2 - 3\ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2 - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i1}^* \tau_2^3 \right) \tau^5, \quad (4.8.51) \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_{i2}^* = \dot{\rho}_{i2}(1) \tau_2^{-1} = 3\tau_3^{-1} \delta_3 - 2\dot{\theta}_{i1}^* + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{i1}^* \tau_3, \quad (4.8.52)$$

$$\ddot{\theta}_{i2}^* = \ddot{\rho}_{i2}(1) \tau_2^{-2} = -6\tau_3^{-2} \delta_3 + 6\tau_3^{-1} \dot{\theta}_{i1}^* - 2\ddot{\theta}_{i1}^* \quad (4.8.53)$$

— для второго участка и

$$\begin{aligned} \theta_{if} = \rho_{3i}(\tau) = & \dot{\theta}_{i2}^* + \left(3\delta_3 - 2\dot{\theta}_{if}^* \tau_3 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{if}^* \tau_3^2 \right) \tau + \\ & + \left(3\dot{\theta}_{if}^* \tau_3 - 3\delta_3 - \ddot{\theta}_{if}^* \tau_3^2 \right) \tau^2 + \left(\delta_3 - \dot{\theta}_{if}^* \tau_3 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{if}^* \tau_3^3 \right) \tau^3 \quad (4.8.54) \end{aligned}$$

— для третьего участка, где

$$\delta_1 = \theta_{i1}^* - \theta_{i0}^*, \quad \delta_2 = \theta_{i2}^* - \theta_{i1}^*, \quad \delta_3 = \theta_{if}^* - \theta_{i2}^*. \quad (4.8.55)$$

4.9. ДОПУСТИМЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ

На траектории типа 4—3—4 и 3—5—3, которые были представлены в предыдущих двух разделах в виде полиномов ρ_{i1} , ρ_{i2} и ρ_{3i} , в действительности налагаются геометрические или какие-либо другие ограничения, например недопустимость прохождения через любые недостижимые точки в пространстве обоб-

щенных координат. Если робот, перемещающийся по траектории, сталкивается с препятствием, он может остановиться, начать потреблять значительный ток, который может сжечь плавкие предохранители, транзисторы и другие электронные компоненты. Длительное пребывание в заторможенном состоянии может закончиться серьезным повреждением в двигателях, их приводных электрических цепях и устройстве управления. Нет необходимости говорить о том, что это также может серьезно повредить или деформировать звенья робота.

Рассмотрим траекторию типа 4—3—4 и проверим ее на недопустимые точки. Все, что надо сделать, — это найти экстремум для каждого полинома и удостовериться, что этот экстремум не выходит за допустимую рабочую область. Итак, нужно проверить значения $\rho_{im}(B_1)$, $\rho_{im}(B_2)$ и $\rho_{im}(B_k)$, где B_k , $k = 1, 2, \dots, n$, — это n действительных корней производной ρ_{im} по времени τ . Так как для траектории типа 4—3—4 наивысшая степень полинома — это четвертая степень, то отсюда следует, что имеется максимально три локальных экстремума. Здесь мы имеем дело с уравнением вида

$$\tau^3 + a_1 \tau^2 + a_2 \tau + a_3 = 0, \quad (4.9.1)$$

для которого надо найти корни. Если экстремум полинома ρ_{i1} или ρ_{i3} лежит вне границ допустимой области, простейшим решением будет сместить конечную точку подъема и начальную точку спуска, пока соответствующий участок целиком не будет лежать внутри рабочего пространства. Участком, доставляющим наибольшие трудности и приводящим к выходу за границы рабочего пространства, является участок ρ_{i2} . В этом случае мы должны разбить промежуточный участок траектории на два или более участков, введя дополнительные допустимые точки. Например, вычислив $\rho_{i1} - \rho_{i2} - \rho_{i3}$, мы вычислим затем траекторию $\rho_{i2}'' - \rho_{i2}'' - \rho_{i3}$, используя условия на конце участка ρ_{i1} .

Приложение А: Процедура обращения матриц

Рассмотрим уравнение (4.8.32), представленное в виде

$$MC = \delta. \quad (A1)$$

Чтобы получить единственное решение системы (A1), решим уравнение (4.8.32) или (A1) при помощи процедуры обращения матрицы

$$C = M^{-1} \delta, \quad (A2)$$

где M^{-1} — матрица, обратная матрице коэффициентов размера 9×9 . Пусть матрицы A, B, C, D, E, F и G определены следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3\tau_1^{-1} & 4\tau_1^{-1} & -\tau_2^{-1} \\ 6\tau_1^{-2} & 12\tau_1^{-2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2\tau_2^{-1} & 3\tau_2^{-2} & -\tau_3^{-1} \\ 2\tau_2^{-2} & 6\tau_2^{-2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (A3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \tau_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A4)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\tau_2^{-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\tau_3^{-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A5)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (A6)$$

Заметим, что матрица коэффициентов M имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} A & E & 0 \\ D & B & F \\ 0 & G & C \end{bmatrix}. \quad (A7)$$

Матрица, обратная приведенной, после длинных вычислений (приложение Б) получается в виде

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^* & B^* & C^* \\ D^* & E^* & F^* \\ G^* & H^* & I^* \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad (A8)$$

$$A^* = [A^{-1} + A^{-1}EH^{-1}DA^{-1} + A^{-1}EH^{-1}FI^{-1}GH^{-1}DA^{-1}], \quad (A9)$$

$$B^* = -[A^{-1}EH^{-1} + A^{-1}EH^{-1}FI^{-1}GH^{-1}], \quad (A10)$$

$$C^* = A^{-1}EH^{-1}FI^{-1}, \quad F^* = -H^{-1}FI^{-1}, \quad I^* = I^{-1}, \quad (A11)$$

$$D^* = -[H^{-1}DA^{-1} + H^{-1}FI^{-1}GH^{-1}DA^{-1}], \quad G^* = [I^{-1}GH^{-1}DA^{-1}], \quad (A12)$$

$$E^* = [H^{-1} + H^{-1}FI^{-1}GH^{-1}], \quad H^* = [I^{-1}GH^{-1}], \quad (A13)$$

$$H = [-DA^{-1}E + B], \quad I = [-GH^{-1}F + C]. \quad (A14)$$

После вычислений и прямой подстановки заданных матриц и матриц, обратных им, может быть получено явное выражение для матрицы M^{-1} , как показано ниже. Пусть

$$a = \frac{3\tau_1 + 9\tau_2 - \tau_1\tau_2 - 6\tau_2^2}{2(\tau_1 + 2\tau_2)}, \quad (A15)$$

$$b = \frac{\tau_3(\tau_1 + 6\tau_2 - 3)}{\tau_2(\tau_1 + 2\tau_2)}, \quad (A16)$$

$$e = \frac{\tau_2^2}{\tau_3(\tau_1 + 2\tau_2)(2a + \tau_3)}, \quad (A17)$$

$$l = \frac{\tau_1}{\tau_1 + 2\tau_2} + \tau_1 eb, \quad (A18)$$

$$n = \frac{1 + eb(\tau_1 + 2\tau_2)}{\tau_1 + 2\tau_2}, \quad (A19)$$

$$h = n\tau_2 - e\tau_3, \quad (A20)$$

$$m = \frac{\tau_2}{\tau_1 + 2\tau_2} + eb(\tau_1 + 3\tau_2), \quad (A21)$$

$$k = \frac{\tau_3(b\tau_2 - \tau_3)}{2a + \tau_3}, \quad (A22)$$

$$f = m\tau_2 - \tau_3 e(\tau_1 + 3\tau_2), \quad (A23)$$

$$z = l - \left(\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}\right) e. \quad (A24)$$

Тогда матрица M^{-1} задается, как показано на стр. 236.

Теперь можно найти значения коэффициентов полиномов для каждого из участков траектории. Для любого заданного набора временных интервалов τ_1, τ_2, τ_3 и любого заданного набора данных $\theta_{i0}^*, \theta_{i1}^*, \theta_{i2}^*, \theta_{i3}^*, \ddot{\theta}_{i0}^*, \ddot{\theta}_{i3}^*$ — можно найти полное множество траекторий и связанных с ними коэффициентов (с помощью уравнения (A2) и простой программы для ЭВМ (см. приложение В). В следующем разделе представлены таблицы, относящиеся к различным представляющим интерес наборам данных.

ЧИСЛОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для ясности будут представлены только числовые значения, связанные с роботом с шестью степенями подвижности и определенным участком траектории. Через $P(i, m)$ обозначен полином, соответствующий m -му участку траектории и i -му сочленению. Например, $P(1, 1)$, приведенный в табл. A2, означает,

$M^{-1} =$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l} 2(1+Z) \\ -(1+2Z) \\ 2\tau_2\tau_1^{-1} \times \\ \times (1-Z) \\ -6\tau_1^{-1}\tau_2h \\ 2\tau_1^{-1}f \\ -2\tau_1^{-1}k \\ 6\tau_1^{-1} \\ -6\tau_1^{-1}k \\ 2\tau_1^{-1}k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} -\tau_1Z \\ \tau_1Z \\ -\tau_2 \times \\ \times (1-Z) \\ 3\tau_2h \\ -f \\ k \\ -3k \\ 3k \\ -k \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} \frac{1}{6}\tau_1^2 \times \\ \times (1-Z) \\ \frac{1}{6}\tau_1^2 \times \\ \times (1-Z) \\ \frac{1}{6}\tau_2\tau_1 \times \\ \times (1-Z) \\ -\frac{1}{2}\tau_1\tau_2h \\ \frac{1}{6}\tau_1f \\ -\frac{1}{6}\tau_1k \\ \frac{1}{2}\tau_1k \\ -\frac{1}{2}\tau_1k \\ \frac{1}{6}\tau_1k \end{array} \right] \\
 & \left[\begin{array}{l} -\tau_1\tau_2^{-1}l \\ \tau_1\tau_2^{-1}l \\ l \\ 3\tau_2n \\ -m \\ b\tau_3 \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ -3\tau_3b \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ 3\tau_3b \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ -\tau_3b \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} \tau_1^2\tau_2^{-1}\tau_3e \\ -\tau_1^2\tau_2^{-1}\tau_3e \\ -\tau_1\tau_3e \\ -3\tau_2\tau_3e \\ e\tau_3(\tau_1+3\tau_2) \\ -\tau_3^2 \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ 3\tau_3^2 \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ -3\tau_3^2 \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ \tau_3^2 \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \end{array} \right] \\
 & \left[\begin{array}{l} \frac{1}{6}\tau_1^2\tau_2^{-1}\tau_3^2e \\ -\frac{1}{6}\tau_1^2\tau_2^{-1}\tau_3^2e \\ -\frac{1}{6}\tau_1\tau_3^2e \\ -\frac{1}{2}\tau_2\tau_3^2e \\ \frac{1}{6}e\tau_3^2 \times \\ \times (\tau_1+3\tau_2) \\ \frac{1}{3}a\tau_3^2 \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ -a\tau_3^2 \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ a\tau_3^2 \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ -\frac{a\tau_3^2}{3(2a+\tau_3)} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} 2\tau_1^2\tau_2^{-1}e \\ -2\tau_1^2\tau_2^{-1}e \\ -2\tau_1e \\ -6\tau_2e \\ 2e(\tau_1+3\tau_2) \\ 4a(2a+\tau_3)^{-1} \\ 6\tau_3(2a+\tau_3)^{-1} \\ -4(a+2\tau_3) \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ \frac{2a+3\tau_3}{2a+\tau_3} \\ -\left(\frac{2a+2\tau_3}{2a+\tau_3}\right) \end{array} \right] \\
 & \left[\begin{array}{l} -\tau_1^2\tau_2^{-1}e \\ \tau_1^2\tau_2^{-1}e \\ \tau_1e \\ 3\tau_2e \\ -e(\tau_1+3\tau_2) \\ -2a \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ -3\tau_3 \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ \left(\frac{4a+5\tau_3}{2a+\tau_3}\right) \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ -\left(\frac{4a+3\tau_3}{2a+\tau_3}\right) \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} \frac{1}{6}\tau_1^2\tau_2^{-1}e \\ -\frac{1}{6}\tau_1^2\tau_2^{-1}e \\ -\frac{1}{6}\tau_1e \\ -\frac{1}{2}\tau_2e \\ \frac{1}{6}e(\tau_1+3\tau_2) \\ \frac{1}{3}a \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ \frac{1}{2}\tau_3 \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ -(a+\tau_3) \times \\ \times (2a+\tau_3)^{-1} \\ \frac{4a+3\tau_3}{6(2a+\tau_3)} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(A25)

Рабочее пространство робота и планирование траекторий

Таблица А1. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 20$, $\tau_2 = 30$, $\tau_3 = 10$.

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{10}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{11}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{12}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{13}^*	60	70	80	90	10	20
θ_{20}^*	2	4	1	2	3	3
θ_{23}^*	3	4	2	1	3	2
θ_{30}^*	3	2	1	5	4	3
θ_{33}^*	3	2	1	1	2	3

Таблица А2. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений для данных табл. А1

Траектория сочленения 1

$P(1,1) = 20, 40, 600, -1100.356, 470.3559$
 $P(1,2) = 30, -269.4661, 272.4025, -12.93622$
 $P(1,3) = 20, 91.34838, 25.95483, -195.9548, 118.6516$

Траектория сочленения 2

$P(2,1) = 30, 80, 400, -914.3353, 408.3355$
 $P(2,2) = 4, -344.4969, 240.7639, 129.7331$
 $P(2,3) = 30, 50.00136, 69.9959, -169.9959, 89.99862$

Траектория сочленения 3

$P(3,1) = 10, 20, 200, -408.7557, 180.7557$
 $P(3,2) = 2, -124.8666, 131.1006, 41.76594$
 $P(3,3) = 50, 47.17043, 28.48872, -98.48872, 52.82957$

Траектория сочленения 4

$P(4,1) = 40, 40, 1000, -1861.636, 794.636$
 $P(4,2) = 13, -549.5463, 411.5421, 154.0041$
 $P(4,3) = 29, 96.3128, 97.06154, -249.0615, 116.6872$

Траектория сочленения 5

$P(5,1) = 3, 60, 800, -1398.862, 575.8625$
 $P(5,2) = 40, -349.7065, 131.8214, 187.8851$
 $P(5,3) = 10, -22.42505, 77.2751, -117.2751, 62.42505$

Траектория сочленения 6

$P(6,1) = 20, 60, 600, -1145.544, 485.5442$
 $P(6,2) = 20, -351.6838, 172.423, 179.2608$
 $P(6,3) = 20, 3.696091, 78.91169, -188.9117, 106.3039$

Таблица А3. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 20$, $\tau_2 = 30$, $\tau_3 = 10$ с увеличенным конечным ускорением

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{i0}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{i1}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{i2}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{i3}^*	60	70	80	90	10	20
$\dot{\theta}_{i0}^*$	2	4	1	2	3	3
$\dot{\theta}_{i3}^*$	3	4	2	1	3	2
$\ddot{\theta}_{i0}^*$	3	2	1	5	4	3
$\ddot{\theta}_{i3}^*$	30	20	10	10	20	30

Таблица А4. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. А3

Траектория сочленения 1

$$P(1,1) = 20, 40, 600, -1211.239, 581.2389$$

$$P(1,2) = 30, -103.1416, 1020.862, -927.7206$$

$$P(1,3) = 20, 615.2703, -195.8111, -1324.189, 944.7296$$

Траектория сочленения 2

$$P(2,1) = 30, 80, 400, -988.2572, 482.2574$$

$$P(2,2) = 4, -233.614, 739.7371, -480.1232$$

$$P(2,3) = 30, 399.2827, -77.84804, -922.152, 640.7173$$

Траектория сочленения 3

$$P(3,1) = 10, 20, 200, -445.7166, 217.7167$$

$$P(3,2) = 2, -69.4251, 380.5872, -263.1622$$

$$P(3,3) = 50, 221.8111, -45.43325, -474.5668, 328.1889$$

Траектория сочленения 4

$$P(4,1) = 40, 40, 1000, -1898.597, 831.597$$

$$P(4,2) = 13, -494.1049, 661.0287, -150.924$$

$$P(4,3) = 29, 270.9534, 23.13958, -625.1395, 392.0465$$

Траектория сочленения 5

$$P(5,1) = 3, 60, 800, -1472.784, 649.7844$$

$$P(5,2) = 40, -238.8236, 630.7946, -421.9712$$

$$P(5,3) = 10, 326.8563, -70.56883, -869.4311, 613.1437$$

Траектория сочленения 6

$$P(6,1) = 20, 60, 600, -1256.427, 596.4271$$

$$P(6,2) = 20, -185.3594, 920.8829, -735.5236$$

$$P(6,3) = 20, 527.6181, -142.8542, -1317.146, 932.3819$$

Таблица А5. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 20$, $\tau_2 = 30$, $\tau_3 = 30$ с увеличенным начальным ускорением

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{i0}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{i1}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{i2}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{i3}^*	60	70	80	90	10	20
$\dot{\theta}_{i0}^*$	2	4	1	2	3	3
$\dot{\theta}_{i3}^*$	3	4	2	1	3	2
$\ddot{\theta}_{i0}^*$	30	20	10	50	40	30
$\ddot{\theta}_{i3}^*$	3	2	1	1	2	3

Таблица А6. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. А5

Траектория сочленения 1

$$P(1,1) = 20, 40, 6000, -10226.02, 4196.024$$

$$P(1,2) = 30, -2780.966, 1120.657, 1650.309$$

$$P(1,3) = 20, -124.8734, 674.6199, -844.6199, 334.8734$$

Траектория сочленения 2

$$P(2,1) = 30, 80, 4000, -6998.113, 2892.114$$

$$P(2,2) = 4, -2018.83, 806.267, 1238.563$$

$$P(2,3) = 30, -94.14647, 502.4393, -602.4392, 234.1465$$

Траектория сочленения 3

$$P(3,1) = 10, 20, 2000, -3450.645, 1422.645$$

$$P(3,2) = 2, -962.0332, 413.8522, 596.181$$

$$P(3,3) = 50, -24.9035, 244.7104, -314.7104, 124.9035$$

Траектория сочленения 4

$$P(4,1) = 40, 40, 10000, -17071.08, 7004.082$$

$$P(4,2) = 13, -4735.378, 1825.3, 2926.077$$

$$P(4,3) = 29, -264.0568, 1178.17, -1330.17, 477.0568$$

Траектория сочленения 5

$$P(5,1) = 3, 60, 8000, -13566.42, 5543.42$$

$$P(5,2) = 40, -3698.372, 1262.828, 2405.545$$

$$P(5,3) = 10, -310.7207, 942.162, -982.162, 350.7207$$

Траектория сочленения 6

$$P(6,1) = 20, 60, 6000, -10271.21, 4211.212$$

$$P(6,2) = 20, -2863.183, 1020.678, 1842.506$$

$$P(6,3) = 20, -212.5257, 727.5769, -837.5769, 322.5257$$

Таблица А7. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 20$, $\tau_2 = 30$, $\tau_3 = 10$ с увеличенной конечной скоростью

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{10}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{11}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{12}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{13}^*	60	70	80	90	10	20
$\dot{\theta}_{10}^*$	2	4	1	2	3	3
$\dot{\theta}_{13}^*$	30	40	20	10	30	20
$\ddot{\theta}_{10}^*$	3	2	1	5	4	3
$\ddot{\theta}_{13}^*$	3	2	1	1	2	3

Таблица А8. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. А7

Траектория сочленения 1

$$P(1,1) = 20, 40, 600, -1033.826, 403.8262$$

$$P(1,2) = 30, -369.2608, -176.6735, 535.9343$$

$$P(1,3) = 20, -223.0048, 159.0144, 210.9856, -106.9952$$

Траектория сочленения 2

$$P(2,1) = 30, 80, 400, -825.629, 319.6291$$

$$P(2,2) = 4, -477.5565, -358.0041, 861.5605$$

$$P(2,3) = 30, -369.1362, 247.4087, 372.5914, -210.8638$$

Траектория сочленения 3

$$P(3,1) = 10, 20, 200, -364.4025, 136.4025$$

$$P(3,2) = 2, -191.3964, -168.2834, 407.6797$$

$$P(3,3) = 50, -162.3984, 117.1951, 172.8049, -97.60163$$

Траектория сочленения 4

$$P(4,1) = 40, 40, 1000, -1839.459, 772.4594$$

$$P(4,2) = 13, -582.8112, 261.8501, 336.961$$

$$P(4,3) = 29, -8.471598, 141.4147, -113.4147, 41.4716$$

Траектория сочленения 5

$$P(5,1) = 3, 60, 800, -1332.333, 509.3327$$

$$P(5,2) = 40, -449.5012, -317.2546, 736.7557$$

$$P(5,3) = 10, -336.7782, 210.3347, 289.6654, -163.2218$$

Траектория сочленения 6

$$P(6,1) = 20, 60, 600, -1101.191, 441.191$$

$$P(6,2) = 20, -418.2136, -126.961, 545.1746$$

$$P(6,3) = 20, -205.8727, 167.6181, 82.38196, -44.1273$$

Таблица А9. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 20$, $\tau_2 = 30$, $\tau_3 = 10$ с увеличенной начальной скоростью

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{10}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{11}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{12}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{13}^*	60	70	80	90	10	20
$\dot{\theta}_{10}^*$	20	40	10	20	30	30
$\dot{\theta}_{13}^*$	3	4	2	1	3	2
$\ddot{\theta}_{10}^*$	3	2	1	5	4	3
$\ddot{\theta}_{13}^*$	3	2	1	1	2	3

Таблица А10. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. 9

Траектория сочленения 1

$$P(1,1) = 20, 400, 600, -1845.489, 855.4893$$

$$P(1,2) = 30, -771.766, 442.0534, 319.7126$$

$$P(1,3) = 20, 48.10403, 155.6879, -325.6879, 161.896$$

Траектория сочленения 2

$$P(2,1) = 30, 800, 400, -2404.602, 1178.602$$

$$P(2,2) = 4, -1349.096, 580.0658, 795.0309$$

$$P(2,3) = 30, -36.48736, 329.462, -429.4621, 176.4874$$

Траектория сочленения 3

$$P(3,1) = 10, 200, 200, -781.3223, 373.3224$$

$$P(3,2) = 2, -376.0165, 215.9261, 208.0904$$

$$P(3,3) = 50, 25.54825, 93.35523, -163.3552, 74.45175$$

Траектория сочленения 4

$$P(4,1) = 40, 400, 1000, -2606.769, 1179.769$$

$$P(4,2) = 13, -1051.846, 581.193, 486.6532$$

$$P(4,3) = 29, 53.06843, 226.7946, -378.7946, 159.9316$$

Траектория сочленения 5

$$P(5,1) = 3, 600, 800, -2516.563, 1153.563$$

$$P(5,2) = 40, -1103.156, 386.2978, 686.8585$$

$$P(5,3) = 10, -87.29159, 271.8747, -311.8747, 127.2916$$

Траектория сочленения 6

$$P(6,1) = 20, 600, 600, -2263.246, 1063.244$$

$$P(6,2) = 20, -1105.134, 426.8994, 678.2341$$

$$P(6,3) = 20, -61.17042, 273.5113, -383.5113, 171.1704$$

Таблица А11. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 200$, $\tau_2 = 300$, $\tau_3 = 100$ с увеличенным временем

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{10}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{11}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{12}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{13}^*	60	70	80	90	10	20
$\dot{\theta}_{10}^*$	2	4	1	2	3	3
$\dot{\theta}_{13}^*$	3	4	2	1	3	2
$\ddot{\theta}_{10}^*$	3	2	1	5	4	3
$\ddot{\theta}_{13}^*$	3	2	1	1	2	3

Таблица А12. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. А11

Траектория сочленения 1

$$P(1,1) = 20, 400, 60000, -103444.4, 43054.43$$

$$P(1,2) = 30, -26573.35, 17984.88, 8578.484$$

$$P(1,3) = 20, 3160.729, 4857.812, -19337.81, 11359.27$$

Траектория сочленения 2

$$P(2,1) = 30, 800, 40000, -70099.48, 29273.48$$

$$P(2,2) = 4, -18606.78, 12020.47, 6612.318$$

$$P(2,3) = 30, 1833.43, 3539.711, -12819.71, 7486.571$$

Траектория сочленения 3

$$P(3,1) = 10, 200, 20000, -34627.43, 14419.44$$

$$P(3,2) = 2, -9006.838, 5927.22, 3127.619$$

$$P(3,3) = 50, 959.6271, 1701.119, -6361.119, 3730.373$$

Траектория сочленения 4

$$P(4,1) = 40, 400, 100000, -170488.8, 70061.82$$

$$P(4,2) = 13, -46228.77, 20034.98, 26209.81$$

$$P(4,3) = 29, -1965.569, 10962.71, -15884.71, 6948.57$$

Траектория сочленения 5

$$P(5,1) = 3, 600, 80000, -137238.1, 56675.13$$

$$P(5,2) = 40, -36620.8, 18756.86, 17833.96$$

$$P(5,3) = 100, 357.085, 8028.743, -17428.74, 9042.916$$

Траектория сочленения 6

$$P(6,1) = 200, 600, 60000, -103885.6, 43285.58$$

$$P(6,2) = 20, -26871.63, 18127.67, 8743.953$$

$$P(6,3) = 20, 3157.054, 4928.836, -19528.84, 11442.95$$

Таблица А13. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 200$, $\tau_2 = 300$, $\tau_3 = 100$ с увеличенным конечным ускорением

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{10}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{11}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{12}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{13}^*	60	70	80	90	10	20
$\dot{\theta}_{10}^*$	2	4	1	2	3	3
$\dot{\theta}_{13}^*$	3	4	2	1	3	2
$\ddot{\theta}_{10}^*$	3	2	1	5	4	3
$\ddot{\theta}_{13}^*$	30	20	10	10	20	30

Таблица А14. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. А13

Траектория сочленения 1

$$P(1,1) = 20, 400, 60000, -113895.4, 53505.37$$

$$P(1,2) = 30, -10896.95, 88528.71, -77641.77$$

$$P(1,3) = 20, 55128.03, -16044.07, -133435.9, 94391.98$$

Траектория сочленения 2

$$P(2,1) = 30, 800, 40000, -77066.78, 36240.77$$

$$P(2,2) = 4, -8155.843, 59049.7, -50867.85$$

$$P(2,3) = 30, 36478.29, -10394.88, -88885.12, 62841.71$$

Траектория сочленения 3

$$P(3,1) = 10, 200, 20000, -38111.08, 17903.09$$

$$P(3,2) = 2, -3781.369, 29441.83, -25612.46$$

$$P(3,3) = 50, 18282.06, -5266.174, -44393.83, 31407.94$$

Траектория сочленения 4

$$P(4,1) = 40, 400, 100000, -173972.4, 73545.47$$

$$P(4,2) = 13, -41003.3, 43549.59, -2530.274$$

$$P(4,3) = 29, 15356.86, 3995.416, -53917.42, 34626.14$$

Траектория сочленения 5

$$P(5,1) = 3, 600, 80000, -144205.4, 63642.42$$

$$P(5,2) = 40, -26169.86, 65786.08, -39646.2$$

$$P(5,3) = 10, 35001.95, -5905.843, -93494.16, 64398.06$$

Траектория сочленения 6

$$P(6,1) = 20, 600, 60000, -114336.5, 53736.52$$

$$P(6,2) = 20, -11195.22, 88671.51, -77476.3$$

$$P(6,3) = 20, 55124.35, -15973.04, -133627, 94475.65$$

Таблица А15. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 200$, $\tau_2 = 300$, $\tau_3 = 100$ с увеличенным начальным ускорением

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{10}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{11}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{12}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{13}^*	60	70	80	90	10	20
θ_{20}^*	2	4	1	2	3	3
θ_{23}^*	3	4	2	1	3	2
θ_{30}^*	30	20	10	50	40	30
θ_{33}^*	3	2	1	1	2	3

Таблица А16. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. А15

Траектория сочленения 1

$$P(1,1) = 20, 400, 600000, -1017170, 416780$$

$$P(1,2) = 30, -275985, 110632.4, 165342.6$$

$$P(1,3) = 20, -17688.89, 67406.68, -81886.69, 32208.99$$

Траектория сочленения 2

$$P(2,1) = 30, 800, 400000, -679249.9, 278423.9$$

$$P(2,2) = 4, -184881.1, 73785.51, 111121.8$$

$$P(2,3) = 30, -12066.32, 45238.95, -54518.95, 21386.33$$

Траектория сочленения 3

$$P(3,1) = 10, 200, 200000, -339202.6, 138994.6$$

$$P(3,2) = 2, -92144, 36809.73, 55382.32$$

$$P(3,3) = 50, -5990.247, 22550.73, -27210.73, 10680.25$$

Траектория сочленения 4

$$P(4,1) = 40, 400, 1000000, -1693365, 692937.8$$

$$P(4,2) = 13, -461914.8, 174447.5, 287483.3$$

$$P(4,3) = 29, -36714.95, 115210.9, -120132.9, 41697.94$$

Траектория сочленения 5

$$P(5,1) = 3, 600, 800000, -1355539, 554975.9$$

$$P(5,2) = 40, -369196.5, 142286.9, 226852.8$$

$$P(5,3) = 10, -27442.42, 91427.19, -100827.2, 36842.42$$

Траектория сочленения 6

$$P(6,1) = 20, 600, 600000, -1017611, 417011.2$$

$$P(6,2) = 20, -276283.1, 110775.2, 165508.1$$

$$P(6,3) = 20, -17692.57, 67477.71, -82077.71, 32292.57$$

Таблица А17. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 200$, $\tau_2 = 300$, $\tau_3 = 100$ с увеличенной конечной скоростью

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{10}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{11}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{12}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{13}^*	60	70	80	90	10	20
θ_{20}^*	2	4	1	2	3	3
θ_{23}^*	30	40	20	10	30	20
θ_{30}^*	3	2	1	5	4	3
θ_{33}^*	3	2	1	1	2	3

Таблица А18. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. А17

Траектория сочленения 1

$$P(1,1) = 20, 400, 600000, -102817.4, 42427.37$$

$$P(1,2) = 30, -27513.94, 13752.24, 13751.7$$

$$P(1,3) = 20, 42.69092, 6111.925, -15191.93, 9077.309$$

Траектория сочленения 2

$$P(2,1) = 30, 800, 400000, -69263.41, 28437.41$$

$$P(2,2) = 4, -19860.9, 6376.966, 13509.94$$

$$P(2,3) = 30, -2323.954, 5211.861, -7291.861, 4443.954$$

Траектория сочленения 3

$$P(3,1) = 10, 200, 200000, -34209.4, 14001.4$$

$$P(3,2) = 2, -9633.894, 3105.466, 6576.428$$

$$P(3,3) = 50, -1119.065, 2537.194, -3597.194, 2209.065$$

Траектория сочленения 4

$$P(4,1) = 40, 400, 1000000, -170279.8, 69852.81$$

$$P(4,2) = 13, -46542.3, 18624.1, 27934.22$$

$$P(4,3) = 29, -3004.915, 11380.75, -14502.75, 6187.916$$

Траектория сочленения 5

$$P(5,1) = 3, 600, 800000, -136611.1, 56048.07$$

$$P(5,2) = 40, -37561.38, 14524.23, 23007.18$$

$$P(5,3) = 10, -2760.953, 9282.856, -13282.86, 6760.953$$

Траектория сочленения 6

$$P(6,1) = 20, 600, 600000, -103467.6, 42867.55$$

$$P(6,2) = 20, -27498.68, 15305.92, 12192.76$$

$$P(6,3) = 20, 1078.363, 5764.911, -5764.91, 9921.638$$

Таблица A19. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 200$, $\tau_2 = 300$, $\tau_3 = 100$ с увеличенной начальной скоростью

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{10}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{11}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{12}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{13}^*	60	70	80	90	10	20
θ_{20}^*	20	40	10	20	30	30
θ_{21}^*	3	4	2	1	3	2
θ_{22}^*	3	2	1	5	4	3
θ_{23}^*	3	2	1	1	2	3

Таблица A20. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. A19

Траектория сочленения 1	
$P(1,1) = 20, 4000, 60000, -110918.9, 46928.94$	
$P(1,2) = 30, -31561.59, 19837.83, 11713.77$	
$P(1,3) = 20, 2743.736, 6108.791, -20588.79, 11776.26$	
Траектория сочленения 2	
$P(2,1) = 30, 8000, 40000, -85048.49, 37022.5$	
$P(2,2) = 4, -28583.24, 15726.37, 12882.87$	
$P(2,3) = 30, 999.4451, 6041.666, -15321.67, 8320.556$	
Траектория сочленения 3	
$P(3,1) = 10, 2000, 20000, -38364.69, 16356.7$	
$P(3,2) = 2, -11500.96, 6853.695, 4695.26$	
$P(3,3) = 50, 751.1305, 2326.609, -6986.609, 3938.87$	
Траектория сочленения 4	
$P(4,1) = 40, 4000, 100000, -177963.3, 73936.34$	
$P(4,2) = 13, -51217.02, 21887.93, 29345.09$	
$P(4,3) = 29, -2382.564, 12213.68, -17135.68, 7365.564$	
Траектория сочленения 5	
$P(5,1) = 3, 6000, 80000, -148449.9, 62486.9$	
$P(5,2) = 40, -44103.14, 21536.29, 22536.88$	
$P(5,3) = 10, -268.4033, 9905.212, -19305.21, 9668.404$	
Траектория сочленения 6	
$P(6,1) = 20, 6000, 60000, -115097.4, 49097.35$	
$P(6,2) = 20, -34353.97, 20907.1, 13446.88$	
$P(6,3) = 20, 2531.566, 6805.301, -21405.3, 12068.43$	

Таблица A21. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 1$ с уменьшенным временем

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{10}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{11}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{12}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{13}^*	60	70	80	90	10	20
θ_{20}^*	2	4	1	2	3	3
θ_{21}^*	3	4	2	1	3	2
θ_{22}^*	3	2	1	5	4	3
θ_{23}^*	3	2	1	1	2	3

Таблица A22. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. A21

Траектория сочленения 1	
$P(1,1) = 20, 4, 6, -51.22807, 51.22807$	
$P(1,2) = 30, 100.8421, 359.2895, -470.1316$	
$P(1,3) = 20, 116.4298, -116.7895, 41.28948, -9298246$	
Траектория сочленения 2	
$P(2,1) = 30, 8, 4, -109.1228, 71.1228$	
$P(2,2) = 4, -40.31579, 232.5789, -166.2632$	
$P(2,3) = 30, 86.19298, -29.57894, -43.42106, 26.80702$	
Траектория сочленения 3	
$P(3,1) = 10, 2, 2, -44.63158, 32.63158$	
$P(3,2) = 2, 3.947374, 143.7632, -99.71054$	
$P(3,3) = 50, 63.92105, -17.26316, -39.23684, 22.57895$	
Траектория сочленения 4	
$P(4,1) = 40, 4, 10, -144.2456, 103.2456$	
$P(4,2) = 13, 6.368439, 442.6579, -433.0263$	
$P(4,3) = 29, 152.886, -95.15788, -25.34211, 28.61404$	
Траектория сочленения 5	
$P(5,1) = 3, 6, 8, 35.05264, -12.05263$	
$P(5,2) = 40, 118.421, 91.89473, -240.3158$	
$P(5,3) = 10, 20.63158, -69.89474, 74.89474, -25.63158$	
Траектория сочленения 6	
$P(6,1) = 20, 6, 6, -20.21053, 8.210526$	
$P(6,2) = 20, -14.68421, -12.07895, 26.76316$	
$P(6,3) = 20, -4.026316, 7.578947, -5.078947, 1.526316$	

Таблица A23. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 1$ с увеличенным конечным ускорением

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{i0}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{i1}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{i2}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{i3}^*	60	70	80	90	10	20
$\dot{\theta}_{i0}^*$	2	4	1	2	3	3
$\dot{\theta}_{i3}^*$	3	4	2	1	3	2
$\ddot{\theta}_{i0}^*$	3	2	1	5	4	3
$\ddot{\theta}_{i3}^*$	30	20	10	10	20	30

Таблица A24. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий сочленений, для данных табл. A23

Траектория сочленения 1

$$P(1,1) = 20, 4, 6, -54.07018, 54.07018$$

$$P(1,2) = 30, 105.1053, 378.4737, -493.579$$

$$P(1,3) = 20, 122.8246, -122.4737, 33.47368, 6.175439$$

Траектория сочленения 2

$$P(2,1) = 30, 8, 4, -111.0175, 73.01754$$

$$P(2,2) = 4, -37.47368, 245.3684, -181.8948$$

$$P(2,3) = 30, 90.45613, -33.36841, -48.63159, 31.54386$$

Траектория сочленения 3

$$P(3,1) = 10, 2, 2, -45.57895, 33.57895$$

$$P(3,2) = 2, 5.368427, 150.1579, -107.5263$$

$$P(3,3) = 50, 66.05263, -19.1579, 41.8421, 24.94737$$

Траектория сочленения 4

$$P(4,1) = 40, 4, 10, -145.193, 104.193$$

$$P(4,2) = 13, 7.789492, 449.0526, -440.8421$$

$$P(4,3) = 29, 155.0175, -97.05262, -27.94737, 30.98246$$

Траектория сочленения 5

$$P(5,1) = 3, 6, 8, 33.1579, -10.1579$$

$$P(5,2) = 40, 121.2632, 104.6842, -255.9474$$

$$P(5,3) = 10, 24.89474, -73.68421, 69.68421, -20.89474$$

Траектория сочленения 6

$$P(6,1) = 20, 6, 6, -23.05263, 11.05263$$

$$P(6,2) = 20, -10.42105, 7.105265, 3.31579$$

$$P(6,3) = 20, 2.368421, 1.894736, -12.89474, 8.631579$$

Таблица A25. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 1$ с увеличенным начальным ускорением

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{i0}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{i1}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{i2}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{i3}^*	60	70	80	90	10	20
$\dot{\theta}_{i0}^*$	2	4	1	2	3	3
$\dot{\theta}_{i3}^*$	3	4	2	1	3	2
$\ddot{\theta}_{i0}^*$	30	20	10	50	40	30
$\ddot{\theta}_{i3}^*$	3	2	1	1	2	3

Таблица A26. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий, для данных табл. A25

Траектория сочленения 1

$$P(1,1) = 20, 4, 60, -139.3333, 85.33334$$

$$P(1,2) = 30, 71.00001, 346.5, -427.5$$

$$P(1,3) = 20, 112.1667, -104, 28.5, 3.333332$$

Траектория сочленения 2

$$P(2,1) = 30, 8, 40, -167.8596, 93.85965$$

$$P(2,2) = 4, -60.21052, 224.0526, -137.8421$$

$$P(2,3) = 30, 83.35088, -21.05263, -51.94737, 29.64912$$

Траектория сочленения 3

$$P(3,1) = 10, 2, 20, -74, 44$$

$$P(3,2) = 2, -5.999995, 139.5, -85.50001$$

$$P(3,3) = 50, 62.49999, -13, -43.5, 24$$

Траектория сочленения 4

$$P(4,1) = 40, 4, 100, -291.0877, 160.0877$$

$$P(4,2) = 13, -43.3684, 421.3421, -361.9737$$

$$P(4,3) = 29, 145.7807, -73.8421, -46.6579, 35.7193$$

Траектория сочленения 5

$$P(5,1) = 3, 6, 80, -82.42105, 33.42105$$

$$P(5,2) = 40, 78.63158, 74.8421, -183.4737$$

$$P(5,3) = 10, 14.94737, -52.8421, 57.8421, -19.94737$$

Траектория сочленения 6

$$P(6,1) = 20, 6, 60, -108.3158, 42.31578$$

$$P(6,2) = 20, -44.52632, -24.86841, 69.39475$$

$$P(6,3) = 20, -8.289474, 20.36842, -17.86842, 5.789474$$

Таблица A27. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 1$ с увеличенной конечной скоростью

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{i0}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{i1}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{i2}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{i3}^*	60	70	80	90	10	20
θ_{i0}^*	2	4	1	2	3	3
θ_{i3}^*	30	40	20	10	30	20
θ_{i0}^*	3	2	1	5	4	3
θ_{i3}^*	3	2	1	1	2	3

Таблица A28. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий, для данных табл. A27

Траектории сочленения 1	
$P(1,1) = 20, 4, 6, -34.17544, 34.17544$	
$P(1,2) = 30, 75.26316, 244.1842, -329.4474$	
$P(1,3) = 20, 78.0614, -82.68421, 61.18421, -16.5614$	
Траектория сочленения 2	
$P(2,1) = 30, 8, 4, -86.38596, 48.38597$	
$P(2,2) = 4, -74.42105, 79.10526, 21.31579$	
$P(2,3) = 30, 35.03509, 15.89474, -16.89474, 5.964911$	
Траектория сочленения 3	
$P(3,1) = 10, 2, 2, -33.26316, 21.26316$	
$P(3,2) = 2, -13.10526, 67.02632, -5.921064$	
$P(3,3) = 50, 38.34211, 5.473682, -25.97368, 12.15789$	
Траектория сочленения 4	
$P(4,1) = 40, 4, 10, -138.5614, 97.56141$	
$P(4,2) = 13, -2.157875, 404.2895, -386.1316$	
$P(4,3) = 29, 140.0965, -83.78947, 13.71053, 23.40351$	
Траектория сочленения 5	
$P(5,1) = 3, 6, 8, 52.10527, -29.10526$	
$P(5,2) = 40, 92.84209, -23.21053, -99.63158$	
$P(5,3) = 10, -17.73684, -35.78948, 94.78948, -41.26316$	
Траектория сочленения 6	
$P(6,1) = 20, 6, 6, -8.842108, -3.157896$	
$P(6,2) = 20, -31.73684, -88.81578, 120.5526$	
$P(6,3) = 20, -29.60526, 30.31579, 8.184212, -8.894736$	

Таблица A29. Временные интервалы и данные для движения при $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 1$ с увеличенной начальной скоростью

Данные	Сочленение					
	1	2	3	4	5	6
θ_{i0}^*	20	30	10	40	3	20
θ_{i1}^*	30	4	2	13	40	20
θ_{i2}^*	20	30	50	29	10	20
θ_{i3}^*	60	70	80	90	10	20
θ_{i0}^*	20	40	10	20	30	30
θ_{i3}^*	3	4	2	1	3	2
θ_{i0}^*	3	2	1	5	4	3
θ_{i3}^*	3	2	1	1	2	3

Таблица A30. Коэффициенты полиномов, описывающих участки траекторий, для данных табл. A29

Траектория сочленения 1	
$P(1,1) = 20, 40, 6, -119.4386, 83.4386$	
$P(1,2) = 30, 41.1579, 333.7105, -384.8684$	
$P(1,3) = 20, 107.9035, -91.21052, 15.71052, 7.59649$	
Траектория сочленения 2	
$P(2,1) = 30, 80, 4, -245.5439, 135.5439$	
$P(2,2) = 4, -159.6842, 181.4211, 4.263162$	
$P(2,3) = 30, 69.14035, 21.57895, -94.57895, 43.85965$	
Траектория сочленения 3	
$P(3,1) = 10, 20, 2, -78.73684, 48.73684$	
$P(3,2) = 2, -25.89474, 130.9737, -57.07895$	
$P(3,3) = 50, 59.65789, -4.473686, -52.02632, 26.84211$	
Траектория сочленения 4	
$P(4,1) = 40, 40, 10, -212.4562, 135.4562$	
$P(4,2) = 13, -53.31578, 417.079, -347.7631$	
$P(4,3) = 29, 144.3596, -69.57893, -50.92106, 37.14036$	
Траектория сочленения 5	
$P(5,1) = 3, 60, 8, -67.26316, 36.26315$	
$P(5,2) = 40, 28.89474, 53.52632, -112.4211$	
$P(5,3) = 10, 7.842105, -31.52632, 36.52632, -12.84211$	
Траектория сочленения 6	
$P(6,1) = 20, 60, 6, -122.5263, 56.52632$	
$P(6,2) = 20, -104.2105, -50.44736, 154.6579$	
$P(6,3) = 20, -16.81579, 45.94736, -43.44736, 14.31579$	

что полином, относящийся к первому участку траектории первого сочленения, представляется в виде

$$\theta_{11}(t) = 20 + 40\tau + 600\tau^2 - 1100.356\tau^3 + 470.36\tau^4,$$

в случае если интервалы времени τ_1 , τ_2 и τ_3 , а также начальные, промежуточные и конечные данные θ_{i0}^* , θ_{i1}^* , θ_{i2}^* , θ_{i3}^* , $\dot{\theta}_{i0}^*$ и $\dot{\theta}_{i3}^*$ таковы, как дано в табл. А1. Дополнительные числовые данные см. в табл. А3—А30.

Приложение Б: Техника обращения матриц

Пусть

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} A & E & 0 \\ D & B & F \\ 0 & g & C \end{bmatrix}. \quad (\text{Б1})$$

Уже известно, что A^{-1} существует. Тогда

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ D & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}E & 0 \\ 0 & [-DA^{-1}E + B] & F \\ 0 & g & C \end{bmatrix}. \quad (\text{Б2})$$

Если существует $[-DA^{-1}E + B]^{-1}$, то существует

$$\begin{bmatrix} I & A^{-1}E \\ 0 & [-DA^{-1}E + B] \end{bmatrix}^{-1}. \quad (\text{Б3})$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} I & A^{-1}E & 0 \\ 0 & [-DA^{-1}E + B] & F \\ 0 & g & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}E & 0 \\ 0 & [-DA^{-1}E + B] & 0 \\ 0 & g & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & -A^{-1}E[]^{-1}F \\ 0 & I & []^{-1}F \\ 0 & 0 & [[]^{-1}F + C] \end{bmatrix}. \quad (\text{Б4})$$

где

$$[] = [-DA^{-1}E + B]. \quad (\text{Б5})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} A & E & 0 \\ D & B & F \\ 0 & g & C \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ D & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}E & 0 \\ 0 & [] & 0 \\ 0 & g & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & -A^{-1}E[]^{-1}F \\ 0 & I & []^{-1}F \\ 0 & 0 & [[] \end{bmatrix}, \quad (\text{Б6}) \end{aligned}$$

где $[[] = [-g[]^{-1}F + C]$. Тогда, если существует $[[]^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{-1} &= \begin{bmatrix} A & E & 0 \\ D & B & F \\ 0 & g & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & -A^{-1}E[]^{-1}F \\ 0 & I & []^{-1}F \\ 0 & 0 & [[] \end{bmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{bmatrix} I & A^{-1}E & 0 \\ 0 & [] & 0 \\ 0 & g & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ D & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{-1}. \quad (\text{Б7}) \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ D & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 & 0 \\ -DA^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (\text{Б8})$$

$$\begin{bmatrix} I & A^{-1}E & 0 \\ 0 & [] & 0 \\ 0 & g & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}E[]^{-1} & 0 \\ 0 & []^{-1} & 0 \\ 0 & -g[]^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1}, \quad (\text{Б9})$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & -A^{-1}E[]^{-1}F \\ 0 & I & []^{-1}F \\ 0 & 0 & [[] \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & A^{-1}E[]^{-1}F[[]^{-1} \\ 0 & I & -[]^{-1}F[[]^{-1} \\ 0 & 0 & [[]^{-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{Б10})$$

TO

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} A & E & 0 \\ D & B & 0 \\ 0 & g & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & A^{-1}E[I]^{-1} \\ 0 & I & -[I]^{-1}F[[I]^{-1}] \\ 0 & 0 & [[I]^{-1}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & A^{-1}E[I]^{-1} & 0 \\ 0 & [I]^{-1} & 0 \\ 0 & -g[I]^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 & 0 \\ -DA^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 & A^{-1}E[I]^{-1} \\ 0 & I & -[I]^{-1}F[[I]^{-1}] \\ 0 & 0 & [[I]^{-1}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^{-1} & +A^{-1}E[[I]^{-1}DA^{-1}] & -A^{-1}E[[I]^{-1}] \\ -[I]^{-1}F[[I]^{-1}] & [I]^{-1} & +[I]^{-1}F[[I]^{-1}] \\ g[[I]^{-1}DA^{-1}] & -[I]^{-1}F[[I]^{-1}] & -[[I]^{-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1}E[[I]^{-1}] \\ [I]^{-1} \\ -g[[I]^{-1}] \end{bmatrix}. \quad (B11)$$

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} [A^{-1}+A^{-1}E[[I]^{-1}DA^{-1}]+A^{-1}E[[I]^{-1}F[[I]^{-1}]]^{-1}g[[I]^{-1}DA^{-1}] & -[A^{-1}E[[I]^{-1}]+A^{-1}E[[I]^{-1}F[[I]^{-1}]]^{-1}g[[I]^{-1}] & A^{-1}E[[I]^{-1}F[[I]^{-1}]]^{-1} \\ -[[I]^{-1}DA^{-1}+[I]^{-1}F[[I]^{-1}g[[I]^{-1}DA^{-1}]] & [[I]^{-1}+[I]^{-1}F[[I]^{-1}]]^{-1}g[[I]^{-1}] & -[[I]^{-1}F[[I]^{-1}]]^{-1} \\ [[I]^{-1}g[[I]^{-1}DA^{-1}]] & -[[I]^{-1}g[[I]^{-1}]] & [[I]^{-1}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^{-1}E[[I]^{-1}] \\ [I]^{-1} \\ -g[[I]^{-1}] \end{bmatrix}. \quad (B12)$$

Приложение В: Программа для ЭВМ

```

10 LPRINT "4-3-4 ROBOTIC TRAJECTORY, SIX JOINTS"
20 DIM AE(6,8)
30 DATA 200,300,100
40 READ T1, T2, T3
50 LPRINT "DATA"
60 LPRINT "T1="T1 " T2="T2 " T3="T3
70 LPRINT "AI0, AI1,AI2,AI3,AVI0,AVI3,AAI0,AAI3"
80 DATA 20,30,20,60,2,3,3,3
90 DATA 30,4,30,70,4,4,2,2
100 DATA 10,2,50,80,1,2,1,1
110 DATA 40,13,29,90,2,1,5,1
120 DATA 3,40,10,10,3,3,4,2
130 DATA 20,20,20,20,3,2,3,3
140 FOR I=1 TO 6
150 FOR J=1 TO 8
160 READ AE(I,J)
170 NEXT J
180 LPRINT AE(I,1),AE(I,2),AE(I,3),AE(I,4),AE(I,5),AE(I,6),
AE(I,7),AE(I,8)
190 NEXT I
200 LPRINT "-----"
210 A=(3*T1+9*T2-T1*T2-6*(T2↑2))/(2*(T1+2*T2))
220 B=(T3*(T1+6*T2-3))/(T2*(T1+2*T2))
230 E=(T2↑2)/(T3*(T1+2*T2)*(2*A+T3))
240 AN=(1+E*B*(T1+2*T2))/(T1+2*T2)
250 AM=((T2)/(T1+2*T2))+(E*B*(T1+3*T2))
260 AF=(AM*T2)-(T3*E*(T1+3*T2))
270 H=(AN*T2)-(T3*E)
280 AK=(T3*(B*T2-T3))/(2*A+T3)
290 AL=(T1/(T1+2*T2))+(T1*E*B)
300 AZ=AL-((T1*T3*E)/T2)
310 DIM G(9,9)
320 G(1,1)=2*(1+AZ)
330 G(1,2)=- (T1*AZ)
340 G(1,3)=- ((T1↑2)*(1-AZ))/6
350 G(1,4)=- (T1*AL)/(T2)
360 G(1,5)=(E*T3*(T1↑2))/(T2)
370 G(1,6)=(E*(T1↑2)*(T3↑2))/(6*T2)
380 G(1,7)+(2*E*(T1↑2))/(T2)
390 G(1,8)=- (E*(T1↑2))/(T2)
400 G(1,9)=(E*(T1↑2))/(6*T2)
410 G(2,1)=- (1+2*AZ)
420 G(2,2)=(T1*AZ)
430 G(2,3)=- ((T1↑2)*(1-AZ))/6
440 G(2,4)=(T1*AL)/(T2)
450 G(2,5)=- (E*T3*(T1↑2))/(T2)
460 G(2,6)=- (E*(T1↑2)*(T3↑2))/(6*T2)
470 G(2,7)=- (2*E*(T1↑2))/(T2)

```

```

480 G(2,8)=(E*(T1↑2))/(T2)
490 G(2,9)=- (E*(T1↑2))/(6*T2)
500 G(3,1)=(2*T2*(1-AZ))/(T1)
510 G(3,2)=- (1-AZ)*T2
520 G(3,3)=(T1*T2*(1-AZ))/6
530 G(3,4)=AL
540 G(3,5)=- (T1*T3*E)
550 G(3,6)=- (T1*E*(T3 2))/6
560 G(3,7)=- (2*E*T1)
570 G(3,8)=(T1*E)
580 G(3,9)=- (T1*E)/(6)
590 G(4,1)=- (6*H*T2)/(T1)
600 G(4,2)=(3*T2*H)
610 G(4,3)=- (T1*T2*H)/2
620 G(4,4)=(3*T2*AN)
630 G(4,5)=- (3*T2*T3*E)
640 G(4,6)=- (T2*E*(T3↑2))/2
650 G(4,7)=- (6*T2*E)
660 G(4,8)=(3*T2*E)
670 G(4,9)=- (E*T2)/2
680 G(5,1)=(2*AF)/(T1)
690 G(5,2)=-AF
700 G(5,3)=(T1*AF)/6
710 G(5,4)=-AM
720 G(5,5)=E*T3*(T1+3*T2)
730 G(5,6)=(E*(T3↑2)*(T1+3*T2))/6
740 G(5,7)=2*E*(T1+3*T2)
750 G(5,8)=-E*(T1+3*T2)
760 G(5,9)=(E*(T1+3*T2))/6
770 G(6,1)=- (2*AK)/(T1)
780 G(6,2)=AK
790 G(6,3)=- (T1*AK)/6
800 G(6,4)=(B*T3)/(2*A+T3)
810 G(6,5)=- (T3↑2)/(2*A+T3)
820 G(6,6)=(A*(T3↑2))/(3*(2*A+T3))
830 G(6,7)=(4*A)/(2*A+T3)
840 G(6,8)=- (2*A)/(2*A+T3)
850 G(6,9)=(A)/(3*(2*A+T3))
860 G(7,1)=(6*AK)/(T1)
870 G(7,2)=- (3*AK)
880 G(7,3)=(T1*AK)/2
890 G(7,4)=- (3*T3*B)/(2*A+T3)
900 G(7,5)=(3*(T3↑2))/(2*A+T3)
910 G(7,6)=- (A*(T3↑2))/(2*A+T3)
920 G(7,7)=(6*T3)/(2*A+T3)
930 G(7,8)=- (3*T3)/(2*A+T3)
940 G(7,9)=(T3)/(2*(2*A+T3))
950 G(8,1)=- (6*AK)/(T1)
960 G(8,2)=3*AK
970 G(8,3)=- (T1*AK)/2

980 G(8,4)=(3*T3*B)/(2*A+T3)
990 G(8,5)=- (3*(T3↑2))/(2*A+T3)
1000 G(8,6)=(A*(T3↑2))/(2*A+T3)
1010 G(8,7)=- (4*A+8*T3)/(2*A+T3)
1020 G(8,8)=(4*A+5*T3)/(2*A+T3)
1030 G(8,9)=- (A+T3)/(2*A+T3)
1040 G(9,1)=(2*AK)/(T1)
1050 G(9,2)=-AK
1060 G(9,3)=(T1*AK)/6
1070 G(9,4)=- (T3*B)/(2*A+T3)
1080 G(9,5)=(T3↑2)/(2*A+T3)
1090 G(9,6)=- (A*(T3↑2))/(6*A+3*T3)
1100 G(9,7)=(2*A+3*T3)/(2*A+T3)
1110 G(9,8)=- (2*A+2*T3)/(2*A+T3)
1120 G(9,9)=(4*A+3*T3)/(12*A+6*T3)
1130 DIM D(9,6)
1140 DIM AS(6,1)
1150 DIM AA(6,1)
1160 FOR M=1 TO 6
1170 D(1,M)=AE(M,2)-AE(M,1)-(AE(M,5)*T1)-((AE(M,7)*(T1↑2))/2)
1180 D(2,M)=-AE(M,5)-(AE(M,7)*T1)
1190 D(3,M)=-AE(M,7)
1200 D(4,M)=AE(M,3)-AE(M,2)
1210 D(5,M)=0!
1220 D(6,M)=0!
1230 D(7,M)=AE(M,4)-AE(M,3)
1240 D(8,M)=T3*AE(M,6)
1250 D(9,M)=(T3↑2)*AE(M,8)
1260 AS(M,1)=AE(M,5)*T1
1270 AA(M,1)=(T1↑2)*AE(M,7)/2
1280 NEXT M
1290 FOR I=1 TO 9
1300 FOR J=1 TO 6
1310 C(I,J)=0
1320 FOR K=1 TO 9
1330 C(I,J)=C(I,J)+G(I,K)*D(K,J)
1340 NEXT K
1350 NEXT J
1360 NEXT I
1370 LPRINT "COEFFICIENTS"
1380 FOR N=1 TO 6
1390 LPRINT "TRAJECTORY OF JOINT ("N")"
1400 LPRINT "P("N"1)=" AE(N,1)", "AS(N,1)", "AA(N,1)", "C(1,N)",
" C(2,N)
1410 LPRINT "P("N"2)=" AE(N,2)", "C(3,N)", "C(4,N)", "C(5,N)
1420 LPRINT "P("N"3)=" AE(N,3)", "C(6,N)", "C(7,N)", "C(8,N)",
" C(9,N)
1430 NEXT N
1440 END

```


ЛИТЕРАТУРА

1. Gupta K. C., Roth B., Design Considerations for Manipulator Workspace, *Trans. ASME J. Mech. Design*, 104(4), 705—711, 1982.
2. Kumar A., Waldron K. J., The Workspace of a Mechanical Manipulator, *Trans. ASME J. Mech. Design*, 103(3), 665—672, 1981.
3. Lee T. W., Yang D. C. H., On the Evaluation of Manipulator Workspace, *Trans. ASME J. Mechanism, Transm. Autom. Design*, 105(5), 70—77, 1983.
4. Lin C. S., Chang P. R., Lun J. Y. S., Formulation and Optimisation of Cubic Polynomial Joint Trajectories for Industrial Robots, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-28(12), 1066—1071, 1983.
5. Sugimoto K., Duffy J., Determination of Extreme Distances of a Robot Hand — Part I. A General Theory, *Trans. ASME J. Mech. Design*, 103(3), 631—636, 1981.
6. Tsai Y. C., Soni A. H., An Algorithm for the Workspace of a General n — R Robot, *Trans. ASME J. Mechanisms, Transm. Autom. Design*, 105(1), 55—57, 1983.
7. Vukobratovic M., Kircanski M., A Method for Optimal Synthesis of Manipulator Robot Trajectories, *Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 104, 188—193, 1982.
8. Yang D. C. H., Lee T. W., On the Workspace of Mechanical Manipulator, *Trans. ASME J. Mechanisms, Transm. Autom. Design*, 105(5), 63—69, 1983.
9. Yang D. C. H., Lee T. W., Heuristic Combinatorial Optimization in the Design of Manipulator Workspace, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, SMC-14(4), 571—580, 1984.

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Пусть P — конечная точка схвата, удаленная от оси n -го сочленения на расстояния d и a ; покажите, что уравнение для $(n-1)$ -го тора в $(n-1)$ -й системе координат имеет вид

$$\{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 + (z_{n-1} - d_{i-1})^2 - [a_{n-1}^2 + a^2 + (d + d_n)^2]\}^2 = 4a_{n-1}^2 \left[a^2 - \left(\frac{(z_{n-1} - d_{n-1}) - (d + d_n) \cos \alpha_{n-1}}{\sin \alpha_{n-1}} \right)^2 \right]$$

2. Для вариантов, представленных на рис. 3.4.2, определите рабочие пространства манипуляторов $W_i(H)$, а также $W_i(P)$ при $i = 1, 2$ и 3 (см. также рис. 4.2.3).

3. Найдите пределы достижимости для показанного на рис. 3.4.3 робота общего вида с тремя поворотными сочленениями.

4. Опишите полностью задачу установки вала в отверстие, не принимая во внимание податливость собираемых деталей. Примените общие однородные преобразования размера 4×4 для описания положения и ориентации схвата робота и собираемых деталей.

5. Рассмотрим робот с одной степенью подвижности с начальным положением при $\theta = 25^\circ$. Он должен пройти угловое расстояние $\theta = 100^\circ$ за 5 с. Найдите коэффициенты кубического полинома, описывающего это движение и переводящего руку

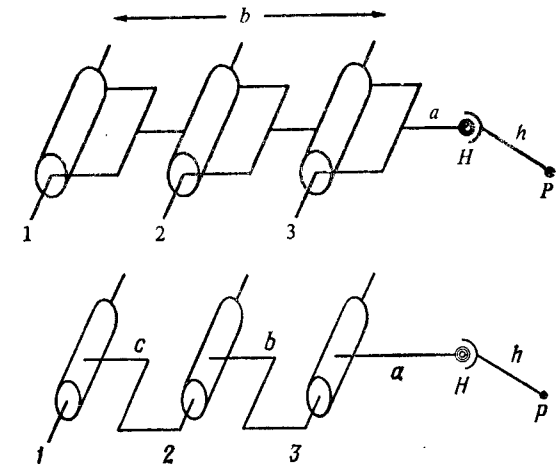


Рис. 34.2.

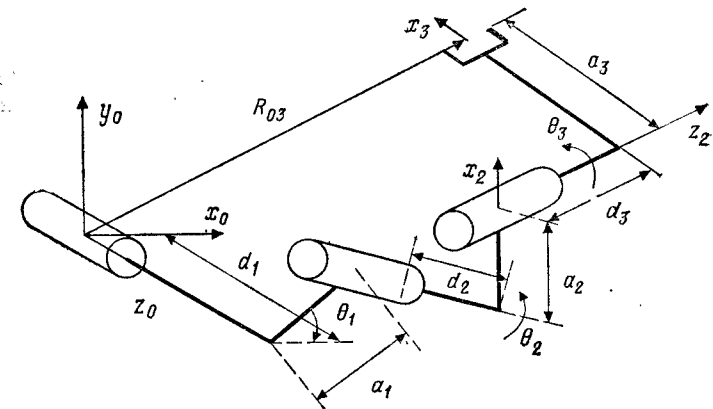


Рис. 34.3. Обобщенный 3R-манипулятор.

в состояние покоя в конечном положении. Постройте графики положения, скорости и ускорения сочленения как функций времени.

6. В соответствии с примером 4.7.1 и соотношениями (4.7.17) — (4.7.22) найдите значения восьми коэффициентов, если

$$\dot{\theta}_1(0) = 0 \text{ и } \dot{\theta}_2(t_f) = 0.$$

7. Запишите уравнения, получающиеся из матричного уравнения (4.8.32). После этого получите выражение для C_{13} или других коэффициентов в векторе C . Обратите внимание на то, что

$$C \equiv [C_{13} C_{14} C_{21} C_{22} C_{23} C_{31} C_{32} C_{33} C_{31}]^T.$$

Динамика манипуляционных роботов

5.1. ВВЕДЕНИЕ

До сих пор мы анализировали кинематику, кинематические уравнения, решения прямой и обратной задач кинематики относительно вектора обобщенных углов и некоторые смежные вопросы, относящиеся к дифференциальным преобразованиям для манипуляторов и планированию траекторий. Теперь рассмотрим основные уравнения, относящиеся к динамике манипуляционных роботов (МР). При этом будем использовать некоторые результаты, полученные при анализе вышеупомянутых вопросов. В сущности уравнения динамики нужны для динамического управления манипуляционными роботами. Цель динамического управления заключается в получении требуемого динамического отклика управляемого от ЭВМ манипулятора, чтобы этот отклик соответствовал некоторому заранее определенному множеству критериев. Эти критерии могут быть выражены через импульс и силы реакции и инерции, воздействующие на схват либо на объект. В общем случае проблема управления заключается в получении основных уравнений динамики робота в форме динамической модели физического манипулятора и в последующем определении законов управления, позволяющих достичь желаемого динамического отклика. В этой главе мы сосредоточим основное внимание на получении физической модели динамики робота, а в следующей главе рассмотрим теоретические основы управления, связанные с манипуляционным роботом.

Как отмечалось выше, манипуляционный робот, управляемый от ЭВМ, может моделироваться как разомкнутая кинематическая и динамическая цепь из нескольких твердых тел

(звеньев), связанных последовательно вращательными или призматическими сочленениями. Поскольку нам уже известно решение обратной задачи кинематики, мы найдем множество обобщенных углов θ_i , которые позволят придать схвату положение и ориентацию, задаваемые через T_i^0 относительно базовой системы координат. В статике и динамике роботов мы имеем дело с обобщенными силами f_i и моментами t_i , позволяющими достичь требуемого усилия f и момента t на схвате. Таким образом, мы имеем дело с обратной задачей динамики манипуляторов — задачей вычисления обобщенных моментов, требуемых для получения заданных обобщенных координат, скоростей и ускорений. Существует главным образом три подхода, позволяющих получить совокупность взаимосвязанных существенно нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику МР:

- 1) представление динамики методом связанных графов;
- 2) представление динамики методом Ньютона — Эйлера;
- 3) представление динамики методом Лагранжа — Эйлера.

В дополнение к этим методам представления динамики МР разработаны два рекурсивных подхода — рекурсивный метод Ньютона — Эйлера и рекурсивный метод Лагранжа. Эти альтернативные подходы позволяют существенно уменьшить количество вычислений. Эффективность этих методов основана на совокупности рекуррентных связей между скоростями, ускорениями и обобщенными силами. Число сложений и умножений в этих методах изменяется пропорционально числу сочленений (n) в отличие от предыдущих методов с зависимостями от более высоких степеней n .

Мы получим уравнения динамики для МР с помощью трех вышеуказанных подходов и коротко представим рекурсивные методы. Основные уравнения являются обыкновенными нелинейными взаимосвязанными дифференциальными уравнениями второго порядка. Каждое дифференциальное уравнение содержит большое число составляющих момента или силы, классифицируемых по четырем группам:

- 1) инерционные силы или моменты, появляющиеся из-за наличия массы звеньев;
- 2) силы или моменты реакции, вызванные ускорением других сочленений;
- 3) центробежные и кориолисовы силы и моменты между сочленениями;
- 4) гравитационные или нагрузочные силы и моменты в звеньях.

В следующем разделе мы обсудим представление МР, основанное на связанных графах.

5.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ МЕТОДОМ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

Чтобы сделать изложение полным, познакомимся с основными положениями представления методом связанных графов, разработанного Хэнком (Генри) Пейнтером в 1950 г. Этот метод широко используется при анализе и проектировании динамических систем. При этом системы определяются настолько широко, чтобы охватить механические, электрические, гидравлические и другие более простые системы, а также комбинации таких систем. Можно также рассматривать социальные, экономические и организационные аспекты систем.

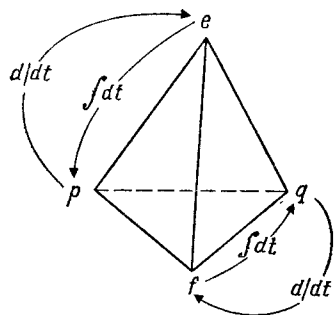


Рис. 5.2.1. Тетраэдр состояний в теории связанных графов.

Здесь мы намереваемся применить представление динамики методом связанных графов к сложным робототехническим системам (не обязательно с разомкнутыми кинематическими цепями), таким, как рука со многими пальцами или многорукий робот. Для одиночных же разомкнутых манипуляторов мы будем использовать другие методы.

По существу, представление связными графами предполагает наличие потока энергии и информации из одного звена системы в другое и, таким образом, оказывается весьма удобным для манипуляционных роботов. Введем четыре обобщенные переменные системы — усилие e , поток f , положение q и импульс p . Эти переменные связаны посредством так называемого *тетраэдра состояний*, показанного на рис. 5.2.1. Ребро $p-q$ называется мемристором, но его трудно определить через практические понятия. Ребро $e-q$ является элементом мощности, $e-f$ — элементом сопротивления, а $p-f$ — инерционным элементом. Эти элементы будут подробно рассмотрены ниже.

Связные графы применяются для того, чтобы связать вышеописанные элементы с другими элементами и далее описать рассматриваемую систему. В сущности связанные графы — это рисунок. Стрелки вида \rightarrow используются для обозначения потоков энергии и информации, а стрелки вида \rightarrow применяются для указания активных связей (управления). Каждая связь имеет соответствующие ей усилие и поток.

Чтобы понять представление связными графами, весьма важно разобраться в его элементах, которые мы сейчас и рассмотрим.

Одновходовые элементы сопротивления (рассеивающие энергию). Эти элементы в символьном виде представляются следующим образом:

$$\frac{e}{f} \rightarrow R,$$

где R — сопротивление. Уравнения обобщенного сопротивления имеют вид

$$e = \Phi_R(f), \quad (5.2.1)$$

$$f = \Phi_R^{-1}(e), \quad (5.2.2)$$

где Φ_R в общем случае является нелинейной функцией. Примерами линейных сопротивлений являются механический демпфер, круговой демпфер, такой, как в сочленениях роботов, гидравлическое сопротивление потока в трубе и электрическое сопротивление.

Одновходовые элементы мощности (накопители энергии). Эти элементы в символьном виде представляются следующим образом:

$$\frac{e}{f \pm \dot{q}} \rightarrow C,$$

где C — емкость. Уравнения имеют вид

$$e = \Phi_C^{-1}(q), \quad (5.2.3)$$

$$q = \Phi_C(e), \quad (5.2.4)$$

где Φ_C в общем случае является нелинейной функцией. Отметим, что $f = \dot{q}$. Некоторыми примерами линейных емкостей являются линейная пружина или линейная жесткость сочленений роботов, стержень торсиона (при бесконечно малой эластичности), бак с жидкостью, а также электрическая емкость.

Одновходовые инерционные элементы (накопители энергии). В символьном виде они представляются следующим образом:

$$\frac{e = \dot{p}}{f} \rightarrow I,$$

где I — инерционный элемент. Уравнения имеют вид

$$p = \Phi_I(f), \quad (5.2.5)$$

$$f = \Phi_I^{-1}(p), \quad (5.2.6)$$

где по-прежнему ϕ_i в общем случае является нелинейной функцией. Отметим, что $e = \dot{\rho}$. Примерами линейных систем могут служить движущаяся масса, вращающийся маховик, а также электрическая катушка.

В дополнение к одноходовым элементам имеются и многоходовые элементы, связанные с базовыми. К двухходовым элементам относятся преобразователи и гираторы.

Преобразователи. В символьном виде они представляются следующим образом:

$$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow \dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{F}} \leftarrow \frac{e_2}{f_2},$$

где m — коэффициент передачи и $\mathbf{T}\mathbf{F}$ — преобразователь. Уравнения элемента имеют вид

$$e_1 = m e_2, \quad (5.2.7)$$

$$f_2 = m f_1. \quad (5.2.8)$$

Заметим, что $e_1 f_1 = m e_2 f_1 = m e_2 m^{-1} f_2 = e_2 f_2$. Некоторыми примерами типичных преобразователей могут служить простой рычаг, пара шестерен, поршень (поршневой насос), электрический трансформатор и гидравлический домкрат.

Возможно также наличие модулированного преобразователя, представляемого в символьном виде как

$$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{F}} \leftarrow \frac{e_2}{f_2},$$

где m может изменяться во времени, но не обязательно является явной функцией времени.

Гираторы. В символьном виде они представляются следующим образом:

$$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow \dot{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{Y}} \leftarrow \frac{e_2}{f_2},$$

где r — коэффициент гирации и $\mathbf{G}\mathbf{Y}$ — гиратор. Уравнения имеют

$$e_1 = r f_2, \quad (5.2.9)$$

$$e_2 = r f_1. \quad (5.2.10)$$

Заметим, что $e_1 f_1 = r f_2 f_1 = r f_2 r^{-1} e_2 = f_2 e_2$. Некоторыми примерами типичных гираторов являются гироскопы, центробежные насосы, а также автотрансформаторы.

Гираторы тоже могут быть модулированными. Следует обратить внимание на следующие замечания.

1. Два последовательно соединенных гиратора образуют преобразователь.

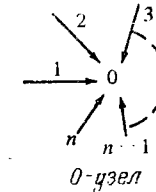
2. Два последовательно соединенных преобразователя образуют преобразователь.

3. Гиратор и I -элемент образуют C -элемент.

4. Гиратор и C -элемент образуют I -элемент.

Эти соотношения легко получаются из уравнений. В итоге можно разделить многоходовые узловые элементы на два класса: общие узлы усилий и общие узлы потока. В обоих случаях считается, что мощность сохраняется.

Общие узлы усилий. В символьном виде они представляются как 0-узлы:



Уравнения имеют следующий вид:

$$e_1 = e_2 = e_3 = \dots = e_n \text{ (общие усилия),} \quad (5.2.11)$$

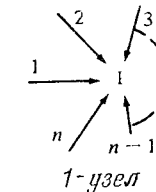
$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = 0 \text{ (закон Кирхгофа).} \quad (5.2.12)$$

Закон сохранения мощности (мощность = усилие \times поток) может быть представлен как

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + \dots + e_n f_n = 0. \quad (5.2.13)$$

Это предполагает, что входная мощность узла равна выходной мощности узла.

Общие узлы потока. В символьном виде они представляются как 1-узлы.



Уравнения имеют следующий вид:

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n, \quad (5.2.14)$$

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n = 0. \quad (5.2.15)$$

Мощность по-прежнему сохраняется:

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + \dots + e_n f_n = 0. \quad (5.2.16)$$

Еще одна концепция является ключевой к пониманию связанных графов. Это так называемая концепция причинности. Причинность определяется через то, что порождает поток в результате действия усилия. В символическом виде она изображается вертикальной линией у того конца стрелки, которая примыкает к элементу, порождающему поток:

$$A \begin{array}{c} e \\ \hline \longrightarrow \\ f \end{array} B \text{ или } A \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \hline e \\ f \end{array} B.$$

В обоих случаях считается, что B порождает поток, а A — приложенное усилие. Аналогично

$$A \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \hline e \\ f \end{array} B \text{ или } A \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \hline e \\ f \end{array} B$$

означает, что A порождает поток, а B — приложенное усилие. Многовходовая причинность определяется следующим образом:

$S_f \equiv$ источник потока и $S_e \equiv$ источник усилия.

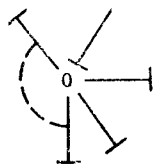
Преобразователи имеют собственные обозначения причинности:

$$S_f \begin{array}{c} e_1 \\ \hline \longrightarrow \\ f_1 \end{array} \dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{F}} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \hline e_2 \\ f_2 \end{array} \quad S_e \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \hline e_1 \\ f_1 \end{array} \mathbf{T}\mathbf{F} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \hline e_2 \\ f_2 \end{array}.$$

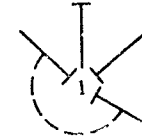
Причинность для гираторов задается следующим образом:

$$S_f \begin{array}{c} e_1 \\ \hline \longrightarrow \\ f_1 \end{array} \dot{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{Y}} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \hline e_2 \\ f_2 \end{array} \quad S_e \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \hline e_1 \\ f_1 \end{array} \mathbf{G}\mathbf{Y} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \hline e_2 \\ f_2 \end{array}.$$

0-узлы имеют следующее обозначение причинности: источник потока только для одной связи представляется как



1-узлы имеют следующее обозначение причинности: источник усилия для одной только связи представляется как



Одновходовые причинности лучше всего изображаются следующими блок-схемами:

R -элементы $S_f \begin{array}{c} e \\ \hline \longrightarrow \\ f \end{array} R = \begin{array}{c} f \\ \longrightarrow \\ \boxed{\varphi_R} \end{array}$

$S_e \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \hline e \\ f \end{array} R = \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \hline e \\ \boxed{\varphi_R^{-1}} \\ \longrightarrow \\ f \end{array}$

C -элементы $S_f \begin{array}{c} e \\ \hline \longrightarrow \\ f=q \end{array} C = \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \hline e \\ \boxed{\varphi_C^{-1}} \\ \longrightarrow \\ q \\ \int dt \\ \longrightarrow \\ f \end{array}$
(Интегральная причинность)

$S_e \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \hline e \\ f=q \end{array} C = \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \hline e \\ \boxed{\varphi_C} \\ \longrightarrow \\ q \\ d/dt \\ \longrightarrow \\ f \end{array}$
(Дифференциальная причинность)

I -элементы $S_f \begin{array}{c} p=e \\ \hline \longrightarrow \\ f \end{array} I = \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \hline e \\ d/dt \\ \longrightarrow \\ p \\ \boxed{\varphi_I} \\ \longrightarrow \\ f \end{array}$
(Дифференциальная причинность)

$S_e \begin{array}{c} p=e \\ \hline \longrightarrow \\ f \end{array} I = \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \hline e \\ \int dt \\ \longrightarrow \\ p \\ \boxed{\varphi_I^{-1}} \\ \longrightarrow \\ f \end{array}$
(Интегральная причинность)

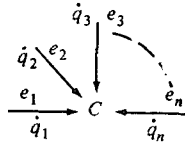
При любой возможности следует отдавать предпочтение интегральной причинности для C и I -элементов:



Следует заметить, что, хотя причинность важна для полного понимания системы, она не существенна для определения уравнений состояния.

Некоторые связные графы можно описать с помощью полей. Сначала мы описали одноходовые R -, C - и I -элементы и двухходовые TF - и GY -элементы; однако в некоторых случаях можно пользоваться многоходовыми полями. С помощью полей можно объединить много подобных элементов на связном графе в один элемент, уравнение которого является математическим объединением отдельных уравнений. Существуют C - и I -поля сохранения энергии, R -поля поглощения энергии, а также структуры типа узла сохранения мощности, состоящие из TF -, GY -, 0 - и I -элементов. Подробно описать понятие поля без примера весьма затруднительно, поэтому, для того чтобы дать некоторое представление, кратко опишем различные элементы¹⁾.

Сначала рассмотрим C -поле, представляемое в символическом виде как

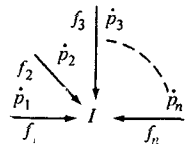


Число связей равно числу входов поля. Энергия E может быть выражена как

$$E = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n (e_i f_i) dt = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n e_i \dot{q}_i dt. \quad (5.2.17)$$

В качестве примера C -поля рассмотрим закрепленную балку, нагруженную рядом сил. Исследуя такую балку, нужно сформировать матрицу жесткости, отражающую прогибы под действием этих сил. В некотором смысле матрица является совокупностью базовых уравнений, описывающих поведение упругой балки. Хорошо известно, что при деформации балки происходит накопление потенциальной энергии, как у пружины. Таким образом, балку можно рассматривать как C -поле.

I -поле является другим полем, сохраняющим энергию. I -поля аналогичны C -полям с той лишь разницей, что вместо потоков надо рассматривать усилия. В символическом виде I -поля представляются как



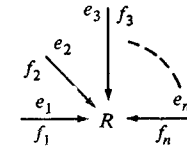
¹⁾ Полное описание содержится в книге D. Karnop, R. Rosenberg, System Dynamics — A Unified Approach, Wiley, New York, 1975.

а накапливаемая энергия — как

$$E = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n (f_i e_i) dt = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n f_i \dot{p}_i dt. \quad (5.2.18)$$

Примером I -поля может служить твердое тело, совершающее как поступательное, так и вращательное движение. В этом случае имеются два типа инерции: инерция поступательного движения и инерция движения вокруг центра тяжести тела. Следовательно, такое твердое тело может быть описано как I -поле.

Полем, рассеивающим энергию, является R -поле, которое представляется как



и уравнения этого поля имеют вид

$$e_i = \Phi_{Ri} (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad (5.2.19)$$

$$f_i = \Phi_{Ri}^{-1} (e_1, e_2, \dots, e_n), \quad (5.2.20)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$. В качестве примера R -поля рассмотрим вращающийся вал с несколькими опорами. Каждая опора создает связанное с ней сопротивление, а все они порождают R -поле.

Последнее понятие, чрезвычайно важное для нашего рассмотрения, касается многоходового представления в робототехнике. Многоходовое представление позволяет исследовать системы масс, твердых тел и силовых полей и получить множество дифференциальных уравнений, описывающих поведение таких систем.

В этом методе представления существует несколько обязательных шагов, ведущих к системам связных графов. Сначала нужно определить некоторые следующие основные векторы:

$q_k \equiv$ обобщенный вектор координат, определяющий конфигурацию системы в любой момент времени; (5.2.21)

$q_c \equiv$ множество положений, определяющих потенциальную энергию; (5.2.22)

$v_I \equiv q_I \equiv$ множество инерционных скоростей, определяющих общую кинетическую энергию. (5.2.23)

На следующем шаге нужно получить преобразования, связывающие q_c с q_k и q_I с q_k , и продифференцировать их по вре-

мени для того, чтобы получить преобразования, связывающие q_c с q_k и $q_l = v_l$ с q_k . Этим решается вопрос о модулированных преобразователях в связных графах. Следует отметить, что очень важно правильно определить q_l так, что $q_l = v_l$; иначе, q_k должно быть непосредственно связано с v_l . Наконец, построив столбцы из 1-узлов, q_k , q_c и v_l , можно изобразить связный граф с C и I -элементами с соответствующими им q_c и v_l узлами.

Именно эта методика будет использоваться при получении связного графа для описанной ниже механической руки. Этот

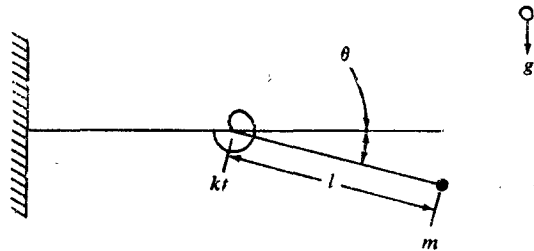


Рис. 5.2.2. Консольный маятниковый механизм с упругим сочленением — модель простой механической руки.

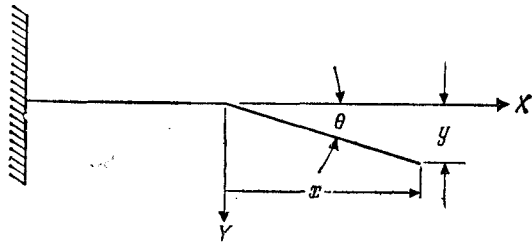


Рис. 5.2.3. Геометрия рисунка 5.2.2.

связный граф, однако, получается постепенно. Сначала рассмотрим задачу, иллюстрируемую рис. 5.2.2, которая в некоторой степени относится к манипулятору с одной степенью подвижности.

Пример 5.2.1

Требуется получить основные уравнения динамики для манипулятора с одной степенью подвижности, используя связные графы (рис. 5.2.2).

Решение. Сначала определим геометрические ограничения на рис. 5.2.3. Основные векторы можно определить как

$$q_k = [0], \quad q_c = [0], \quad v_l = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad \text{либо} \quad q_l = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

затем свяжем q_c с q_k :

$$\theta = \theta \quad \text{или} \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}.$$

Следовательно, $T_{ck} = [1]$. Далее, свяжем q_l с q_k :

$$x = l \cos \theta \tag{5.2.24}$$

и

$$y = l \sin \theta \tag{5.2.25}$$

или

$$\dot{x} = (-l \sin \theta) \dot{\theta} \tag{5.2.26}$$

и

$$\dot{y} = (l \cos \theta) \dot{\theta}. \tag{5.2.27}$$

Следовательно,

$$T_{lk} = \begin{bmatrix} -l \sin \theta \\ l \cos \theta \end{bmatrix}. \tag{5.2.28}$$

Теперь изобразим 1-узлы для q_l , q_k и v_l и модулированные преобразователи. В результате получится связный граф, показанный на рис. 5.2.4.

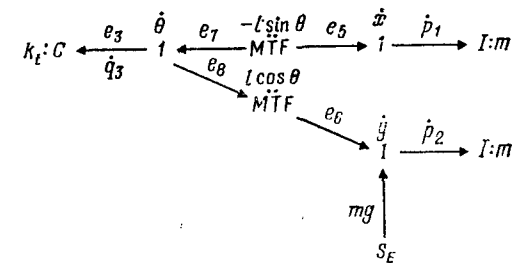


Рис. 5.2.4. Связный граф для манипулятора с одним сочленением.

ный на рис. 5.2.4. Пользуясь законом Кирхгофа при обходе 1-узлов, получим уравнения состояния

$$\dot{p}_1 = \frac{-1}{l \sin \theta} e_7, \quad e_7 = -e_3 - e_8; \tag{5.2.29}$$

$$e_3 = k_l q_3, \quad e_8 = (l \cos \theta) e_6; \tag{5.2.30}$$

$$e_6 = \dot{p}_2 - mg. \tag{5.2.31}$$

Следовательно,

$$\dot{p}_1 = \frac{-1}{l \sin \theta} [-k_l q_3 - (\dot{p}_2 - mg) l \cos \theta]. \tag{5.2.32}$$

Аналогично

$$\dot{p}_2 = \frac{1}{l \cos \theta} (-k_t q_3 + \dot{p}_1 l \sin \theta) + mg \quad (5.2.33)$$

и

$$\dot{q}_3 = \dot{\theta} = \frac{-p_1}{ml \sin \theta}. \quad (5.2.34)$$

Чтобы подчеркнуть важность этих уравнений, проведем следующие выкладки.

$$p_1 = m\dot{x} \text{ и } p_2 = m\dot{y} \text{ — соотношения } l\text{-поля,} \quad (5.2.35)$$

так что

$$\dot{p}_1 = m\ddot{x} \text{ и } \dot{p}_2 = m\ddot{y}, \quad (5.2.36)$$

где

$$\ddot{x} = (-l \sin \theta) \ddot{\theta} + (-l \cos \theta) \dot{\theta}^2 \text{ и } \ddot{y} = (l \cos \theta) \ddot{\theta} - (l \sin \theta) \dot{\theta}^2. \quad (5.2.37)$$

Последние выражения могут быть подставлены в уравнения как для \dot{p}_1 , так и для \dot{p}_2 , поскольку оба они одинаковые. Мы выберем уравнение для \dot{p}_2 :

$$\begin{aligned} (ml \cos \theta) \ddot{\theta} - (ml \sin \theta) \dot{\theta}^2 &= \\ &= \frac{-k_t(q_3)}{l \cos \theta} - (ml \sin \theta \operatorname{tg} \theta) \ddot{\theta} - (ml \sin \theta) \dot{\theta}^2 + mg. \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

Теперь $(-ml \sin \theta) \dot{\theta}^2$ можно сократить в обеих частях и умножить все члены уравнения на $l \cos \theta$:

$$(ml^2 \cos^2 \theta) \ddot{\theta} = -k_t(q_3) - (ml^2 \sin^2 \theta) \ddot{\theta} + mgl \cos \theta. \quad (5.2.39)$$

После дальнейших преобразований получим

$$ml^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \ddot{\theta} = -k_t(q_3) + mgl \cos \theta. \quad (5.2.40)$$

Так как $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ и $q_3 = \theta$, мы видим, что

$$ml^2 \ddot{\theta} = -k_t \theta + mgl \cos \theta. \quad (5.2.41)$$

А теперь рассмотрим ту же задачу, используя уравнение Лагранжа. Кинетическая энергия T равна

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2, \quad (5.2.42)$$

а потенциальная энергия V равна

$$V = \frac{1}{2} k_t \theta^2 - mgl \sin \theta \text{ (предполагается, что } y = 0). \quad (5.2.43)$$

Вспомним уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \quad (5.2.44)$$

где в данном случае $q = \theta$, и ясно, что

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = ml^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = ml^2 \ddot{\theta}; \quad (5.2.45)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = k_t \theta - mgl \cos \theta. \quad (5.2.46)$$

Таким образом,

$$ml^2 \ddot{\theta} + k_t \theta - mgl \cos \theta = 0 \text{ или} \quad (5.2.47)$$

$$ml^2 \ddot{\theta} = -k_t \theta + mgl \cos \theta. \quad (5.2.48)$$

Видно, что уравнения (5.2.41) и (5.2.48) идентичны. Хотя уравнения Лагранжа в этом случае и, возможно, в следующей рассматриваемой задаче легче использовать, все же будут встречаться задачи, которые легче исследовать с помощью связанных графов.

Чтобы прийти к стандартному виду, нужно связать \dot{p}_1 с \dot{p}_2 . Используя отношения, полученные для l -полей, мы видим, что

$$\frac{p_1}{\dot{x}} = \frac{p_2}{\dot{y}} \text{ или} \quad (5.2.49)$$

$$p_1 = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} p_2, \text{ где} \quad (5.2.50)$$

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \operatorname{tg} \theta. \quad (5.2.51)$$

Следовательно,

$$p_1 = (\operatorname{tg} \theta) p_2, \quad (5.2.52)$$

что дает

$$\dot{p}_1 = (\sec^2 \theta) \dot{\theta} p_2 + (\operatorname{tg} \theta) \dot{p}_2. \quad (5.2.53)$$

Заметим, что

$$\dot{\theta} = \frac{-\dot{p}_1}{ml \sin \theta} \quad (5.2.54)$$

или окончательно

$$\dot{p}_1 = \frac{-(\sec^2 \theta) p_1 p_2}{ml \sin \theta} + (\operatorname{tg} \theta) \dot{p}_2. \quad (5.2.55)$$

Подставив выражение (5.2.55) в уравнение для \dot{p}_2 , получим

$$\dot{p}_2 = \frac{1}{l \cos \theta} \left[-k_t q_3 + \left(\frac{-(\sec^2 \theta) p_1 p_2}{ml \sin \theta} + (\operatorname{tg} \theta) \dot{p}_2 \right) l \sin \theta \right] + mg \quad (5.2.56)$$

или

$$\dot{p}_2 = \left(\frac{-k_1 q_3}{l \cos \theta} - \frac{(\sec^2 \theta) p_1 p_2}{ml \cos \theta} + mg \right) (1 - l \operatorname{tg}^2 \theta)^{-1}. \quad (5.2.57)$$

Следовательно, уравнения состояния имеют вид

$$\dot{p}_1 = \frac{(-\sec^2 \theta) p_1 p_2}{ml \sin \theta} + (\operatorname{tg} \theta) \left[\left(\frac{-k_1 q_3}{l \cos \theta} - \frac{(\sec^2 \theta) p_1 p_2}{ml \cos \theta} + mg \right) (1 - l \operatorname{tg}^2 \theta)^{-1} \right], \quad (5.2.58)$$

$$\dot{p}_2 = \left(\frac{k_1 q_3}{l \cos \theta} - \frac{(\sec^2 \theta) p_1 p_2}{ml \cos \theta} + mg \right) (1 - l \operatorname{tg}^2 \theta), \quad (5.2.59)$$

$$\dot{q}_3 = \dot{\theta} = \frac{-p_1}{ml \sin \theta}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (5.2.60)$$

Теперь рассмотрим более сложную задачу, иллюстрируемую рис. 5.2.5, которая относится к манипуляционному роботу с двумя сочленениями.

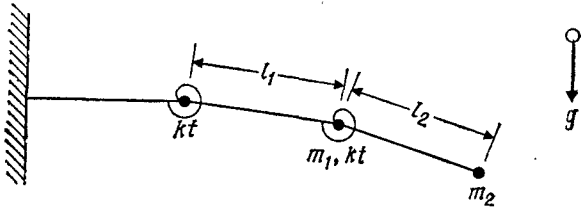


Рис. 5.2.5. Консольный двухмаятниковый механизм с упругими сочленениями.

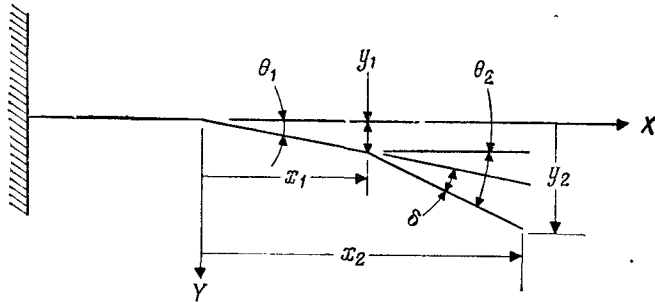


Рис. 5.2.6. Геометрия механизма 5.2.5.

Пример 5.2.2 ■

Для двухстепенного манипулятора (рис. 5.2.5) требуется получить уравнения динамики, используя представление методом связанных графов.

Решение. Сначала определим геометрические ограничения с использованием рис. 5.2.6. Основные векторы можно опреде-

лить как

$$q_k = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad q_c = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \delta \end{bmatrix}, \quad v_l = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad q_l = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Далее свяжем q_c с q_k :

$$\theta_1 = \theta_1 \quad \text{и} \quad \delta = -\theta_1 + \theta_2$$

или

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1 \quad \text{и} \quad \dot{\delta} = -\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2.$$

Следовательно,

$$T_{ck} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее свяжем q_l с q_k :

$$x_1 = l_1 \cos \theta_1,$$

$$y_1 = l_1 \sin \theta_1,$$

$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2,$$

и

$$y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

или

$$\dot{x}_1 = (-l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1,$$

$$\dot{y}_1 = (l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1,$$

$$\dot{x}_2 = (-l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + (-l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2,$$

и

$$\dot{y}_2 = (l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + (l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2.$$

Таким образом,

$$T_{lk} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 & 0 \\ l_1 \cos \theta_1 & 0 \\ -l_1 \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_2 \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Расставляя 1-узлы для q_c , q_k и v_l и вставляя соответствующие модулированные преобразователи, получим связный граф, показанный на рис. 5.2.7. Заметим, что модулированные

преобразователи с нулевым коэффициентом отсутствуют, а с единичным коэффициентом превратились в прямые звенья.

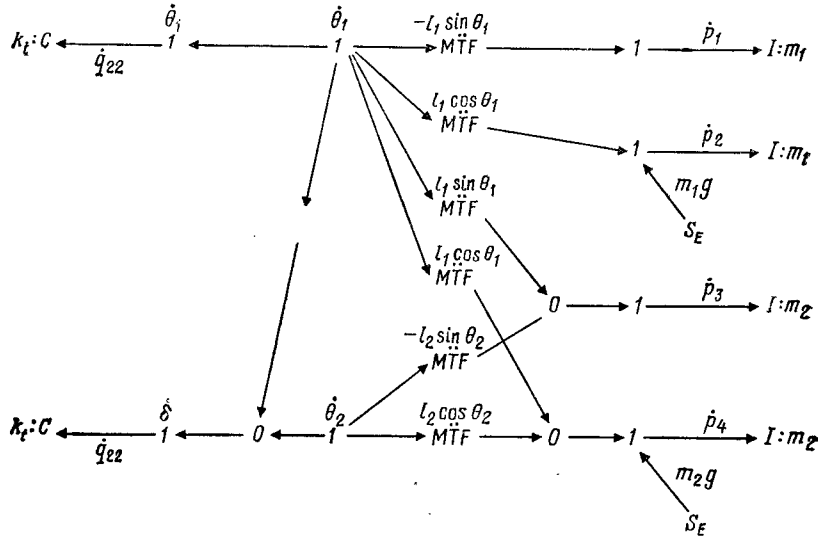


Рис. 5.2.7. Связный граф для двухосного упругого манипулятора.

С помощью этого связного графа можно вывести базовое множество уравнений состояния

$$\dot{p}_1 = (\dot{p}_2 + \dot{p}_4 - m_1 g - m_2 g) \operatorname{ctg} \theta_1 - \dot{p}_3 + \frac{k_t}{l_1 \sin \theta_1} (\theta_1 - \delta), \quad (5.2.61)$$

$$\dot{p}_2 = (\dot{p}_1 + \dot{p}_3) \operatorname{tg} \theta_1 - \dot{p}_4 + m_1 g + m_2 g + \frac{k_t}{l_1 \cos \theta_1} (\delta - \theta_1), \quad (5.2.62)$$

$$\dot{p}_3 = (\dot{p}_4 - m_2 g) \operatorname{ctg} \theta_2 + \frac{k_t (\delta)}{l_2 \sin \theta_2}, \quad (5.2.63)$$

$$\dot{p}_4 = (\dot{p}_3) \operatorname{tg} \theta_2 + m_2 g - \frac{k_t (\delta)}{l_2 \cos \theta_2}, \quad (5.2.64)$$

$$\dot{q}_{22} = \dot{\theta}_1 = \frac{-p_1}{m_1 l_1 \sin \theta_1}, \quad (5.2.65)$$

$$\dot{q}_{27} = \dot{\delta} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{1}{l_2 \sin \theta_2} \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_3}{m_2} \right) + \frac{p_1}{m_1 l_1 \sin \theta_1} \quad (5.2.66)$$

С помощью такого же анализа, как и в предыдущем примере, можно получить уравнения движения. Здесь следовало бы заметить, что уравнения (5.2.61) и (5.2.62) подобны, то же касается и уравнений (5.2.63) и (5.2.64).

Отношения для I -полей в этом примере имеют вид

$$p_1 = m_1 \dot{x}, \quad p_2 = m_1 \dot{y}_1, \quad p_3 = m_2 \dot{x}_2, \quad \text{и} \quad p_4 = m_2 \dot{y}_2, \quad (5.2.67)$$

Следовательно,

$$\dot{p}_1 = m_1 \ddot{x}_1, \quad \dot{p}_2 = m_1 \ddot{y}_1, \quad \dot{p}_3 = m_2 \ddot{x}_2 \quad \text{и} \quad \dot{p}_4 = m_2 \ddot{y}_2. \quad (5.2.68)$$

После соответствующих выкладок получим

$$\dot{p}_1 = (-m_1 l_1 \sin \theta_1) \ddot{\theta}_1 + (-m_1 l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1^2, \quad (5.2.69a)$$

$$\dot{p}_2 = (m_1 l_1 \cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 + (-m_1 l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1^2, \quad (5.2.69b)$$

$$\dot{p}_3 = (-m_2 l_1 \sin \theta_1) \ddot{\theta}_1 + (-m_2 l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1^2 + (-m_2 l_2 \sin \theta_2) \ddot{\theta}_2 + (-m_2 l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2^2, \quad (5.2.69в)$$

$$\dot{p}_4 = (m_2 l_1 \cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 + (-m_2 l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1^2 + (m_2 l_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 + (-m_2 l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2^2. \quad (5.2.69г)$$

Подставив выражения (5.2.69a)–(5.2.69г) в (5.2.61) либо (5.2.62) и сделав преобразования, как и в предыдущем примере, получим

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\cos (\theta_1 - \theta_2)] \ddot{\theta}_2 = \\ = -m_2 l_1 l_2 [\sin (\theta_1 - \theta_2)] \dot{\theta}_2^2 + m_1 l_1 g \cos \theta_1 + \\ + m_2 l_1 g \cos \theta_1 + k_t (\theta_2 - 2\theta_1). \end{aligned} \quad (5.2.70a)$$

Далее подстановка выражений (5.2.69в) и (5.2.69г) в (5.2.58) или (5.2.64) дает

$$m_2 l_1 l_2 [\cos (\theta_1 - \theta_2)] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 = m_2 l_1 l_2 [\sin (\theta_1 - \theta_2)] \dot{\theta}_1^2 + \\ + m_2 l_2 g \cos \theta_2 - k_t (\theta_2 - \theta_1). \quad (5.2.70б)$$

Как и в предыдущем примере, мы используем уравнения Лагранжа для получения уравнений движения. Кинетическая энергия T равна

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 [\cos (\theta_1 - \theta_2)]$$

и если $y = 0$ — начальное положение, то потенциальная энергия V определяется выражением

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} k_t \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_t (\theta_2^2 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \theta_2) - m_1 g (l_1 \sin \theta_1) - \\ - m_2 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_2 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

Используя уравнения Лагранжа для θ_1 , получаем

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2)] \ddot{\theta}_2 = \\ = -m_2 l_1 l_2 [\sin(\theta_1 - \theta_2)] \dot{\theta}_2^2 + m_1 l_1 g \cos \theta_1 + m_2 l_1 g \cos \theta_1 + \\ + k_t (\theta_2 - 2\theta_1), \quad (5.2.71a) \end{aligned}$$

а использование уравнения Лагранжа для θ_2 дает

$$\begin{aligned} m_2 l_1 l_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2)] \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 = \\ = m_2 l_1 l_2 [\sin(\theta_1 - \theta_2)] \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g \cos \theta_2 - k_t (\theta_2 - \theta_1). \quad (5.2.71б) \end{aligned}$$

А теперь заметим, что уравнение (5.2.70а) идентично (5.2.71а), а уравнение (5.2.70б) идентично (5.2.71б).

Теперь нужно преобразовать базовые уравнения к стандартному виду, что в этой задаче труднее, чем в предыдущей. Разрешив уравнения (5.2.61) или (5.2.62) и (5.2.63) либо (5.2.64) относительно сил тяжести, получим

$$\begin{aligned} m_1 g = \dot{p}_2 - \dot{p}_1 \operatorname{tg} \theta_1 - \dot{p}_3 \operatorname{tg} \theta_1 + \dot{p}_3 \operatorname{tg} \theta_2 + \\ + \frac{k_t (\theta_1 - \delta)}{l_1 \cos \theta_1} - \frac{k_t (\delta)}{l_2 \cos \theta_2}, \quad (5.2.72) \end{aligned}$$

$$m_2 g = \dot{p}_4 - \dot{p}_3 \operatorname{tg} \theta_2 + \frac{k_t (\delta)}{l_2 \cos \theta_2}. \quad (5.2.73)$$

Из формул (5.2.67) видно, что

$$p_1 = \frac{\dot{x}_1}{\dot{y}_1} p_2, \quad (5.2.74a)$$

$$p_3 = \frac{\dot{x}_2}{\dot{y}_2} p_4. \quad (5.2.74б)$$

Из соотношений инерции следует, что

$$\dot{x}_1 = (-l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1, \quad (5.2.75a)$$

$$\dot{y}_1 = (l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1, \quad (5.2.75б)$$

$$\dot{x}_2 = (-l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + (-l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2, \quad (5.2.75в)$$

$$\dot{y}_2 = (l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + (l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2. \quad (5.2.75г)$$

Здесь необходимо предположить, что $\theta_2 = f_c(t) \theta_1$, где $f_c(t)$ определена как функция управления и является функцией масс, длин звеньев и времени.

Из формул (5.2.74а), (5.2.75а) и (5.2.75б) видно, что

$$p_1 = (-\operatorname{tg} \theta_1) p_2.$$

Следовательно,

$$\dot{p}_1 = (-\operatorname{tg} \theta_1) \dot{p}_2 + (-\sec^2 \theta_1) \dot{\theta}_1 p_2,$$

но поскольку

$$\dot{\theta}_1 = \frac{-\dot{x}_1}{l_1 \sin \theta_1} = \frac{-p_1}{m_1 l_1 \sin \theta_1},$$

то получим

$$\dot{p}_1 = (-\operatorname{tg} \theta_1) \dot{p}_2 + (-\sec^3 \theta_1) \frac{-p_1}{m_1 l_1} p_2.$$

Введем

$$A = (\sec^3 \theta_1) \frac{p_1}{m_1 l_1}. \quad (5.2.76)$$

Окончательно имеем

$$\dot{p}_1 = (-\operatorname{tg} \theta_1) \dot{p}_2 + A p_2. \quad (5.2.77)$$

Исходя из формул (5.2.74б), (5.2.75в) и (5.2.75г), а также предположения, что $\theta_2 = f_c(t) \theta_1$, приходим к следующему результату:

$$p_3 = \frac{(-l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + f_c(t) (-l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_1}{(l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + f_c(t) (l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1} p_4.$$

Теперь введем

$$B = \frac{(-l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + f_c(t) (-l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_1}{(l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + f_c(t) (l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1}. \quad (5.2.78)$$

Таким образом,

$$\dot{p}_3 = B \dot{p}_4 + \dot{B} p_4. \quad (5.2.79)$$

После соответствующих подстановок для $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$ получим

$$\begin{aligned} \dot{B} = \left(\left\{ [l_1 \cos \theta_1 + f_c(t) l_2 \cos \theta_2] \times \right. \right. \\ \times \left[\frac{p_1}{m_1 l_1} \operatorname{ctg} \theta_1 + f_c(t)^2 \left(\frac{p_1 l_2 \cos \theta_2}{m_1 l_1 \sin \theta_1} \right) - f_c(t) l_2 \sin \theta_2 \right] \left. \right\} - \\ - \left\{ [-l_1 \sin \theta_1 - f_c(t) \sin \theta_2] \times \right. \\ \times \left[\frac{p_1}{m_1} + f_c(t)^2 \left(\frac{p_1 l_2 \sin \theta_2}{m_1 l_1 \sin \theta_1} \right) + f_c(t) l_2 \cos \theta_2 \right] \left. \right\} \right) \times \\ \times [l_1 \cos \theta_1 + f_c(t) l_2 \cos \theta_2]^{-2}. \end{aligned}$$

Подстановка выражений (5.2.77) и (5.2.79) в (5.2.72) и (5.2.73) дает

$$m_1 g = \dot{p}_2 - [(-\operatorname{tg} \theta_1) \dot{p}_2 + A p_2] \operatorname{tg} \theta_1 - (B \dot{p}_4 + \dot{B} p_4) \operatorname{tg} \theta_1 + (B \dot{p}_4 + \dot{B} p_4) \operatorname{tg} \theta_2 + \frac{k_t (\theta_1 - \delta)}{l_1 \cos \theta_1} - \frac{k_t (\delta)}{l_2 \cos \theta_2}, \quad (5.2.80)$$

$$m_2 g = \dot{p}_4 - (B \dot{p}_4 + \dot{B} p_4) \operatorname{tg} \theta_2 + \frac{k_t (\delta)}{l_2 \cos \theta_2}. \quad (5.2.81)$$

Разрешая уравнения (5.2.80) относительно \dot{p}_4 , получаем

$$\dot{p}_4 = \left(m_2 g + \dot{B} p_4 \operatorname{tg} \theta_2 - \frac{k_t (\delta)}{l_2 \cos \theta_2} \right) (1 - B \operatorname{tg} \theta_2)^{-1}. \quad (5.2.82)$$

Используя формулу (5.2.82) и разрешая (5.2.80) относительно \dot{p}_2 , находим

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 = & \left(m_1 g + A p_2 \operatorname{tg} \theta_1 + \left\{ \left[B \left(m_2 g + \dot{B} p_4 \operatorname{tg} \theta_2 - \frac{k_t (\delta)}{l_2 \cos \theta_2} \right) \times \right. \right. \right. \\ & \times (1 - B \operatorname{tg} \theta_2)^{-1} \left. \left. \left. + \dot{B} p_4 \right\} \operatorname{tg} \theta_1 - \left\{ \left[B \left(m_2 g + \dot{B} p_4 \operatorname{tg} \theta_2 - \frac{k_t (\delta)}{l_2 \cos \theta_2} \right) (1 - B \operatorname{tg} \theta_2)^{-1} \right] + \dot{B} p_4 \right\} \operatorname{tg} \theta_2 - \right. \\ & \left. - \frac{k_t (\delta)}{l_2 \cos \theta_2} \right) (1 - B \operatorname{tg} \theta_2)^{-1} \left. + \dot{B} p_1 \right\} \operatorname{tg} \theta_2 - \\ & - \frac{k_t (\theta_1 - \delta)}{l_1 \cos \theta_1} + \frac{k_t (\delta)}{l_2 \cos \theta_2} \left. \right) (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1)^{-1}. \quad (5.2.83) \end{aligned}$$

Напомним, что

$$\dot{p}_1 = (-\operatorname{tg} \theta_1) \dot{p}_2 + A p_2, \quad (5.2.84)$$

а также

$$\dot{p}_3 = B \dot{p}_4 + \dot{B} p_4. \quad (5.2.85)$$

В дополнение к этому

$$\dot{q}_{22} = \dot{\theta}_1 = \frac{-p_1}{m_1 l_1 \sin \theta_1} \quad (5.2.86)$$

и

$$q_{27} = \dot{\delta} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{1}{l_2 \sin \theta_2} \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_3}{m_2} \right) + \frac{p_1}{m_1 l_1 \sin \theta_1}. \quad (5.2.87)$$

Уравнения (5.2.87), (5.2.84), (5.2.85), (5.2.82) и (5.2.83) являются уравнениями состояния для этой задачи. ■ ■

5.3. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ МАНИПУЛЯТОРЫ

Надеемся, что эти два примера дали некоторое представление о методе связанных графов и его возможностях. В качестве следующего шага осуществим подробный анализ одного пальца робота в плоскости XZ (т. е. при отсутствии сил тяжести), дви-

жущегося с некоторой относительной скоростью. Схематически задача представлена на рис. 5.3.1.

Пример 5.3.1 ■

Для трехстепенного робота (рис. 5.3.1), движущегося с некоторой относительной скоростью, нужно получить основные

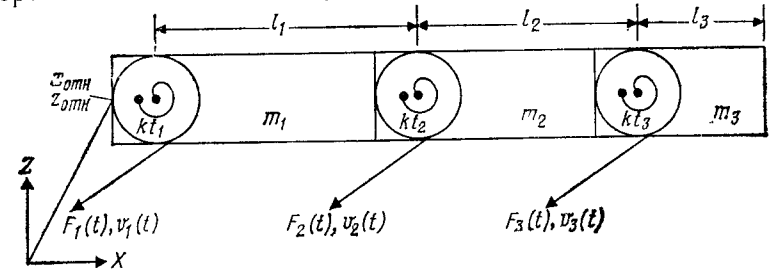


Рис. 5.3.1. Схематическое изображение пальца робота.

уравнения динамики, используя представление связными графами.

Решение. При анализе этой задачи сделаны следующие допущения.

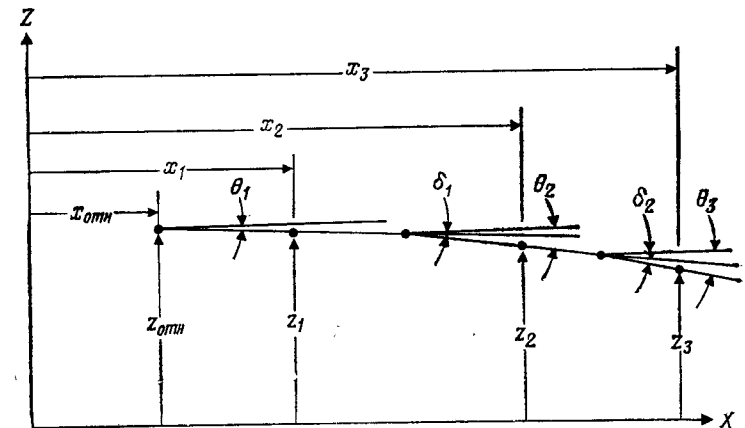


Рис. 5.3.2. Геометрические переменные для пальца робота.

1. Масса каждого звена сконцентрирована в центре звена (т. е. $l_n/2$).

2. В силу допущения 1 инерцией вращения можно пренебречь.

На основе этих допущений введем переменные так, как показано на рис. 5.3.2.

Основные векторы можно определить следующим образом:

$$\mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} x_{\text{отн}} \\ z_{\text{отн}} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_c = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \delta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_I = \begin{bmatrix} \dot{x}_{\text{отн}} \\ \dot{z}_{\text{отн}} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad \mathbf{q}_I = \begin{bmatrix} x_{\text{отн}} \\ z_{\text{отн}} \\ x_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad (5.3.1)$$

Далее свяжем \mathbf{q}_c с \mathbf{q}_k :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_1, \\ \delta_1 &= -\theta_1 + \theta_2, \\ \theta_2 &= -\theta_2 + \theta_3 \end{aligned} \quad (5.3.2a)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta}_1, \\ \dot{\delta}_1 &= -\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2, \\ \dot{\theta}_2 &= -\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3. \end{aligned} \quad (5.3.2b)$$

Таким образом,

$$\mathbf{T}_{Ck} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3.3)$$

Далее свяжем \mathbf{q}_I с \mathbf{q}_k :

$$x_{\text{отн}} = x_{\text{отн}}, \quad (5.3.4)$$

$$z_{\text{отн}} = z_{\text{отн}}, \quad (5.3.5)$$

$$x_1 = x_{\text{отн}} + \frac{l_1}{2} \cos \theta_1, \quad (5.3.6)$$

$$z_1 = z_{\text{отн}} + \left(-\frac{l_1}{2} \sin \theta_1\right), \quad (5.3.7)$$

$$x_2 = x_{\text{отн}} + l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2, \quad (5.3.8)$$

$$z_2 = z_{\text{отн}} + (-l_1 \sin \theta_1) + \left(-\frac{l_2}{2} \sin \theta_2\right), \quad (5.3.9)$$

$$x_3 = x_{\text{отн}} + l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \cos \theta_3, \quad (5.3.10)$$

$$z_3 = z_{\text{отн}} + (-l_1 \sin \theta_1) + (-l_2 \sin \theta_2) + \left(-\frac{l_3}{2} \sin \theta_3\right) \quad (5.3.11)$$

или

$$\dot{x}_{\text{отн}} = \dot{x}_{\text{отн}}, \quad (5.3.12)$$

$$\dot{z}_{\text{отн}} = \dot{z}_{\text{отн}}, \quad (5.3.13)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_{\text{отн}} + \left(-\frac{l_1}{2} \sin \theta_1\right) \dot{\theta}_1, \quad (5.3.14)$$

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_{\text{отн}} + \left(-\frac{l_1}{2} \cos \theta_1\right) \dot{\theta}_1, \quad (5.3.15)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_{\text{отн}} + (-l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + \left(-\frac{l_2}{2} \sin \theta_2\right) \dot{\theta}_2, \quad (5.3.16)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{z}_{\text{отн}} + (-l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + \left(-\frac{l_2}{2} \cos \theta_2\right) \dot{\theta}_2, \quad (5.3.17)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_{\text{отн}} + (-l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + (-l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2 + \left(-\frac{l_3}{2} \sin \theta_3\right) \dot{\theta}_3, \quad (5.3.18)$$

$$\dot{z}_3 = \dot{z}_{\text{отн}} + (-l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + (-l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2 + \left(-\frac{l_3}{2} \cos \theta_3\right) \dot{\theta}_3. \quad (5.3.19)$$

Следовательно,

$$\mathbf{T}_{Ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{l_1}{2} \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l_1}{2} \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -l_1 \sin \theta_1 & -\frac{l_2}{2} \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 \cos \theta_1 & -\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 & 0 \\ 1 & 0 & -l_1 \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_2 & -\frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & -l_1 \cos \theta_1 & -l_2 \cos \theta_2 & -\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \end{bmatrix}. \quad (5.3.20)$$

Связный граф, соответствующий этому пальцу, показан на рис. 5.3.3. Базовые уравнения состояния имеют следующий вид:

$$\dot{p}_6 = F_4(t) - \dot{p}_8 - \dot{p}_{10} - \dot{p}_{12}, \quad (5.3.21)$$

$$\dot{p}_7 = F_5(t) - \dot{p}_9 - \dot{p}_{11} - \dot{p}_{13}, \quad (5.3.22)$$

$$\begin{aligned} p_8 &= \frac{-2F_1(t)}{r_1 l_1 \sin \theta_1} - (\dot{p}_9 + 2\dot{p}_{11} + 2\dot{p}_{13}) \operatorname{ctg} \theta_1 - 2\dot{p}_{10} - 2\dot{p}_{12} - \\ &\quad - \frac{2k_{f2}(\delta_1)}{l_1 \sin \theta_1} + \frac{2k_{f1}(\theta_1)}{l_1 \sin \theta_1}, \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

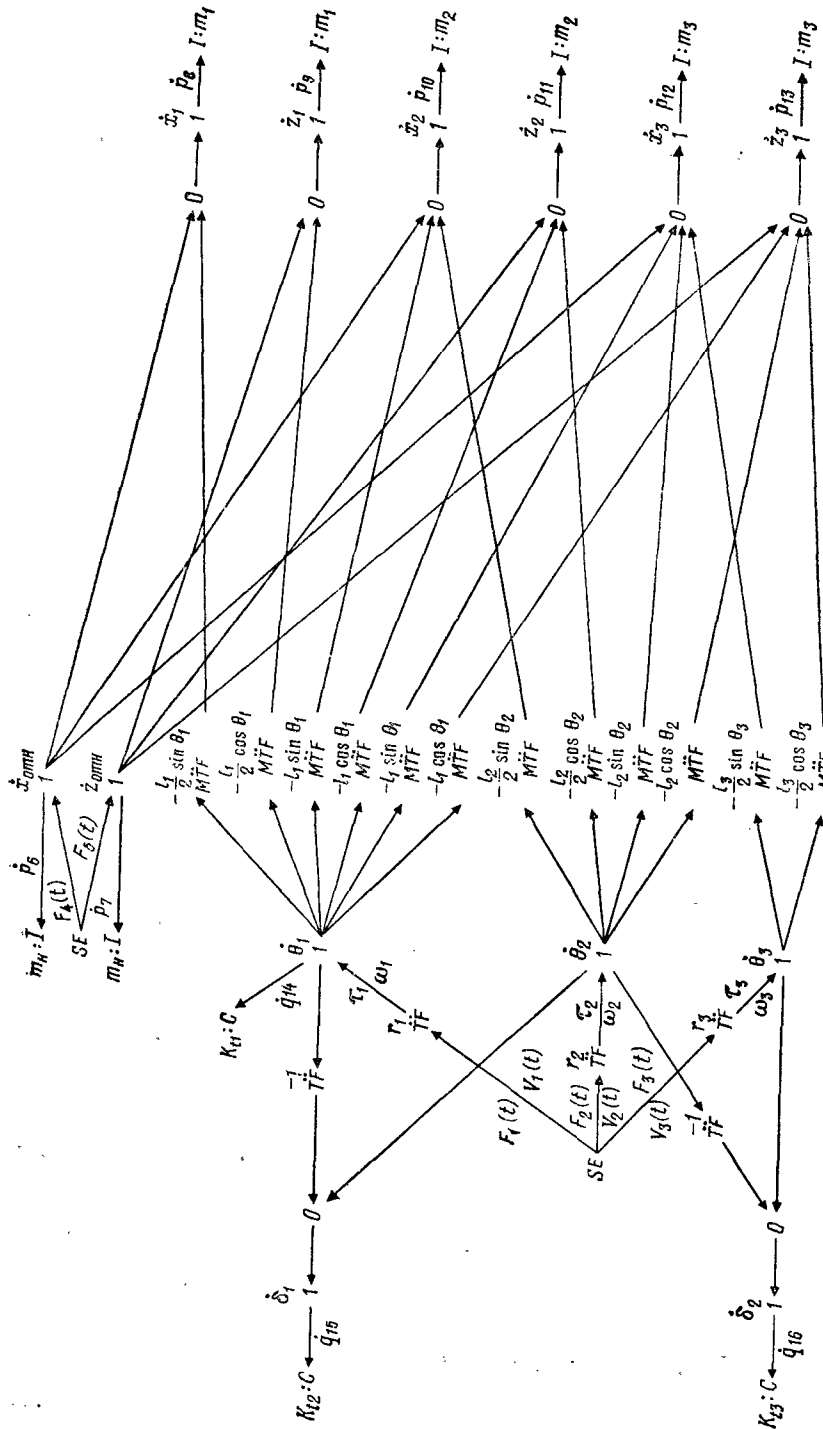


Рис. 5.3.3. Связанный граф для трехосного манипуляционного робота.

$$\dot{p}_9 = \frac{-2F_1(t)}{r_1 l_1 \cos \theta_1} - (\dot{p}_8 + 2\dot{p}_{10} + 2\dot{p}_{12}) \operatorname{tg} \theta_1 - 2\dot{p}_{11} - 2\dot{p}_{13} - \frac{2k_{t2}(\delta_1)}{l_1 \cos \theta_1} + \frac{2k_{t1}(\theta_1)}{l_1 \cos \theta_1}, \quad (5.3.24)$$

$$\dot{p}_{10} = \frac{-2F_2(t)}{r_2 l_2 \sin \theta_2} - (\dot{p}_{11} + 2\dot{p}_{13}) \operatorname{ctg} \theta_2 - 2\dot{p}_{12} - \frac{2k_{t3}(\delta_2)}{l_2 \sin \theta_2} + \frac{2k_{t2}(\delta_1)}{l_2 \sin \theta_2}, \quad (5.3.25)$$

$$\dot{p}_{11} = \frac{-2F_2(t)}{r_2 l_2 \cos \theta_2} - (\dot{p}_{10} + 2\dot{p}_{12}) \operatorname{tg} \theta_2 - 2\dot{p}_{13} - \frac{2k_{t3}(\delta_2)}{l_2 \cos \theta_2} + \frac{2k_{t2}(\delta_1)}{l_2 \cos \theta_2}, \quad (5.3.26)$$

$$\dot{p}_{12} = \frac{-2F_3(t)}{r_3 l_3 \sin \theta_3} - \dot{p}_{13} \operatorname{ctg} \theta_3 + \frac{2k_{t3}(\delta_2)}{l_3 \sin \theta_3}, \quad (5.3.27)$$

$$\dot{p}_{13} = \frac{-2F_3(t)}{r_3 l_3 \cos \theta_3} - \dot{p}_{12} \operatorname{tg} \theta_3 + \frac{2k_{t3}(\delta_2)}{l_3 \cos \theta_3}, \quad (5.3.28)$$

$$\dot{q}_{14} = \dot{\theta}_1 = r_1^{-1} v_1(t), \quad (5.3.29)$$

$$\dot{q}_{15} = \delta_1 = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = r_2^{-1} v_2(t) - r_1^{-1} v_1(t), \quad (5.3.30)$$

$$\dot{q}_{16} = \delta_2 = \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2 = r_3^{-1} v_3(t) - r_2^{-1} v_2(t). \quad (5.3.31)$$

Отношения для l -поля имеют вид

$$p_6 = m_H \dot{x}_{отн}, \quad (5.3.32)$$

$$p_7 = m_H \dot{z}_{отн}, \quad (5.3.33)$$

$$p_8 = m_1 \dot{x}_1, \quad (5.3.34)$$

$$p_9 = m_1 \dot{z}_1, \quad (5.3.35)$$

$$p_{10} = m_2 \dot{x}_2, \quad (5.3.36)$$

$$p_{11} = m_2 \dot{z}_2, \quad (5.3.37)$$

$$p_{12} = m_3 \dot{x}_3, \quad (5.3.38)$$

$$p_{13} = m_3 \dot{z}_3. \quad (5.3.39)$$

Для получения уравнений движения воспользуемся формулами (5.3.24), (5.3.26) и (5.3.28). Мы опустили соотношения (5.3.21) и (5.3.22), поскольку \dot{p}_6 и \dot{p}_7 не появляются в других уравнениях и они являются результатом произвольной относительной скорости. Заметим, что мы могли бы воспользоваться формулами (5.3.23), (5.3.25) и (5.3.27) вместо (5.3.24), (5.3.26) и (5.3.28). Проведя преобразования, как и в предыдущих примерах,

приходим к следующим уравнениям движения:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m_1}{2} + 2m_2 + 2m_3\right) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + (m_2 + 2m_3) l_1 l_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2)] \ddot{\theta}_2 + \\ & + m_3 l_1 l_3 [\cos(\theta_1 - \theta_3)] \ddot{\theta}_3 + (m_2 + 2m_3) l_1 l_2 [\sin(\theta_1 - \theta_2)] \dot{\theta}_2^2 + \\ & + m_3 l_1 l_3 [\sin(\theta_1 - \theta_3)] \dot{\theta}_3^2 = \\ & = \frac{2F_1(t)}{r_1} + l_1 (m_1 + 2m_2 + 2m_3) (\ddot{z}_{\text{отн}} \cos \theta_1 + \ddot{x}_{\text{отн}} \sin \theta_1) + \\ & + 2k_{t2}(\delta_1) - 2k_{t1}(\delta_1), \end{aligned} \quad (5.3.40)$$

$$\begin{aligned} & (m_2 + m_3) l_1 l_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2)] \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{m_2}{2} + 2m_3\right) l_2^2 \ddot{\theta}_2 + \\ & + m_3 l_2 l_3 [\cos(\theta_2 - \theta_3)] \ddot{\theta}_3 - (m_2 + 2m_3) l_1 l_2 [\sin(\theta_1 - \theta_2)] \dot{\theta}_1^2 + \\ & + m_3 l_2 l_3 [\sin(\theta_2 - \theta_3)] \dot{\theta}_3^2 = \frac{2F_2(t)}{r_2} + l_2 (m_2 + 2m_3) \times \\ & \times (\ddot{z}_{\text{отн}} \cos \theta_2 + \ddot{x}_{\text{отн}} \sin \theta_2) + 2k_{t3}(\delta_2) - 2k_{t2}(\delta_1), \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

$$\begin{aligned} & m_3 l_1 l_3 [\cos(\theta_1 - \theta_3)] \ddot{\theta}_1 + m_3 l_2 l_3 [\cos(\theta_2 - \theta_3)] \ddot{\theta}_2 + \frac{m_3}{2} l_3^2 \ddot{\theta}_3 - \\ & - m_3 l_1 l_3 [\sin(\theta_1 - \theta_3)] \dot{\theta}_1^2 - m_3 l_2 l_3 [\sin(\theta_2 - \theta_3)] \dot{\theta}_2^2 = \\ & = \frac{2F_3(t)}{r_3} + m_3 l_3 (\ddot{z}_{\text{отн}} \cos \theta_3 + \ddot{x}_{\text{отн}} \sin \theta_3) - 2k_{t3}(\delta_2). \end{aligned} \quad (5.3.42)$$

Уравнения в стандартной форме имеют вид

$$\dot{p}_{13} = \left(\frac{-2F_3(t)}{r_3 l_3 \cos \theta_3} - \dot{E} p_{13} \operatorname{tg} \theta_3 + \frac{2k_{t3}(\delta_2)}{l_3 \cos \theta_3} \right) (1 + E \operatorname{tg} \theta_3)^{-1}, \quad (5.3.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11} = & \left(\frac{-2F_2(t)}{r_2 l_2 \cos \theta_2} - \dot{D} p_{11} \operatorname{tg} \theta_2 - 2E \dot{p}_{13} \operatorname{tg} \theta_2 - 2\dot{E} p_{13} \operatorname{tg} \theta_2 - 2\dot{p}_{13} - \right. \\ & \left. - \frac{2k_{t3}(\delta_2)}{l_2 \cos \theta_2} + \frac{2k_{t2}(\delta_1)}{l_2 \cos \theta_2} \right) (1 - D \operatorname{tg} \theta_2)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_9 = & \left(\frac{-2F_1(t)}{r_1 l_1 \cos \theta_1} - \dot{C} p_9 \operatorname{tg} \theta_1 - 2D \dot{p}_{11} \operatorname{tg} \theta_1 - \right. \\ & - 2\dot{D} p_{11} \operatorname{tg} \theta_1 - 2E \dot{p}_{13} \operatorname{tg} \theta_1 - \\ & \left. - 2\dot{E} p_{13} \operatorname{tg} \theta_1 - 2\dot{p}_{13} - \frac{2k_{t2}(\delta_1)}{l_1 \cos \theta_1} + \frac{2k_{t1}(\theta_1)}{l_1 \cos \theta_1} \right) \times \\ & \times (1 + C \operatorname{tg} \theta_1)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.3.45)$$

$$\dot{p}_8 = C \dot{p}_9 + \dot{C} p_9, \quad (5.3.46)$$

$$\dot{p}_{10} = D \dot{p}_{11} + \dot{D} p_{11}, \quad (5.3.47)$$

$$\dot{p}_{12} = E \dot{p}_{13} + \dot{E} p_{13}, \quad (5.3.48)$$

где

$$C = \frac{\dot{x}_{\text{отн}} + \left(-\frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1\right) \dot{\theta}_1}{\dot{z}_{\text{отн}} + \left(-\frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1\right) \dot{\theta}_1}, \quad (5.3.49)$$

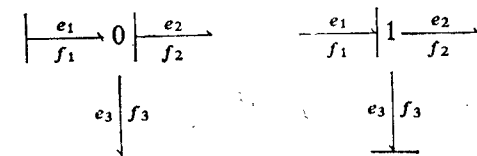
$$D = \frac{\dot{x}_{\text{отн}} + (-l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + \left(-\frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2\right) \dot{\theta}_2}{\dot{z}_{\text{отн}} + (-l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + \left(-\frac{1}{2} l_1 \cos \theta_2\right) \dot{\theta}_2}, \quad (5.3.50)$$

$$E = \frac{\dot{x}_{\text{отн}} + (-l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + (-l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2 + \left(-\frac{1}{2} l_3 \sin \theta_3\right) \dot{\theta}_3}{\dot{z}_{\text{отн}} + (-l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + (-l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2 + \left(-\frac{1}{2} l_3 \cos \theta_3\right) \dot{\theta}_3}. \quad (5.3.51)$$

5.4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ МЕТОДОМ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

5.4.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В многосвязных системах могут существовать узлы с общими усилиями и общими потоками. Связные графы показывают направление потока энергии и информации, а также причинность, например:



Для 0-узлов

$$\sum_{i=1}^n f_i = 0, \quad e_1 = e_2 = \dots = e_n, \quad (5.4.1)$$

а для 1-узлов

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0, \quad f_1 = f_2 = \dots = f_n. \quad (5.4.2)$$

Это законы Кирхгофа для 0-узлов и 1-узлов; они особенно подходят при рассмотрении сочленений.

5.4.2. ПРИМЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СВЯЗНЫМИ ГРАФАМИ

В последующих примерах иллюстрируется эффективность метода связанных графов при представлении манипуляционных роботов.

Пример 5.4.1 ■

Построить связный граф для простого вертикального манипулятора (рис. 5.4.1) и вывести основные уравнения с помощью законов Кирхгофа для общих узлов.

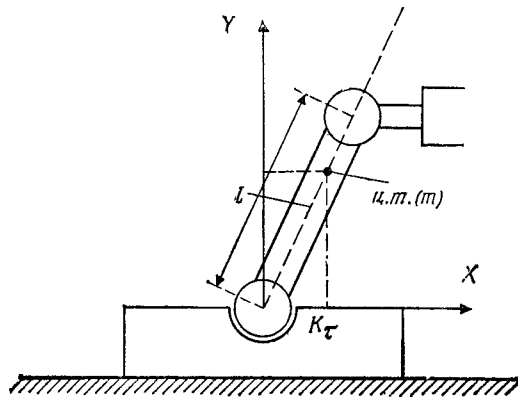


Рис. 5.4.1. Геометрия простого манипулятора.

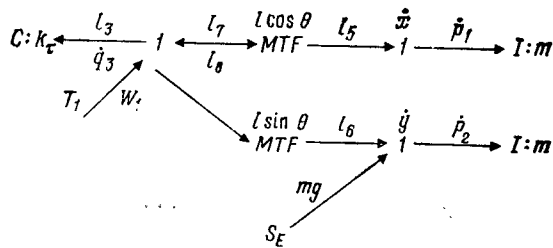


Рис. 5.4.2. Связный граф для одиночного вертикального манипулятора.

Решение. Чтобы построить связный граф для этой системы, нужно сначала определить соотношения между \dot{x} , \dot{y} и угловой скоростью $\dot{\theta}$. Они легко получаются, как показано на рис. 5.4.2.

$$x = l \sin \theta, \tag{5.4.3}$$

$$\dot{x} = (l \cos \theta) \dot{\theta}, \tag{5.4.4}$$

$$y = l \cos \theta, \tag{5.4.5}$$

$$\dot{y} = -(l \sin \theta) \dot{\theta}, \tag{5.4.6}$$

$$p_1 = m\dot{x}, \tag{5.4.7}$$

$$p_2 = m\dot{y}, \tag{5.4.8}$$

$$e_7 = (l \cos \theta) e_5 = m\dot{x} l \cos \theta, \tag{5.4.9}$$

$$e_6 + mg = m\ddot{y}, \tag{5.4.10}$$

$$e_8 = (-l \sin \theta) e_6 = (-l \sin \theta) (m\ddot{y} - mg), \tag{5.4.11}$$

$$\tau_1 = e_7 + e_8 + k_\tau (\theta - \theta_0) = m\dot{x} l \cos \theta - (l \sin \theta) (m\ddot{y} - mg) + k_\tau (\theta - \theta_0), \tag{5.4.12}$$

$$\ddot{x} = (l \cos \theta) \ddot{\theta} - (l \sin \theta) \dot{\theta}^2, \tag{5.4.13}$$

$$\ddot{y} = (-l \sin \theta) \ddot{\theta} - (l - \cos \theta) \dot{\theta}^2. \tag{5.4.14}$$

Пример 5.4.2 ■

Исходя из рис. 5.4.3, нужно построить подходящий связный граф и вывести основные уравнения динамики.

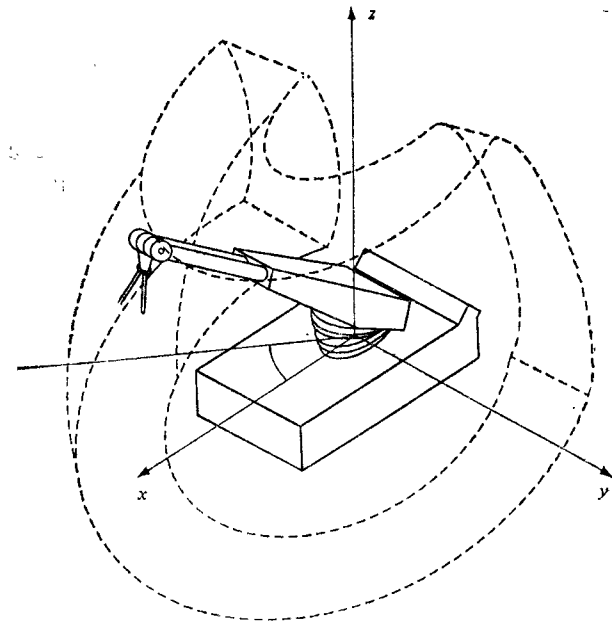


Рис. 5.4.3. Геометрия робота, работающего в сферической системе.

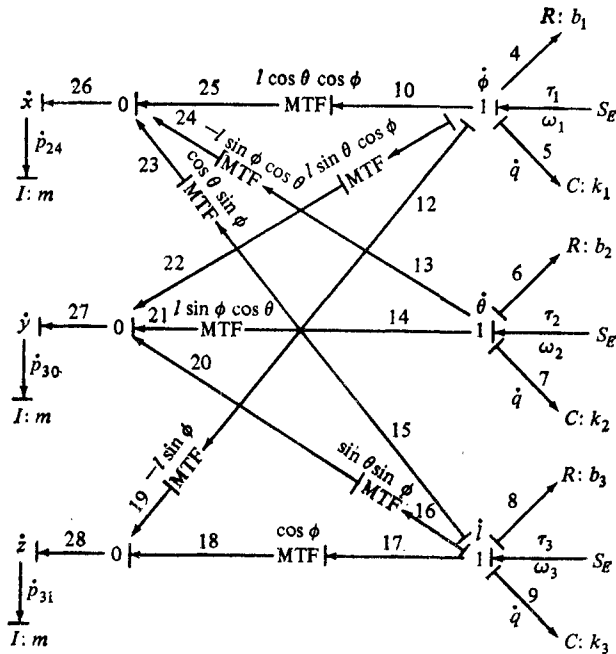


Рис. 5.4.4. Связный граф, соответствующий роботу в сферической системе координат.

Решение. Сначала опять свяжем потоки \dot{x} , \dot{y} и \dot{z} с $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ и \dot{l} , чтобы определить общие узлы потоков. Таким образом,

$$x = l \sin \phi \cos \theta, \quad (5.4.15)$$

$$y = l \sin \phi \sin \theta, \quad (5.4.16)$$

$$z = l \cos \phi, \quad (5.4.17)$$

$$\dot{x} = (l \cos \theta \cos \phi) \dot{\phi} - (l \sin \phi \sin \theta) \dot{\theta} + \dot{l} \cos \theta \sin \phi, \quad (5.4.18)$$

$$\dot{y} = (l \sin \theta \cos \phi) \dot{\phi} + (l \sin \phi \cos \theta) \dot{\theta} + \dot{l} \sin \phi \sin \theta, \quad (5.4.19)$$

$$\dot{z} = \dot{l} \cos \phi - (l \sin \phi) \dot{\phi}. \quad (5.4.20)$$

Соответствующий связный граф и основные уравнения динамики для такого сферического робота показаны на рис. 5.4.4.

Основные уравнения (Кирхгофа) имеют вид

$$T_1 = b_1 \dot{\phi} + k_1 \phi - m \dot{z} l \sin \phi + m \dot{y} l \sin \theta \cos \phi + m \dot{x} l \cos \theta \cos \phi, \quad (5.4.21)$$

$$T_2 = b_2 \dot{\theta} + k_2 \theta + m \dot{y} l \sin \phi \cos \theta - m \dot{x} l \sin \phi \cos \theta, \quad (5.4.22)$$

$$T_3 = b_3 \dot{l} + k_3 l + m \dot{z} \cos \phi + m \dot{y} \sin \theta \sin \phi + m \dot{x} \cos \theta \sin \phi. \quad (5.4.23)$$

Сделайте подстановку \dot{x} , \dot{y} и \dot{z} из представленных ранее уравнений.

Пример 5.4.3

Исходя из рис. 5.4.5, который соответствует роботу, работающему в цилиндрической системе координат, нужно построить подходящий связный граф и вывести основные уравнения динамики.

Решение. Так же как и в предыдущих примерах, сначала свяжем общие потоки \dot{x} и \dot{y} с общими потоками $\dot{\theta}$ и \dot{L}_2 . Тогда в соответствии с массами m_2 и m_3 имеем

$$x_2 = L_1 \sin \theta, \quad (5.4.24)$$

$$y_2 = -L_1 \cos \theta, \quad (5.4.25)$$

$$x_3 = L_1 \sin \theta + L_2 \cos \theta, \quad (5.4.26)$$

$$y_3 = -L_1 \cos \theta + L_2 \sin \theta. \quad (5.4.27)$$

Пусть S_{e2} , $S_{e\theta}$ и S_{eL} — три источника усилий в общих узлах \dot{z} в направлении, перпендикулярном x и y , $\dot{\theta}$ и \dot{L}_2 соответственно. Тогда основные уравнения для построения общих потоков имеют вид

$$\dot{x}_2 = L_1 \dot{\theta} \cos \theta, \quad (5.4.28)$$

$$\dot{y}_2 = L_1 \dot{\theta} \sin \theta, \quad (5.4.29)$$

$$\dot{x}_3 = L_1 \dot{\theta} \cos \theta - L_2 \dot{\theta} \sin \theta + \dot{L}_2 \cos \theta, \quad (5.4.30)$$

$$\dot{y}_3 = L_1 \dot{\theta} \sin \theta - L_2 \dot{\theta} \cos \theta + \dot{L}_2 \sin \theta. \quad (5.4.31)$$

Таким образом, можно построить подходящий граф, имея в виду, что z -координата не связана с x и y , как и показано на рис. 5.4.6.

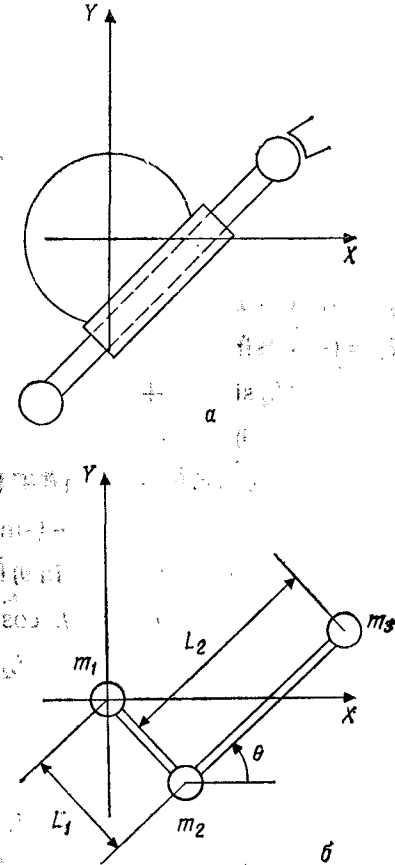


Рис. 5.4.5. Манипулятор в цилиндрической системе (а) и геометрия манипулятора в цилиндрической системе (б).

L_1 — постоянная длина; L_2 — переменная длина.

Основные уравнения имеют вид

$$S_{e2} = \dot{\theta} b_{\theta} + \dot{p}_1 L_1 \cos \theta + \dot{p}_2 L_1 \sin \theta - \dot{p}_3 L_2 \sin \theta - \dot{p}_4 L_2 \cos \theta, \quad (5.4.32)$$

$$S_{eL} = \dot{L}_2 b_L + \dot{p}_3 \cos \theta + \dot{p}_4 \sin \theta, \quad (5.4.33)$$

$$\dot{x}_2 = (L_1 \cos \theta) \dot{\theta}, \quad (5.4.34)$$

$$\dot{y}_2 = (L_1 \sin \theta) \dot{\theta}, \quad (5.4.35)$$

$$\dot{x}_3 = (L_1 \cos \theta) \dot{\theta} - (L_2 \sin \theta) \dot{\theta} + \dot{L}_2 \cos \theta, \quad (5.4.36)$$

$$\dot{y}_3 = (L_1 \sin \theta) \dot{\theta} - (L_2 \cos \theta) \dot{\theta} + \dot{L}_2 \sin \theta, \quad (5.4.37)$$

$$\ddot{x}_2 = (-L_1 \sin \theta) \dot{\theta}^2 + (L_1 \cos \theta) \ddot{\theta}, \quad (5.4.38)$$

$$\ddot{y}_2 = (L_1 \cos \theta) \dot{\theta}^2 + (L_1 \sin \theta) \ddot{\theta}, \quad (5.4.39)$$

$$\ddot{x}_3 = (-L_1 \sin \theta) \dot{\theta}^2 + (L_1 \cos \theta) \ddot{\theta} - (L_2 \cos \theta) \dot{\theta}^2 - (L_2 \sin \theta) \ddot{\theta} + \ddot{L}_2 \cos \theta - (\dot{L}_2 \sin \theta) \dot{\theta}, \quad (5.4.40)$$

$$\ddot{y}_3 = (L_1 \cos \theta) \dot{\theta}^2 + (L_1 \sin \theta) \ddot{\theta} + (L_2 \sin \theta) \dot{\theta}^2 - (L_2 \cos \theta) \ddot{\theta} + \ddot{L}_2 \sin \theta + (\dot{L}_2 \cos \theta) \dot{\theta}, \quad (5.4.41)$$

$$S_{e\theta} = \dot{\theta} b_{\theta} + m_2 L_1^2 [(\cos \theta) \ddot{\theta} - (\sin \theta) \dot{\theta}^2] \cos \theta + m_2 L_1^2 [(\cos \theta) \dot{\theta}^2 + (\sin \theta) \ddot{\theta}] \sin \theta + m_3 [(L_1 \sin \theta) \dot{\theta}^2 - (L_1 \cos \theta) \ddot{\theta} + (L_2 \cos \theta) \dot{\theta}^2 + (L_2 \sin \theta) \ddot{\theta} - \dot{L}_2 \cos \theta + (\dot{L}_2 \sin \theta) \dot{\theta}] L_2 \sin \theta - m_3 [(L_1 \cos \theta) \dot{\theta}^2 + (L_1 \sin \theta) \ddot{\theta} + (L_2 \sin \theta) \dot{\theta}^2 - (L_2 \cos \theta) \ddot{\theta} + \dot{L}_2 \sin \theta + (\dot{L}_2 \cos \theta) \dot{\theta}] L_2 \cos \theta, \quad (5.4.42)$$

$$S_{eL} = \dot{L}_2 b_L + m_3 [(-L_1 \sin \theta) \dot{\theta}^2 + (L_1 \cos \theta) \ddot{\theta} - (L_2 \cos \theta) \dot{\theta}^2 - (L_2 \sin \theta) \ddot{\theta} + \dot{L}_2 \cos \theta - (\dot{L}_2 \sin \theta) \dot{\theta}] \cos \theta + m_2 [(L_1 \cos \theta) \dot{\theta}^2 + (L_1 \sin \theta) \ddot{\theta} + (L_2 \sin \theta) \dot{\theta}^2 - (L_2 \cos \theta) \ddot{\theta} + L_2 \sin \theta + (\dot{L}_2 \cos \theta) \dot{\theta}] \sin \theta, \quad (5.4.43)$$

$$S_{e2} = (m_1 + m_2 + m_3) g + \dot{z} b_z + \ddot{z} (m_1 + m_2 + m_3). \quad (5.4.44)$$

Пример 5.4.4

Для трехосного манипуляционного робота, показанного на рис. 5.4.7, вывести основные уравнения динамики, используя представление связными графами.

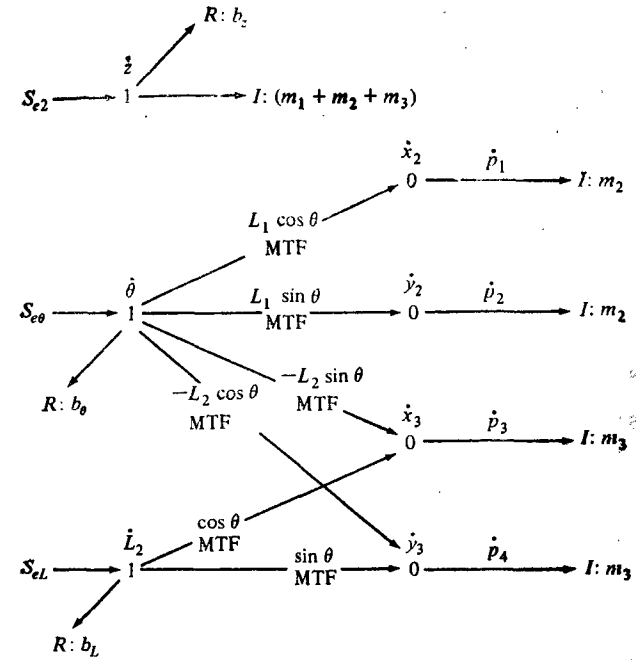


Рис. 5.4.6. Связный граф для робота в цилиндрической системе.

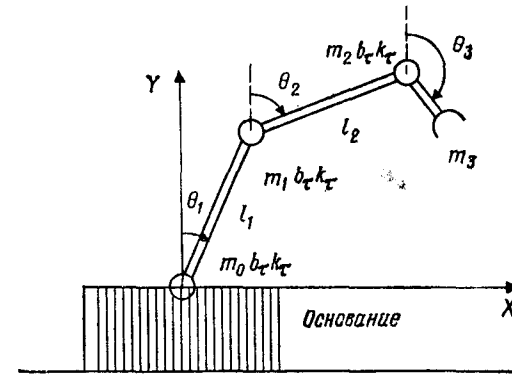


Рис. 5.4.7. Упрощенная геометрия трехосного манипуляционного робота для представления связным графом.

Решение. Сначала опять свяжем линейные и угловые скорости:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad (5.4.45)$$

$$\dot{x}_1 = (l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1, \quad (5.4.46)$$

$$\ddot{x}_1 = (l_1 \cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 - (l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1^2, \quad (5.4.47)$$

$$y_1 = l_1 \cos \theta_1, \quad (5.4.48)$$

$$\dot{y}_1 = - (l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1, \quad (5.4.49)$$

$$\ddot{y}_1 = - (l_1 \sin \theta_1) \ddot{\theta}_1 - (l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1^2, \quad (5.4.50)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, \quad (5.4.51)$$

$$\dot{x}_2 = (l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + (l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2, \quad (5.4.52)$$

$$\ddot{x}_2 = (l_1 \cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 - (l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1^2 + (l_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - (l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2^2, \quad (5.4.53)$$

$$y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2, \quad (5.4.54)$$

$$\dot{y}_2 = - (l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 - (l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2, \quad (5.4.55)$$

$$\ddot{y}_2 = - (l_1 \sin \theta_1) \ddot{\theta}_1 - (l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1^2 - (l_2 \sin \theta_2) \ddot{\theta}_2 - (l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2^2, \quad (5.4.56)$$

$$x_3 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3, \quad (5.4.57)$$

$$\dot{x}_3 = (l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + (l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2 + (l_3 \cos \theta_3) \dot{\theta}_3, \quad (5.4.58)$$

$$\ddot{x}_3 = (l_1 \cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 - (l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1^2 + (l_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 +$$

$$+ (l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (l_3 \cos \theta_3) \ddot{\theta}_3 - (l_3 \sin \theta_3) \dot{\theta}_3^2, \quad (5.4.59)$$

$$y_3 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3, \quad (5.4.60)$$

$$\dot{y}_3 = - (l_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 - (l_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2 - (l_3 \sin \theta_3) \dot{\theta}_3, \quad (5.4.61)$$

$$\ddot{y}_3 = - (l_1 \sin \theta_1) \ddot{\theta}_1 - (l_1 \cos \theta_1) \dot{\theta}_1^2 - (l_2 \sin \theta_2) \ddot{\theta}_2 -$$

$$- (l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - (l_3 \sin \theta_3) \ddot{\theta}_3 - (l_3 \cos \theta_3) \dot{\theta}_3^2. \quad (5.4.62)$$

Заметим, что $\dot{p}_7 = m_1 \dot{x}_1$, $\dot{p}_8 = m_1 \dot{y}_1$, $\dot{p}_9 = m_2 \dot{x}_2$, $\dot{p}_{10} = m_2 \dot{y}_2$, $\dot{p}_{11} = m_3 \dot{x}_3$ и $\dot{p}_{12} = m_3 \dot{y}_3$.

Для θ_1 имеем

$$\tau_1(t) = \sum_{i=1}^9 e_i^{(1)}(t) \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \tau_1(t) = & \tau_2(t) - b_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - k_{\tau 2}(\theta_2 - \theta_1) + k_{\tau 1}\theta_1 + b_1\dot{\theta}_1 + \\ & + m_1(\alpha_1 l_1 \cos \theta_1)(l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) + \\ & + m_1(\alpha_1 l_1 \sin \theta_1)(l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + m_2(l_1 \cos \theta_1)(l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + \\ & + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) + m_2(l_1 \sin \theta_1)(l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \\ & + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) + \\ & + m_3(l_1 \cos \theta_1)(l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + \\ & + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + l_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - l_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3) + \\ & + m_3(l_1 \sin \theta_1)(l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \\ & + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + l_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + l_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3), \quad (5.4.63) \end{aligned}$$

где $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ — зависящие от времени моменты сил, действующие в сочленениях 1 и 2, b_1 и b_2 — соответствующие линейные коэффициенты демпфирования, а $k_{\tau 1}$ и $k_{\tau 2}$ — коэффициенты жесткости соответственно.

Для θ_2 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 e_i^{(2)}(t) = 0 \quad \text{и} \\ k_{\tau 2}(\theta_2 - \theta_1) - b_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - \tau_2(t) + \\ + (m_2 \alpha_2 l_2 \cos \theta_2)(l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + \\ + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) + (m_2 \alpha_2 l_2 \sin \theta_2) \times \\ \times (l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) + \\ + m_3 l_2 \cos \theta_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \\ - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + l_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - l_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3) + \\ + m_3 l_2 \sin \theta_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \\ + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + l_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + l_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3) + \\ + \tau_3(t) - k_{\tau 3}(\theta_3 - \theta_2) - b_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) = 0. \quad (5.4.64) \end{aligned}$$

Для θ_3 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 e_i^{(3)}(t) = 0 \quad \text{и} \\ k_{\tau 3}(\theta_3 - \theta_2) + b_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) - \tau_3(t) + (m_3 \alpha_3 l_3 \cos \theta_3) \times \\ \times (l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \\ - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + l_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - l_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3) + \\ + m_3 \alpha_3 l_3 \sin \theta_3 (l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \\ + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + l_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + l_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3) = 0. \quad (5.4.65) \end{aligned}$$

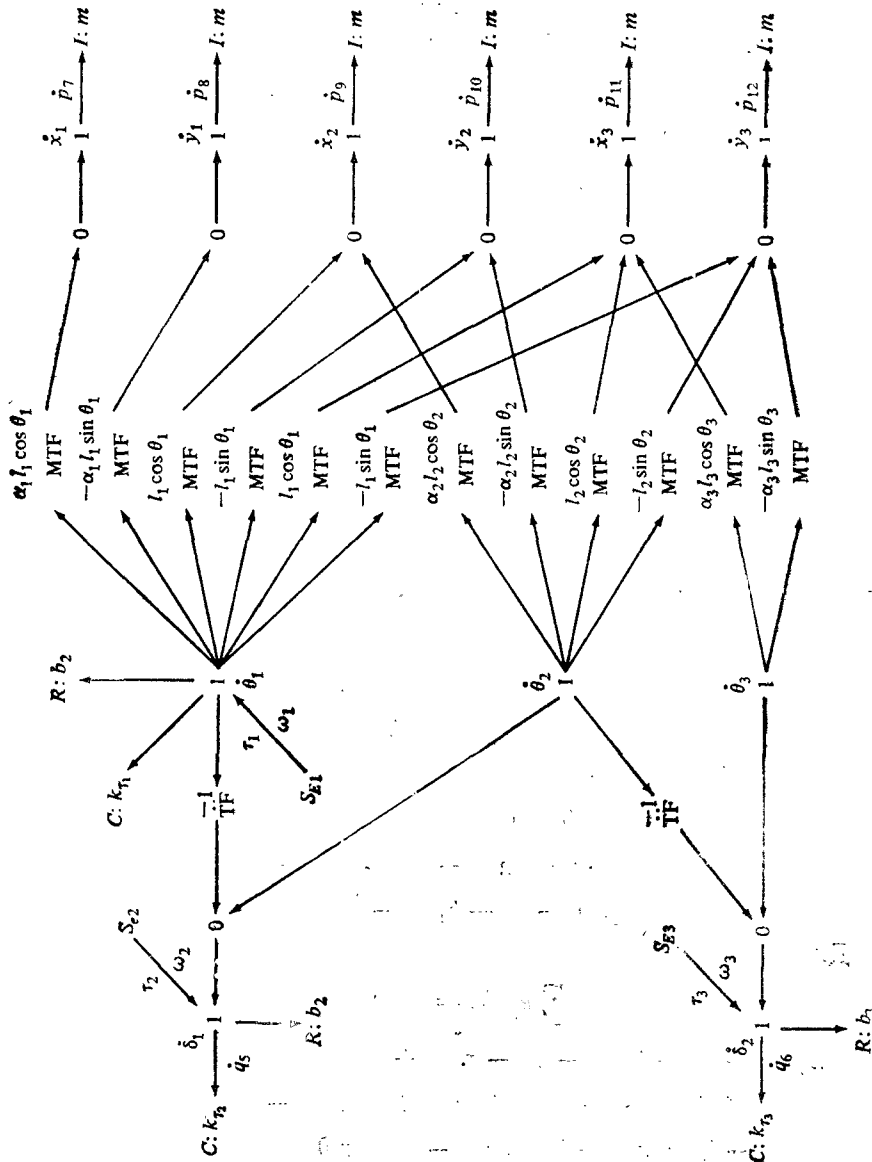


Рис. 5.4.8. Связный граф манипуляционного робота на рис. 5.4.7.

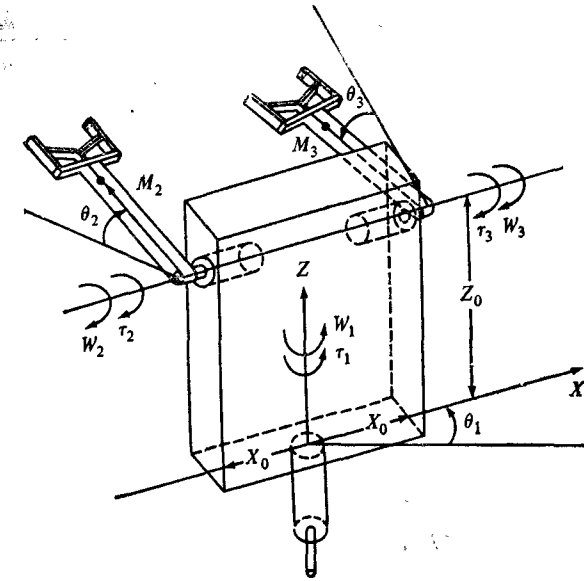


Рис. 5.4.9. Геометрия манипуляционного робота с двумя руками.

Упрощение соотношений (5.4.63), (5.4.64) и (5.4.65) дает

$$\mathbf{I}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \ddot{\theta} + \mathbf{J}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \dot{\theta}^2 + \mathbf{b}\dot{\theta} + \mathbf{k}\theta = \mathbf{T}(t), \quad (5.4.66)$$

где

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} l_1^2 (\alpha_1 m_1 + m_2 + m_3) & l_1 l_2 (m_2 + m_3) \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_3 l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ l_1 l_2 (\alpha_2 m_2 + m_3) \cos(\theta_1 - \theta_2) & (\alpha_2 m_2 + m_3) l_2^2 & m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ \alpha_3 l_3 l_1 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) & \alpha_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) & \alpha_3 l_3^2 m_3 \end{bmatrix}, \quad (5.4.67)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & l_1 l_2 (m_2 + m_3) \sin(\theta_1 - \theta_2) & m_3 l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \\ -l_1 l_2 (\alpha_2 m_2 + m_3) \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 & m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \\ -\alpha_3 m_3 l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) & -m_3 \alpha_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.68)$$

На рис. 5.4.8 показан связный граф, соответствующий рис. 5.4.7.

Пример 5.4.5 ■

Вывести основные уравнения динамики для двурукого робота, показанного на рис. 5.4.9.

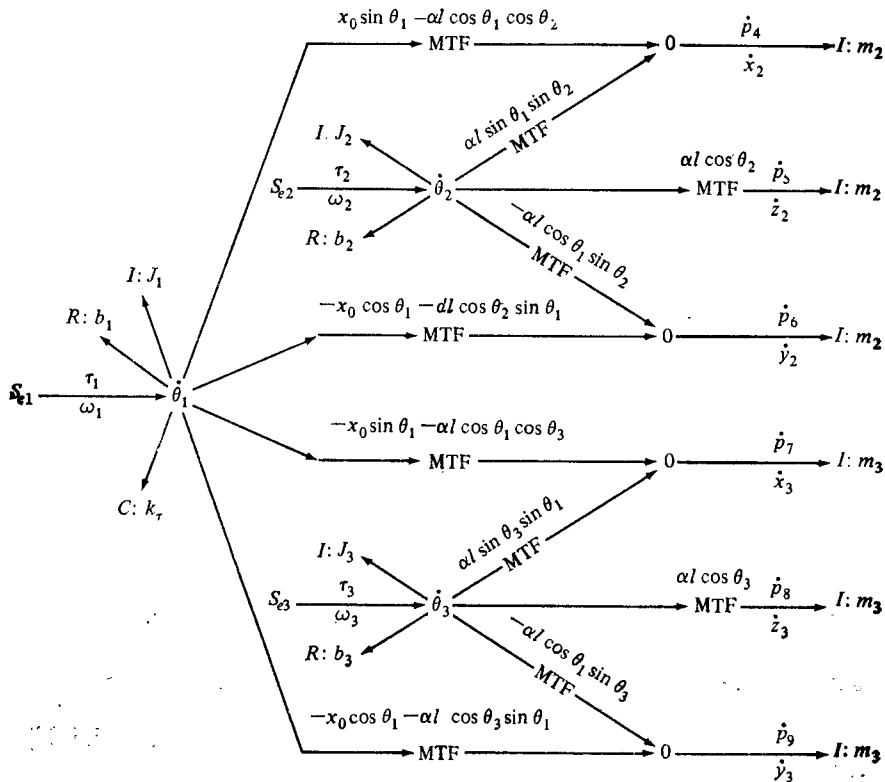


Рис. 5.4.10. Связный граф, соответствующий роботу с двумя руками.

Решение. Как уже говорилось ранее, сначала свяжем линейные и угловые скорости для построения узлов:

$$z_2 = z_0 + al \sin \theta_2, \quad (5.4.69)$$

$$z_3 = z_0 + al \sin \theta_3, \quad (5.4.70)$$

$$x_2 = -x_0 \cos \theta_1 - al \cos \theta_2 \sin \theta_1, \quad (5.4.71)$$

$$x_3 = x_0 \cos \theta_1 - al \cos \theta_3 \sin \theta_1, \quad (5.4.72)$$

$$y_2 = -x_0 \sin \theta_1 + al \cos \theta_2 \cos \theta_1, \quad (5.4.73)$$

$$y_3 = x_0 \sin \theta_1 + al \cos \theta_3 \cos \theta_1, \quad (5.4.74)$$

$$\dot{z}_2 = al \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \quad (5.4.75)$$

$$\dot{z}_3 = al \dot{\theta}_3 \cos \theta_3, \quad (5.4.76)$$

$$\dot{x}_2 = x_0 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + al \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 - al \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_1, \quad (5.4.77)$$

$$\dot{x}_3 = -x_0 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + al \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \sin \theta_1 - al \dot{\theta}_1 \cos \theta_3 \cos \theta_1, \quad (5.4.78)$$

$$\dot{y}_2 = -x_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - al \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 - al \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_1, \quad (5.4.79)$$

$$\dot{y}_3 = x_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - al \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \cos \theta_1 - al \dot{\theta}_1 \cos \theta_3 \sin \theta_1, \quad (5.4.80)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_4 &= m_2 \ddot{x}_2, & \dot{p}_7 &= m_3 \ddot{x}_3, & \dot{p}_5 &= m_2 \ddot{z}_2, \\ \dot{p}_8 &= m_3 \ddot{z}_3, & \dot{p}_6 &= m_2 \ddot{y}_2, & \dot{p}_9 &= m_3 \ddot{y}_3. \end{aligned} \quad (5.4.81)$$

Соответствующий этой задаче граф показан на рис. 5.4.10.

$$\dot{\theta}_1 \Rightarrow T_1 - b_1 \dot{\theta}_1 \frac{d}{dt} (J_1 \dot{\theta}_1) - k_{T1} \theta_1 =$$

$$\begin{aligned} &= (x_0 \sin \theta_1 - al \cos \theta_1 \cos \theta_2) m_2 \ddot{x}_2 - \\ &- (x_0 \cos \theta_1 - al \cos \theta_2 \sin \theta_1) m_2 \ddot{y}_2 - \\ &- (x_0 \sin \theta_1 + al \cos \theta_1 \cos \theta_3) m_3 \ddot{x}_3 + \\ &+ (x_0 \cos \theta_1 - al \cos \theta_3 \sin \theta_1) m_3 \ddot{y}_3, \end{aligned} \quad (5.4.82)$$

$$\dot{\theta}_2 \Rightarrow T_2 - b_2 \dot{\theta}_2 - J_2 \ddot{\theta}_2 - k_{T2} \theta_2 = (al \sin \theta_1 \sin \theta_2) m_2 \ddot{x}_2 + (al \cos \theta_2) m_2 \ddot{z}_2 - (al \cos \theta_1 \sin \theta_2) m_2 \ddot{y}_2, \quad (5.4.83)$$

$$\dot{\theta}_3 \Rightarrow T_3 - b_3 \dot{\theta}_3 - J_3 \ddot{\theta}_3 - k_{T3} \theta_3 = (al \sin \theta_3 \sin \theta_1) m_3 \ddot{x}_3 + (al \cos \theta_3) m_3 \ddot{z}_3 - (al \cos \theta_1 \sin \theta_3) m_3 \ddot{y}_3. \quad (5.4.84)$$

Сделайте подстановку для x_2 , y_2 , z_2 , x_3 , y_3 , а также z_3 как функций θ_i , $\dot{\theta}_i$ и $\ddot{\theta}_i$. ■ ■

5.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА — ЭЙЛЕРА (КРАТКИЙ ОБЗОР)

Здесь мы будем применять метод Лагранжа для неконсервативных систем. Этот метод будем использовать в сочетании с представлением систем координат в разомкнутых кинематических цепях методом Денавита — Хартенберга.

Общий метод получения уравнений с помощью подхода Лагранжа — Эйлера основан на следующем уравнении:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = \tau_i, \quad \text{где} \quad (5.5.1)$$

L — функция Лагранжа ($L = T - V$),
 T — полная кинетическая энергия системы,
 V — полная потенциальная энергия системы,

q_i — обобщенные координаты, т. е. θ_i ,
 τ_i — обобщенные силы и моменты.

Далее мы получим выражения для T , V и L , нужные для вывода основных уравнений динамики роботов.

5.5.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы считаем, что рука робота состоит из жестких звеньев, что позволяет использовать аппарат, применяемый для описания твердого тела. В действительности все манипуляционные роботы построены из гибких элементов. Тем не менее подходы такого рода не включены в книгу в силу их сложности. Здесь мы рассмотрим такие фундаментальные понятия, как обобщенные координаты робота, общие динамические ограничения, скорость и ускорение робота в его обобщенных координатах, законы динамического преобразования в обобщенных координатах робота, скорость и ускорение робота в подвижной системе координат, тензор инерции, уравнение движения Ньютона, уравнения движения Эйлера, функция Лагранжа и уравнения Лагранжа, а также принцип наименьшего действия Гамильтона, который приводит к основным уравнениям динамики робота Лагранжа — Эйлера.

5.5.2. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ МАНИПУЛЯТОРА

Представим руку робота как последовательность жестких звеньев, соединенных между собой последовательностью N призматических или вращательных сочленений. Независимое и свободное движение каждого сочленения может рассматриваться как степень свободы, связанная с независимым вынужденным движением поля перемещений q_m , $m = 1, 2, \dots, N$, манипуляционного робота. С другой стороны, изменение ориентации конечного звена манипулятора может быть описано с помощью изменений в шестимерной системе координат $x_i = [p_x p_y p_z \theta \varphi \psi]$ системы координат конечного звена T_0^n , так что $p = [p_x p_y p_z]^T$ — вектор положения начала системы координат T_0^n , а θ , φ и ψ — эйлеровы углы либо углы вращения, наклона и качания преобразования T_0^n , связывающего n -ю систему координат с базовой системой координат (x_0, y_0, z_0) .

Из материала гл. 4 ясно, что

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) \quad (5.5.2)$$

или наоборот

$$q_m = q_m(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, t), \quad (5.5.3)$$

где t — время. Условием разрешимости (5.5.2) относительно q_m является невырожденность Якобиана преобразования, т. е. определитель должен быть отличен от нуля:

$$|J(x_i, q_m)| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \right| \neq 0. \quad (5.5.4)$$

Это означает, что можно получить единственное решение только при $N = 6$ и при условии, что манипулятор имеет шесть степеней подвижности¹⁾.

5.5.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Динамические ограничения манипуляционного робота в общем случае выражаются следующим образом:

$$\Phi_c(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, t) = 0 \quad (5.5.5)$$

или

$$\Phi_c^*(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0. \quad (5.5.6)$$

5.5.4. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ РОБОТА

В случае манипуляционного робота с N степенями подвижности без ограничений можно поставить в соответствие каждому сочленению прямоугольную декартову систему координат и определить обобщенную декартову координату сочленения $x_i(j)$, относящуюся к j -й системе координат, т. е. к $(j+1)$ -му сочленению. Тогда получаются следующие соотношения:

$$x_{i(j)} = \hat{x}_{i(j)}(q_1, q_2, \dots, q_N, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.5.7)$$

В этом случае скорость определяется как

$$\dot{x}_{i(j)} = \sum_{m=1}^N \frac{\partial x_{i(j)}}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial x_{i(j)}}{\partial t}, \quad (5.5.8)$$

а ускорение — как

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{i(j)} = & \sum_{m=1}^N \left[\frac{\partial x_{i(j)}}{\partial q_m} \right] \ddot{q}_m + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial^2 x_{i(j)}}{\partial q_m \partial q_n} \right] \dot{q}_m \dot{q}_n + \\ & + 2 \sum_{m=1}^N \left[\frac{\partial^2 x_{i(j)}}{\partial q_m \partial t} \right] \dot{q}_m + \frac{\partial^2 x_{i(j)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

¹⁾ Матрица Якоби (5.5.2) представляет собой матрицу размера $6 \times N$, и говорить о якобиане имеет смысл только при условии $N = 6$. Кроме того, якобиан является функцией вектора обобщенных координат и не зависит явно от x_i ; условие (5.5.4) может удовлетворяться лишь при некотором значении этого вектора, и его выполнение позволяет говорить лишь о наличии решения уравнения $\dot{x} = J(q)\dot{q}$ относительно вектора скорости \dot{q} . — Прим. ред.

Пример 5.5.1 ■

Требуется определить компоненты векторов скорости и ускорения начала системы координат схвата манипуляционного робота, работающего в цилиндрической системе координат.

Решение. Для начала системы координат схвата

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad (5.5.10)$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}(y/x). \quad (5.5.11)$$

Компоненты вектора скорости равны

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad (5.5.12)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta, \quad (5.5.13)$$

$$\dot{r} = (\dot{x}x + \dot{y}y)(x^2 + y^2)^{-1/2}, \quad (5.5.14)$$

$$\dot{\theta} = (x\dot{y} - y\dot{x})(x^2 + y^2)^{-1/2}. \quad (5.5.15)$$

Компоненты вектора ускорения равны

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \sin \theta \quad (5.5.16)$$

и

$$\ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta - (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cos \theta. \quad (5.5.17)$$

Радиальные и тангенциальные компоненты скорости \mathbf{v} и ускорения \mathbf{a} соответственно выражаются как

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z, \quad (5.5.18)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z, \quad (5.5.19)$$

где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_z — единичные векторы радиального, тангенциального и осевого направлений соответственно. ■ ■

Пример 5.5.2. ■

Требуется определить компоненты векторов скорости и ускорения начала системы координат схвата сферического манипуляционного робота (см. рис. 5.4.3).

Решение. Начало системы координат схвата находится в точке

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad (5.5.20)$$

$$\theta = \operatorname{arccctg}\left(\frac{z}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\right), \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x), \quad (5.5.21)$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (5.5.22)$$

Декартовы и сферические компоненты вектора скорости равны соответственно

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi, \quad (5.5.23)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi, \quad (5.5.24)$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad (5.5.25)$$

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}, \quad (5.5.26)$$

$$\dot{\theta} = \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})z - \dot{z}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)}. \quad (5.5.27)$$

Декартовы и сферические компоненты вектора ускорения равны соответственно

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2) \sin \theta \cos \varphi + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta \cos \varphi - \\ & - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \sin \theta \sin \varphi - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (5.5.28)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2) \sin \theta \sin \varphi + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta \sin \varphi + \\ & + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \sin \theta \cos \varphi + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi, \end{aligned} \quad (5.5.29)$$

$$\ddot{z} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \sin \theta, \quad (5.5.30)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} = & (x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2 + z\ddot{z} + \dot{z}^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - \\ & - (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, \end{aligned} \quad (5.5.31)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & [(x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2)z - \dot{z}(x\dot{x} + y\dot{y}) - \dot{z}(x^2 + y^2)] \times \\ & \times (x^2 + y^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} + [(x\dot{x} + y\dot{y})z - \dot{z}(x^2 + y^2)] \times \\ & \times [-(x\dot{x} + y\dot{y})(x^2 + y^2)^{-3/2}(x^2 + y^2 + z^2)] - \\ & - 2(x^2 + y^2)^{-1/2}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}), \end{aligned} \quad (5.5.32)$$

$$\ddot{\varphi} = (x\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(x^2 + y^2)^{-1} - 2(x\dot{x} + y\dot{y})(x^2 + y^2)^{-3/2}(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (5.5.33)$$

Радиальная и тангенциальные компоненты скорости и ускорения соответственно выражаются как

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + (r \sin \theta) \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (5.5.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta + \\ & + [(r \sin \varphi) \ddot{\varphi} + (2\dot{r} \sin \theta) \dot{\varphi} + (2r \cos \theta) \dot{\theta} \dot{\varphi}] \mathbf{e}_\varphi. \quad \blacksquare \blacksquare \end{aligned} \quad (5.5.35)$$

5.5. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ В ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Поскольку системы координат, связанные с сочленениями манипуляционных роботов, движутся относительно друг друга, то было бы полезно найти векторы относительной скорости и ускорения в таких системах. Более того, можно вывести соотношения для момента количества движения и кинетической энергии как в неподвижной, или инерциальной (ньютоновой),

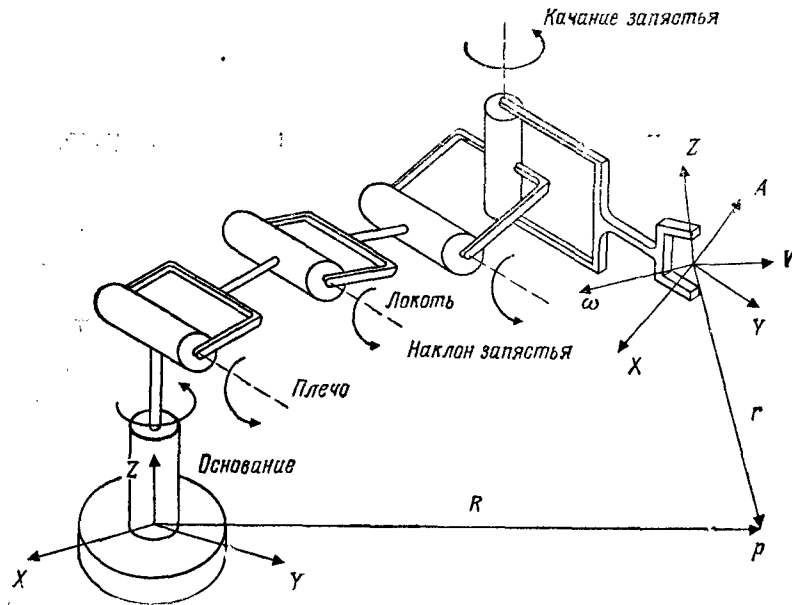


Рис. 5.5.1. Подвижные системы координат робота для представления скорости и ускорения.

системе координат, так и в неинерциальной, движущейся, системе координат. Пусть, согласно рис. 5.5.1, $OXYZ$ является ньютоновой системой координат, а $oxyz$ — движущейся и вращающейся системой координат, привязанной к некоторой точке манипуляционного робота. Следовательно, $\mathbf{r}(xyz)$ и $\mathbf{r}(XYZ)$ являются векторами положения материальной точки p относительно $oxyz$ и $OXYZ$ соответственно, \mathbf{v} — скорость начала движущейся системы координат o , а — ускорение начала движущейся системы координат o и $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость системы координат $oxyz$ (все это относительно базовой системы координат $OXYZ$). Пусть индексы (xyz) и (XYZ) означают принадлеж-

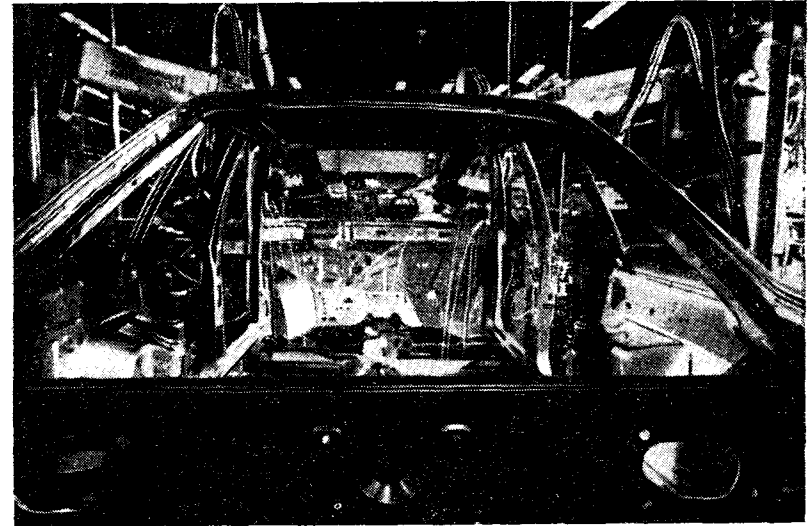


Рис. 5.5.2. Линия сборки автомобилей.

ность соответственно к системам координат $oxyz$ и $OXYZ$. Тогда ускорение $\mathbf{a}_{(XYZ)}$ выражается как

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{(XYZ)} = \mathbf{a}_{(XYZ)} = \mathbf{A} + \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{(xyz)} + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{(xyz)} \times \mathbf{r}_{(xyz)} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{(xyz)} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(xyz)}). \quad (5.5.36)$$

Заметим, что

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(xyz)}) = \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{(xyz)}) - \mathbf{r}_{(xyz)} \omega^2 \quad (5.5.37)$$

и $(d\boldsymbol{\omega}/dt)_{(XYZ)} = (d\boldsymbol{\omega}/dt)_{(xyz)}$ в силу того, что $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$. Пусть теперь $\mathbf{h}_{(xyz)}$ и $\mathbf{h}_{(XYZ)}$ являются векторами момента количества движения звена соответственно в системах координат $oxyz$ и $OXYZ$, \mathbf{R} — вектор положения начала системы координат $oxyz$ относительно системы $OXYZ$, \mathbf{r}_c — вектор положения центра масс звена робота в системе $oxyz$, а m — масса звена. Тогда легко установить, что

$$\mathbf{h}_{(XYZ)} = \mathbf{h}_{(xyz)} + \mathbf{R} \times m\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times m\dot{\mathbf{r}}_c + \mathbf{r}_c \times m\dot{\mathbf{R}}, \quad (5.5.38)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_{(XYZ)} = \dot{\mathbf{h}}_{(xyz)} + \mathbf{R} \times m\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times m\ddot{\mathbf{r}}_c + \mathbf{r}_c \times m\ddot{\mathbf{R}}. \quad (5.5.39)$$

Аналогично кинетические энергии $T_{(xyz)}$ и $T_{(XYZ)}$ связаны с помощью следующего соотношения:

$$T_{(XYZ)} = T_{(xyz)} + \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_c). \quad (5.5.40)$$

5.5.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАСС РОБОТА И ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ

У манипуляционного робота, который может свободно перемещаться в трехмерном пространстве, число возможных осей вращения конечно. Чтобы выразить основные уравнения динамики относительно некоторой оси вращения, необходимо знать распределение масс робота относительно этой оси. Для описания таких распределений масс при вращении используется тензор инерции.

Тензор инерции $^A I$ относительно системы координат A робота — это такая матрица 3×3 , что

$$^A I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (5.5.41)$$

где для робота с дискретным распределением масс

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^N m_i (z_i^2 + y_i^2), \quad (5.5.42)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad (5.5.43)$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (5.5.44)$$

$$I_{xy} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i, \quad (5.5.45)$$

$$I_{xz} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i, \quad (5.5.46)$$

$$I_{yz} = - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i, \quad (5.5.47)$$

а для робота с непрерывным распределением масс

$$I_{xx} = \iiint \rho (z^2 + y^2) dx dy dz, \quad (5.5.48)$$

$$I_{yy} = \iiint \rho (x^2 + z^2) dx dy dz, \quad (5.5.49)$$

$$I_{zz} = \iiint \rho (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad (5.5.50)$$

$$I_{xy} = - \iiint \rho xy dx dy dz, \quad (5.5.51)$$

$$I_{xz} = - \iiint \rho xz dx dy dz, \quad (5.5.52)$$

$$I_{yz} = - \iiint \rho yz dx dy dz, \quad (5.5.53)$$

где ρ — плотность звена манипулятора, а интеграл берется по объему в той системе координат, начало которой либо совпадает с центром масс звена робота, либо привязано к звену.

Пример 5.5.3 ■

Найти момент инерции звена квадратного сечения робота как в системе координат $oxyz$, связанной с концом звена (рис. 5.5.3), так и в системе координат центра масс $ox_c y_c z_c$.

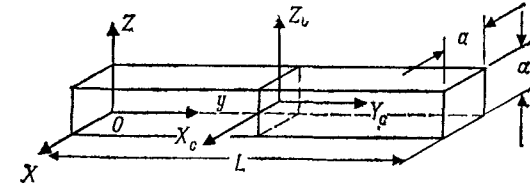


Рис. 5.5.3. Звено робота с квадратным поперечным сечением.

Решение. В данном случае выражения (5.5.48)–(5.5.53) упрощаются до следующих интегралов (сначала в системе координат xyz , а затем в системе координат $x_c y_c z_c$):

$$I_{xx} = \int_0^a \int_0^L \int_0^a (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = \quad (5.5.54)$$

$$= \int_0^a \int_0^L \rho (y^2 + z^2) a dy dz = \int_0^a \left(\frac{1}{3} L^3 + z^2 L \right) \rho dz \quad (5.5.55) \quad (5.5.56)$$

или окончательно

$$I_{xx} = \rho \left(\frac{a^2 L^3}{3} + \frac{a^4 L}{3} \right) = \frac{m}{3} (L^2 + a^2). \quad (5.5.57)$$

Аналогично

$$I_{zz} = \frac{m}{3} (L^2 + a^2), \quad (5.5.58)$$

$$I_{yy} = \frac{m}{3} (a^2 + a^2) = \frac{2ma^2}{3}. \quad (5.5.59)$$

Теперь

$$I_{xy} = - \int_0^a \int_0^L \int_0^a xy \rho dx dy dz = \quad (5.5.60)$$

$$= - \int_0^a \int_0^L \frac{a^2}{3} y dy dz = - \int_0^a \frac{a^2 L^2}{4} \rho dz \quad (5.5.61)$$

или окончательно

$$I_{xy} = -\frac{m}{4} aL. \quad (5.5.62)$$

Аналогично

$$-I_{xz} = \frac{m}{4} a^2 \quad \text{и} \quad -I_{yz} = \frac{m}{4} aL. \quad (5.5.63)$$

Таким образом, тензор инерции в системе координат xyz принимает вид

$$A\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{m}{2}(L^2 + a^2) & -\frac{m}{4}aL & -\frac{m}{4}a^2 \\ -\frac{m}{4}aL & \frac{2m}{3}a^2 & -\frac{m}{4}aL \\ -\frac{m}{4}a^2 & -\frac{m}{4}aL & \frac{m}{3}(L^2 + a^2) \end{bmatrix}. \quad (5.5.64)$$

Чтобы теперь найти тензор инерции в системе координат центра масс $o_c x_c y_c z_c$, нужно всего лишь взять повторно предыдущие интегралы (5.5.54)–(5.5.63) с другими пределами, что дает

$$C I_{xx} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \rho \, dx \, dy \, dz = \dots \quad (5.5.65)$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-L/2}^{L/2} \rho (y^2 + z^2) a \, dy \, dz = \dots \quad (5.5.66)$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{L^3}{12} + z^2 L \right) a \rho \, dz \quad (5.5.67)$$

или окончательно

$$C I_{xx} = \varphi \left(\frac{a^2 L^3}{12} + \frac{a^4 L}{12} \right) = \frac{m}{12} (L^2 + a^2). \quad (5.5.68)$$

Аналогично

$$C I_{zz} = \frac{m}{12} (L^2 + a^2) \quad \text{и} \quad C I_{yy} = \frac{ma^2}{6}. \quad (5.5.69)$$

Таким образом,

$$C I_{xy} = 0, \quad C I_{xz} = 0, \quad C I_{yz} = 0, \quad (5.5.70)$$

$$C\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(a^2 + L^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(L^2 + a^2) \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (5.5.71)$$

Теорема о параллельных осях. Сравнение матричных уравнений (5.5.64) и (5.5.71) ясно показывает, что

$$A I_{zz} = C I_{zz} + m(x_c^2 + y_c^2), \quad (5.5.72)$$

$$A I_{xy} = C I_{xy} + m x_c y_c, \quad (5.5.73)$$

$$A I_{yy} = C I_{yy} + m(x_c^2 + z_c^2), \quad (5.5.74)$$

$$A I_{xx} = C I_{xx} + m(y_c^2 + z_c^2), \quad (5.5.75)$$

$$A I_{xz} = C I_{xz} + m x_c z_c, \quad (5.5.76)$$

$$A I_{yz} = C I_{yz} + m y_c z_c. \quad (5.5.77)$$

Это знакомые выражения для теоремы о параллельных осях для моментов, входящих в тензор инерции $A\mathbf{I}$ или $C\mathbf{I}$.

5.5.7. УРАВНЕНИЕ НЬЮТОНА

Если рассматривать руку робота как последовательность твердых звеньев, связанных сочленениями, то очевидно, что для каждого звена можно определить центр масс. Далее можно также определить тензор инерции I_{ij} . Чтобы заставить звенья двигаться, нужно приложить силы и моменты сил. Согласно уравнению движения Ньютона, сила \mathbf{F} и ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ тела связаны друг с другом посредством общей массы тела, так что

$$\mathbf{F} = M\dot{\mathbf{v}}, \quad (5.5.78)$$

где M — общая масса тела. Обычно в системах с дискретным распределением массы тела M заменяется матрицей \mathbf{M} , которая называется матрицей массы тела.

5.5.8. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Может возникнуть задача описать вращательное движение и ускорение твердых тел. В таком случае можно показать, что если $\boldsymbol{\tau}$ — это момент, а $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, то

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \quad (5.5.79)$$

где $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ — угловое ускорение, а \mathbf{I} — тензор инерции тела относительно его центра масс. Это означает, что \mathbf{I} вычисляется в системе координат тела, начало которого совпадает с центром масс рассматриваемого тела.

Пример 5.5.4 ■

Распространить уравнения движения Эйлера для звена манипулятора на случай, когда оно вращается так же, как система координат $oxyz$, связанная с ним.

Решение. Рассматривая уравнение (5.5.79), обратите внимание на то, что

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}. \quad (5.5.80)$$

Теперь

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} = \quad (5.5.81)$$

$$= \mathbf{e}_x (\omega_y a_z - \omega_z a_y) - \mathbf{e}_y (\omega_x a_z - \omega_z a_x) + \mathbf{e}_z (\omega_x a_y - \omega_y a_x). \quad (5.5.82)$$

Таким образом, основные уравнения движения (5.5.79) приводятся к следующему виду:

$$\tau_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy}) + I_{xy} (\omega_z \omega_x - \dot{\omega}_y) - I_{xz} (\dot{\omega}_z + \omega_y \omega_x) - I_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2), \quad (5.5.83)$$

$$\tau_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_{xx} - I_{zz}) + I_{yz} (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) - I_{xy} (\dot{\omega}_x + \omega_z \omega_y) - I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2), \quad (5.5.84)$$

$$\tau_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz} (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) - I_{yz} (\dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) - I_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2), \quad (5.5.85)$$

где $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \omega_y \omega_z]^T$ — вектор скорости вращения системы координат $oxyz$; он связан с эйлеровыми углами φ , θ и ψ следующими уравнениями:

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \quad (5.5.86)$$

$$\omega_y = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \quad (5.5.87)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (5.5.88)$$

5.5.9. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА И УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Функция Лагранжа L определяется как разность между кинетической и потенциальной энергией динамической системы, т. е.

$$L = T - V, \quad (5.5.89)$$

где T — кинетическая энергия и V — потенциальная энергия. Если обобщенные координаты обозначить через q_i , то становится ясно, что

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (5.5.90)$$

Принцип Гамильтона наименьшего действия. Для динамической системы вариация функции действия, определяемой как

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (5.5.91)$$

равна работе, совершаемой внешними силами. Кроме того, движение консервативной системы, начинающееся в момент времени t_1 и заканчивающееся в момент t_2 , таково, что I достигает экстремума на траектории движения.

Уравнения Лагранжа. Основываясь на принципе Гамильтона, можно показать, что основные уравнения движения динамической системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i, \quad (5.5.92)$$

где F_i — компонента вектора неконсервативных обобщенных сил; это означает, что он не является производной потенциального поля.

Обобщенный импульс динамической системы определяется как

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; \quad (5.5.93)$$

из уравнения (5.5.92) вытекает, что

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} + F_i. \quad (5.5.94)$$

Гамильтониан определяется как

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L. \quad (5.5.95)$$

Канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (5.5.96)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (5.5.97)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.5.98)$$

5.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА — ЭЙЛЕРА

В разд. 5.5 были кратко рассмотрены динамические уравнения Лагранжа — Эйлера. Здесь мы применим эти уравнения к динамике манипуляционных роботов, считая их неконсервативными системами. При выводе соответствующих уравнений будем использовать преобразования координат роботов методом Денавита — Хартенберга.

Запишем уравнения Лагранжа — Эйлера:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = \tau_i, \quad \text{где} \quad (5.6.1)$$

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V \equiv \text{лагранжиан}, \quad (5.6.2)$$

$$T \equiv T(q_i, \dot{q}_i, t) \equiv \text{полная кинетическая энергия системы}, \quad (5.6.3)$$

$$V \equiv V(q_i, t) \equiv \text{полная потенциальная энергия системы}, \quad (5.6.4)$$

$$q_i \equiv \text{обобщенные координаты, т. е. } \theta_i, \quad (5.6.5)$$

$$\tau_i \equiv \text{обобщенные силы или моменты}. \quad (5.6.6)$$

Чтобы познакомиться с этими уравнениями, решим типовую задачу.

Пример 5.6.1 ■

Получите основные уравнения динамики для n -звенного маятника, показанного на рис. 5.6.1, и упростите ваши результаты для простого плоского двухзвенного маятника.

Решение. Поскольку неконсервативных сил здесь нет, а гравитационные силы выводятся из условия потенциальности полей, то из уравнений Лагранжа — Эйлера (5.6.1) получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6.7)$$

Пусть $q_i = \theta_i$ — обобщенные координаты. Тогда положение i -го звена описывается с помощью формул

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^i l_{\alpha} \sin \theta_{\alpha}, \quad (5.6.8)$$

$$y_i = \sum_{\alpha=1}^i l_{\alpha} \cos \theta_{\alpha}. \quad (5.6.9)$$

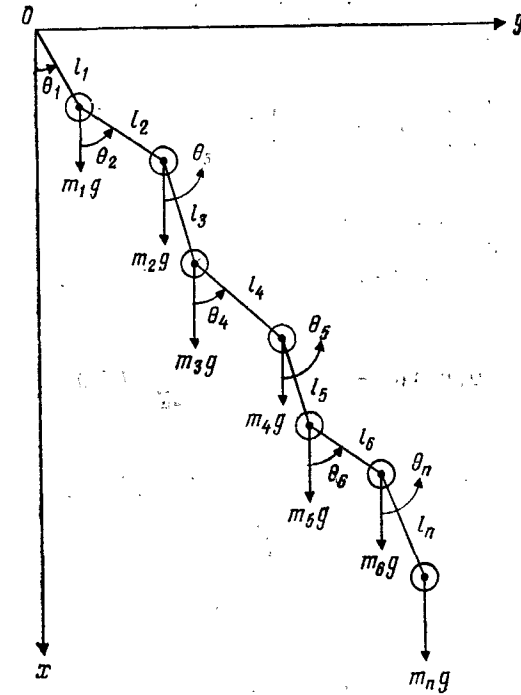


Рис. 5.6.1. n -звенный маятник.

Затем по определению

$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^i l_{\alpha} \dot{\theta}_{\alpha} \cos \theta_{\alpha}, \quad (5.6.10)$$

$$\dot{y}_i = \sum_{\alpha=1}^i -l_{\alpha} \dot{\theta}_{\alpha} \sin \theta_{\alpha}; \quad (5.6.11)$$

квадраты \dot{x}_i и \dot{y}_i находятся как

$$\dot{x}_i^2 = \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i l_{\alpha} l_{\beta} \dot{\theta}_{\alpha} \dot{\theta}_{\beta} \cos \theta_{\alpha} \cos \theta_{\beta}, \quad (5.6.12)$$

$$\dot{y}_i^2 = \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i l_{\alpha} l_{\beta} \dot{\theta}_{\alpha} \dot{\theta}_{\beta} \sin \theta_{\alpha} \sin \theta_{\beta}. \quad (5.6.13)$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2), \quad (5.6.14)$$

что после подстановки \dot{x}_i^2 и \dot{y}_i^2 из формул (5.6.12) и (5.6.13) приводит к

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{\alpha=1}^i l_\alpha^2 \dot{\theta}_\alpha^2 + \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i l_\alpha l_\beta \dot{\theta}_\alpha \dot{\theta}_\beta \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta) \right). \quad (5.6.15)$$

Заметим, что поскольку выражение под знаком двойной суммы является полностью симметричной функцией θ_α и θ_β , то каждый член при суммировании будет повторяться. Это означает, что

$$\sum_{\alpha=1}^i \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^i l_\alpha l_\beta \dot{\theta}_\alpha \dot{\theta}_\beta \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta) = 2 \sum_{\alpha=1}^{i-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^i l_\alpha l_\beta \dot{\theta}_\alpha \dot{\theta}_\beta \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta) \quad (5.6.16)$$

и, таким образом, выражение для T будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^i m_i l_\alpha^2 \dot{\theta}_\alpha^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{i-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^i m_i l_\alpha l_\beta \dot{\theta}_\alpha \dot{\theta}_\beta \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta) \right). \quad (5.6.17)$$

Чтобы определить теперь потенциальную энергию, предлагается за начальное положение принять положение равновесия ($P=0$); это означает, что если первый маятник имеет отклонение $\theta_1 \neq 0$, то все остальные маятники остаются вертикальными. Таким образом, потенциальная энергия системы равна

$$V = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=\alpha}^n m_i g l_\alpha (1 - \cos \theta_\alpha). \quad (5.6.18)$$

Теперь уравнение (5.6.7) можно преобразовать, заметив, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^i 2m_i l_\alpha^2 \dot{\theta}_\alpha \ddot{\theta}_\alpha \delta_{\alpha i} + \right. \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{i-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^i [m_i l_\alpha l_\beta (\ddot{\theta}_\alpha \dot{\theta}_\beta \delta_{\alpha i} - \dot{\theta}_\alpha \ddot{\theta}_\beta \delta_{\beta i}) \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta) - \\ &\left. - m_i l_\alpha l_\beta \dot{\theta}_\alpha \dot{\theta}_\beta (\dot{\theta}_\alpha \delta_{\alpha i} - \dot{\theta}_\beta \delta_{\beta i}) \sin(\theta_\alpha - \theta_\beta) \right], \quad (5.6.19) \end{aligned}$$

где $\delta_{\alpha i}$ и $\delta_{\beta i}$ — символы Кронекера, т. е. $\delta_{\alpha i} = 1$ при $\alpha = i$ и $\delta_{\alpha i} = 0$ при $\alpha \neq i$. Кроме того,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} = - \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{i-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^i m_i l_\alpha l_\beta \dot{\theta}_\alpha \dot{\theta}_\beta (\delta_{\alpha i} - \delta_{\beta i}) \sin(\theta_\alpha - \theta_\beta), \quad (5.6.20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_i} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=\alpha}^n m_i g l_\alpha \delta_{\alpha i} \sin \theta_\alpha. \quad (5.6.21)$$

Теперь упростим уравнения для двухзвенного маятника. При $n=2$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - \\ &- m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad (5.6.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - \\ &- m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (5.6.23) \end{aligned}$$

Уравнения (5.6.20) и (5.6.21) теперь принимают вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad (5.6.24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad (5.6.25)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = m_2 g l_2 \sin \theta_2, \quad (5.6.26)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = (m_1 + m_2) g l \sin \theta_1. \quad (5.6.27)$$

Окончательно уравнения Лагранжа — Эйлера для двухзвенного маятника записываются как

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + \\ + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l \sin \theta_1 = 0, \quad (5.6.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \\ + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0. \quad (5.6.29) \end{aligned}$$

В следующем разделе мы получим выражения для полной кинетической энергии T , полной потенциальной энергии V и функции Лагранжа L для n -степенного манипуляционного робота общего вида.

5.6.1. СКОРОСТЬ СОЧЛЕНЕНИЙ

Пусть r_0^i — вектор положения точки P по отношению к системе координат i (движущейся вместе с ней) определен в базовых координатах (x_0, y_0, z_0) . Согласно рис. 5.6.2, точка, соот-

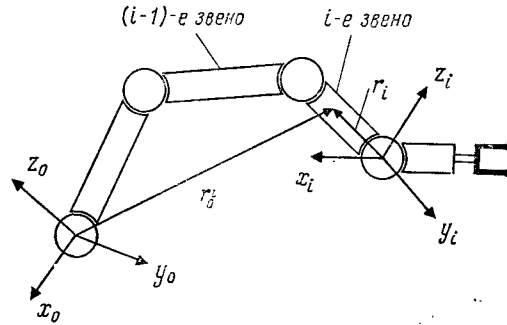


Рис. 5.6.2. Геометрия плоского манипулятора.

ветствующая r_0^i , имеет фиксированные координаты в i -й системе, так что точка P , как и другие точки, принадлежащие звену i и определенные в системе координат i , будет иметь ну-

$$r_0^i = A_0^i r_i, r_{i-1}^i = A_{i-1}^i r_i$$

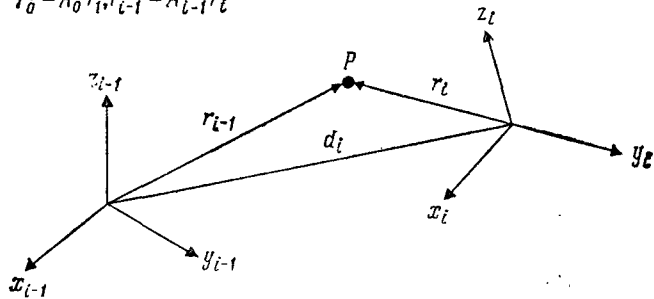


Рис. 5.6.3. Векторное представление координат сочленений.

левую скорость относительно системы координат i . Заметим, что система координат i неинерциальная. Ясно, что скорость точки P в неподвижной, или инерциальной, или базовой системе координат (рис. 5.6.3) может задаваться как

$$v_i = \frac{d}{dt} (r_0^i). \quad (5.6.30)$$

Вспомним, что если A_{i-1}^i — преобразование Денавита — Хартенберга, то

$$A_0^i = A_0^1 A_1^2 \dots A_{i-1}^i, \quad (5.6.31)$$

$$r_0^i = A_0^i r_i \text{ и } r_{i-1}^i = A_{i-1}^i r_i. \quad (5.6.32)$$

Таким образом,

$$v_0^i = v_i = \frac{d}{dt} (A_0^i r_i) = \sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} \right) r_i, \quad (5.6.33)$$

где q_j — независимые переменные, т. е. θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Таким образом,

$$v_0^i = \sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6.34)$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial A_{i-1}^i}{\partial q_j} = Q_i A_{i-1}^i, \quad (5.6.35)$$

где Q_i — постоянная матрица. Например, для A_{i-1}^i имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{i-1}^i}{\partial \theta_i} &= \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & -\cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & -a_i \sin \theta_i \\ \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \theta_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6.36)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial A_{i-1}^i}{\partial \theta_i} = Q_i A_{i-1}^i, \quad \text{где} \quad (5.6.37)$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6.38)$$

Аналогично можно показать, что для призматического сочленения

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6.39)$$

В общем случае

$$\frac{\partial A_0^i}{\partial q_j} = \begin{cases} A_0^i A_1^2 \dots A_{j-2}^{i-1} Q_j A_{j-1}^{i-1} A_j^{i+1} \dots A_{i-1}^i, & \text{для } j \leq i, \\ 0, & \text{для } j > i, i = 1, 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (5.6.40)$$

$$\blacksquare \blacksquare (5.6.41)$$

Пример 5.6.2 ■

Требуется доказать, что выражения (5.6.40) и (5.6.41) справедливы.

Решение. Заметим, что $A_0^i = A_0^i A_1^2 \dots A_{j-1}^{i-1} \dots A_{i-1}^i$. Единственной матрицей, зависящей от q_j , является A_{j-1}^i , и, следовательно, при $j \leq i$ имеем

$$\frac{\partial A_0^i}{\partial q_j} = A_0^i A_1^2 \dots A_{j-2}^{i-1} \frac{\partial A_{j-1}^{i-1}}{\partial q_j} A_j^{i+1} \dots A_{i-1}^i. \quad (5.6.42)$$

Теперь известно, что $\partial A_{j-1}^i / \partial q_j = Q_j A_{j-1}^{i-1}$ и, таким образом, доказательство завершено. Ясно, что при $j > i$ зависимости от q_j нет и $\partial A_0^i / \partial q_j = 0$ при $j > i$. Что и требовалось доказать. ■ ■

Для удобства определим величину D_{ij} как

$$D_{ij} = \frac{\partial A_0^i}{\partial q_j} = \begin{cases} A_0^i A_1^2 \dots A_{j-1}^{i-1} Q_j A_{j-1}^{i-1}, & j \leq i, \\ 0, & j > i. \end{cases} \quad (5.6.43)$$

$$(5.6.44)$$

Аналогичным образом определяются производные A_0^i более высокого порядка, т. е.

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} = D_{ijk} = \begin{cases} A_0^i A_1^2 \dots A_{j-1}^{i-1} Q_j A_{j-1}^{i-1} Q_k A_{k-1}^{i-1}, & i \geq k \geq j, \\ A_0^i A_1^2 \dots A_{k-1}^{i-1} Q_k A_{k-1}^{i-1} Q_j A_{j-1}^{i-1}, & i \geq j \geq k, \\ 0, & i < j \text{ или } i < k. \end{cases} \quad (5.6.45)$$

$$(5.6.46)$$

$$(5.6.47)$$

Для вывода основных уравнений динамики манипуляционных роботов используем метод Лагранжа — Эйлера, т. е. для

неконсервативных систем общего вида будем пользоваться уравнением (5.6.1). Таким образом, нужно вычислить функцию Лагранжа $L = T - V$, где T — кинетическая энергия, а V — потенциальная энергия манипулятора. Доказательство уравнения (5.6.1) можно провести, обратившись к любому руководству по динамике Лагранжа.

5.6.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ Т МАНИПУЛЯТОРА

Кинетическая энергия dT тела массы dm равна

$$dT = \sum_{i=1}^n dT_i, \quad \text{где} \quad (5.6.48)$$

dT_i — кинетическая энергия тела массы dm_i i -го звена манипулятора, которая выражается следующим образом:

$$dT_i = \frac{1}{2} \text{Tr} (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) dm_i. \quad (5.6.49)$$

$$\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T = \begin{bmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ v_{3i} \\ 0 \end{bmatrix} [v_{1i} \ v_{2i} \ v_{3i} \ 0] = \begin{bmatrix} v_{1i}^2 & v_{1i} v_{2i} & v_{1i} v_{3i} & 0 \\ v_{2i} v_{1i} & v_{2i}^2 & v_{2i} v_{3i} & 0 \\ v_{3i} v_{1i} & v_{3i} v_{2i} & v_{3i}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.6.50)$$

$$\text{Tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n A_{ii}. \quad (5.6.51)$$

Таким образом, опираясь на уравнения (5.6.35) и (5.6.43), получаем

$$dT_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i D_{ip} \dot{q}_p \mathbf{r}_i \left(\sum_{r=1}^i D_{ir} \dot{q}_r \mathbf{r}_i \right)^T \right] dm_i \quad (5.6.52)$$

или окончательно

$$dT_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i D_{ip} (\mathbf{r}_i dm_i \mathbf{r}_i^T) D_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right). \quad (5.6.53)$$

Интегрирование дает

$$T_i = \int dT_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i D_{ip} \left(\int \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T dm_i \right) D_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right]. \quad (5.6.54)$$

Интегральный член в скобках является не чем иным, как матрицей инерции звена i относительно начала системы координат сочленения i ,

$$\mathbf{J}_i = \int \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T dm_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm_i & \int x_i y_i dm_i & \int x_i z_i dm_i & \int x_i dm_i \\ \int x_i y_i dm_i & \int y_i^2 dm_i & \int y_i z_i dm_i & \int y_i dm_i \\ \int z_i x_i dm_i & \int y_i z_i dm_i & \int z_i^2 dm_i & \int z_i dm_i \\ \int x_i dm_i & \int y_i dm_i & \int z_i dm_i & \int dm_i \end{bmatrix}. \quad (5.6.55)$$

Выражая \mathbf{J}_i через тензор инерции \mathbf{I} ,

$$I_{ij} = \mathbf{I} = \begin{cases} \int \left[\delta_{ij} \left(\sum_k x_k^2 \right) - x_i x_j \right] dm, & i = j, \\ \int x_i x_j dm, & i \neq j, \end{cases}$$

получаем

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})/2 & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})/2 & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})/2 & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix}, \quad (5.6.56)$$

где \bar{x}_i , \bar{y}_i и \bar{z}_i — координаты центра масс звена i в i -й системе координат. Таким образом, полная кинетическая энергия манипулятора равна

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i [\text{Tr}(D_{ip} J_i D_{ip}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r]. \quad (5.6.57)$$

5.6.3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ V МАНИПУЛЯТОРА

Полная потенциальная энергия, связанная с весом манипуляционного робота, по-прежнему определяется как сумма всех потенциальных энергий отдельных звеньев. Следовательно,

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n [-m_i \mathbf{g} \cdot (\mathbf{A}_0^i \bar{\mathbf{r}}_i)], \quad (5.6.58)$$

где $\bar{\mathbf{r}}_i$ — вектор положения центра масс i -го звена, выраженный в i -й системе координат, а \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения.

5.6.4. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА $L = T - V$

Из формул (5.6.57) и (5.6.58) получаем

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{p=1}^i [\text{Tr}(D_{ij} J_i D_{ip}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r] + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g} \cdot (\mathbf{A}_0^i \bar{\mathbf{r}}_i), \quad (5.6.59)$$

Вспомните, что мы пытаемся вывести уравнения динамики с помощью уравнений Лагранжа — Эйлера, т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6.60)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{p=1}^i [\text{Tr}(D_{ij} J_i D_{ip}^T) (\dot{q}_p \delta_{jk} + \dot{q}_j \delta_{kp})] = \\ &= \sum_{i=k}^n \sum_{p=1}^i \text{Tr}[D_{ip} J_i D_{ik}^T] \dot{q}_p, \end{aligned} \quad (5.6.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \sum_{i=k}^n \sum_{p=1}^i \text{Tr}(D_{ip} J_i D_{ik}^T) \ddot{q}_p + \\ &+ \sum_{i=k}^n \sum_{p=1}^i \sum_{m=1}^i \text{Tr}(D_{ipm} J_i D_{ik}^T) \dot{q}_p \dot{q}_m + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{m=1}^i \text{Tr}(D_{ikm} J_i D_{ip}^T) \dot{q}_p \dot{q}_m. \end{aligned} \quad (5.6.62)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_k} &= \frac{1}{2} \sum_{i=k}^n \sum_{j=1}^i \sum_{p=1}^i \text{Tr}(D_{ijk} J_i D_{ip}^T) \dot{q}_j \dot{q}_p + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=k}^n \sum_{j=1}^i \sum_{p=1}^i \text{Tr}(D_{ipk} J_i D_{ij}^T) \dot{q}_j \dot{q}_p + \sum_{i=p}^n m_i \mathbf{g} \cdot D_{ik} \bar{\mathbf{r}}_i. \end{aligned} \quad (5.6.63)$$

Следовательно, уравнение (5.6.60) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \tau_k = & \sum_{i=k}^n \sum_{p=1}^i \text{Tr}(D_{ip} J_i D_{ik}^T) \ddot{q}_k + \sum_{i=k}^n \sum_{p=1}^i \sum_{m=1}^i \text{Tr}(D_{ipm} J_i D_{ik}^T) \dot{q}_p \dot{q}_m + \\ & + \sum_{l=p}^n \sum_{p=1}^i \sum_{m=1}^i \text{Tr}(D_{ikm} J_l D_{ip}^T) \dot{q}_p \dot{q}_m - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=k}^n \sum_{j=1}^i \sum_{p=1}^i \text{Tr}(D_{ijk} J_l D_{ip}^T) \dot{q}_i \dot{q}_p - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=k}^n \sum_{j=1}^i \sum_{p=1}^i \text{Tr}(D_{ipk} J_l D_{ij}^T) \dot{q}_i \dot{q}_p - \sum_{i=k}^n m_i \mathbf{g} \cdot D_{ik} \bar{\mathbf{r}}_i. \end{aligned} \quad (5.6.64)$$

Заметим, что это уравнение можем упростить с помощью следующих определений. Пусть

$$U_{ijk} = \text{Tr}(D_{jk} J_j D_{ji}^T) = \text{Tr}(D_{kj} J_k D_{ki}^T) = U_{ikj}; \quad (5.6.65)$$

тогда уравнение (5.6.64) принимает вид

$$\tau_i = \sum_{k=1}^n M_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n M_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + M_i, \quad (5.6.66)$$

где M_i , M_{ik} и M_{ikm} — обобщенные матрицы масс, такие, что

$$M_i = \sum_{j=1}^n (-m_j \mathbf{g} \cdot D_{ji} \bar{\mathbf{r}}_j), \quad (5.6.67)$$

$$M_{ik} = \sum_{j=\max(i, k)}^n \text{Tr}(D_{jk} J_j D_{ji}^T), \quad (5.6.68)$$

$$M_{ikm} = \sum_{j=\max(i, k, m)}^n \text{Tr}(D_{jkm} J_j D_{ji}^T), \quad (5.6.69)$$

где

$$\mathbf{g} = [g_x \quad g_y \quad g_z \quad 0]. \quad (5.6.70)$$

Уравнение (5.6.66) в литературе по робототехнике также дается в более компактной векторной форме:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}). \quad (5.6.71)$$

Вычисления, связанные с этими уравнениями, чрезвычайно громоздки и могут включать примерно 66 394 умножений и 51 456 сложений для шестистепенного робота.

Следует заметить, что уравнения Ньютона — Эйлера гораздо эффективнее уравнений Лагранжа — Эйлера, когда используются цифровые вычисления. Например, для n -степенного робота уравнения Ньютона — Эйлера требуют

$$126n - 99 \text{ умножений и } 106n - 92 \text{ сложений,}$$

тогда как уравнения Лагранжа — Эйлера требуют

$$32n^4 + 86n^3 + 171n^2 + 53n - 128 \text{ умножений}$$

и

$$25n^4 + 66n^3 + 129n^2 + 42n - 96 \text{ сложений.}$$

Для типичного робота ($n=6$) время вычислений при использовании уравнений Лагранжа — Эйлера на два порядка больше, чем при использовании уравнений Ньютона — Эйлера.

5.6.5. ДИНАМИКА ДВУЗВЕННОГО РОБОТА С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ

Рассмотрим двухзвенную руку робота, в которой массы сосредоточены в середине каждого звена, как показано на рис. 5.6.4.

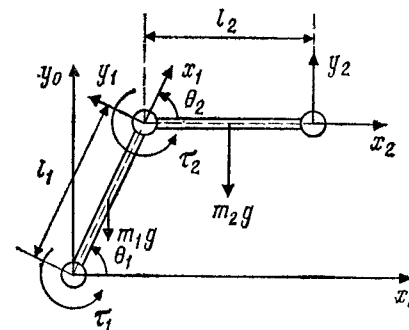


Рис. 5.6.4. Геометрия двухзвенного робота с распределенной массой.

Из основных уравнений (5.6.66) получаем

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n M_{1km} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m \\ \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n M_{2km} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}. \quad (5.6.72)$$

Запишем в развернутой форме

$$M_{11} = \text{Tr}(\mathbf{D}_{11}\mathbf{J}_1\mathbf{D}_{11}^T) + \text{Tr}(\mathbf{D}_{21}\mathbf{J}_2\mathbf{D}_{21}^T), \quad (5.6.73)$$

$$M_{12} = M_{21} = \text{Tr}(\mathbf{D}_{22}\mathbf{J}_2\mathbf{D}_{21}^T), \quad (5.6.74)$$

$$M_{22} = \text{Tr}(\mathbf{D}_{22}\mathbf{J}_2\mathbf{D}_{22}^T), \quad (5.6.75)$$

$$M_1 = m_1\mathbf{g} \cdot \mathbf{D}_{11}\bar{\mathbf{r}}_1 + m_1\mathbf{g} \cdot \mathbf{D}_{21}\bar{\mathbf{r}}_2, \quad (5.6.76)$$

$$M_2 = m_2\mathbf{g} \cdot \mathbf{D}_{22}\bar{\mathbf{r}}_2. \quad (5.6.77)$$

Обратите внимание, что для этой двузвенной системы $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $d_1 = d_2 = 0$ и $a_1 = a_2 = 1$. Следовательно, матрицы Денавита — Хартенберга принимают вид

$$\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & lC_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & lS_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.6.78)$$

так что

$$\mathbf{A}_0^2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l(S_{12} + S_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6.79)$$

Поскольку оба сочленения вращательные, из формулы (5.6.43) получаем

$$\mathbf{D}_{11} = \mathbf{A}_0^0\mathbf{Q}_1\mathbf{A}_0^1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6.80)$$

или

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6.81)$$

Кроме того, $\mathbf{D}_{21} = \mathbf{A}_0^0\mathbf{Q}_1\mathbf{A}_0^2 = \mathbf{Q}_1\mathbf{A}_0^2$, так что

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l(S_{12} + S_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6.82)$$

или

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l(S_{12} + S_1) \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6.83)$$

Теперь $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{A}_0^1\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1^2$, такая, что

$$\mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6.84)$$

Окончательно

$$\mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6.85)$$

Из формулы (5.6.56) получаем

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_1 l_1^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_1 l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_2 l_2^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} m_2 l_2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_2, \quad (5.6.86)$$

Теперь

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{11} \mathbf{J}_1 \mathbf{D}_{11}^T &= \\
 &= \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_1 l_1^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_1 l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^T = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} m_1 S_1 l_1^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_1 S_1 l_1 \\ -\frac{1}{6} m_1 C_1 l_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} m_1 C_1 l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 & \hspace{15em} (5.6.87)
 \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{11} \mathbf{J}_1 \mathbf{D}_{11}^T &= \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} m_1 S_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_1 S_1 l_1^2 & \frac{1}{6} m_1 S_1 C_1 l_1 - \frac{1}{2} m_1 S_1 C_1 l_1^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} m_1 C_1 S_1 l_1^2 - \frac{1}{2} m_1 C_1 S_1 l_1^2 & -\frac{1}{6} m_1 C_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_1 C_1^2 l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
 & \hspace{15em} (5.6.88)
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{Tr}(\mathbf{D}_{11} \mathbf{J}_1 \mathbf{D}_{11}^T)^T = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 S_1^2 + \frac{1}{3} m_1 l_1^2 C_1^2 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2. \quad (5.6.89)$$

Теперь

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{D}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{D}_{21}^T)^T &= \\
 &= \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l(S_{12} + S_1) \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_2 l_2^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_2 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} m_2 l_2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_{21}^T =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} m_2 l_2^2 S_{12} + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 S_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_1 S_{12} l_2 - m_2 S_1 l_2 \\ -\frac{1}{6} m_2 l_2^2 C_{12} - \frac{1}{2} m_2 l_2^2 C_1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} m_2 C_{12} l_2 + m_2 C_1 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{D}_{21}^T, \\
 & \hspace{15em} (5.6.90)
 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{D}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{D}_{21}^T)^T =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} m_2 l_2^2 S_{12}^2 - \frac{1}{2} m_2 l_2^2 S_1 & S_{12} + \frac{1}{2} m_2 S_{12} l_2^2 (S_{12} + S_1) + m_2 l_2^2 S_1 (S_{12} + S_1) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} m_2 l_2^2 C_{12}^2 & -\frac{1}{2} m_2 l_2^2 C_1 C_{12} + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 C_{12} (C_{12} + C_1) + m_2 C_1 l_2^2 (C_{12} + C_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 & \hspace{15em} (5.6.91)
 \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\mathbf{D}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{D}_{21}^T)^T &= -m_2 l_2^2 \left(\frac{1}{6} S_{12} + \frac{1}{2} S_1 \right) S_{12} + m_2 l_2^2 \left(\frac{1}{2} S_{12} + S_1 \right) (S_{12} + S_1) - \\
 & \quad - m_2 l_2^2 \left(\frac{1}{6} C_{12} + \frac{1}{2} C_1 \right) C_{12} + m_2 l_2^2 \left(\frac{1}{2} C_{12} + C_1 \right) (C_{12} + C_1) = \\
 & \quad = m_2 l_2^2 \left(\frac{4}{3} + C_2 \right). \quad (5.6.92)
 \end{aligned}$$

Следовательно, из формулы (5.6.73) имеем

$$M_{11} = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{4}{3} m_2 l_2^2 + m_2 C_2 l_2^2. \quad (5.6.93)$$

Теперь мы хотим явно выразить $M_{12} = M_{21} = \text{Tr}(D_{22}J_2D_{21}^T)$. Заметим, что в этом случае

$$D_{22}J_2D_{21}^T = \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_2l^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_2l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_2l & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} = D_{21}^T \quad (5.6.94)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}m_2l^2S_{12} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_2lS_{12} \\ -\frac{1}{6}m_2l^2C_{12} & 0 & 0 & \frac{1}{2}m_2lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{12} & C_{12} & 0 & 0 \\ -C_{12} & -S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l(S_{12}+S_1) & l(C_{12}+C_1) & 0 & 0 \end{bmatrix} = \quad (5.6.95)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}m_2l^2S_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2S_{12}(S_{12}+S_1) & \frac{1}{6}m_2lS_{12}^2C_{12} - \frac{1}{2}m_2lS_{12}^2(C_{12}+C_1) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6}m_2l^2C_{12}S_{12} - \frac{1}{2}m_2l^2C_{12}(S_{12}+S_1) & -\frac{1}{6}m_2l^2C_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2C_{12}(C_{12}+C_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6.96)$$

Глава 5

Динамика манипуляционных роботов

Следовательно, $M_{12} = M_{21} = \text{Tr}(D_{22}J_2D_{21}^T)$ принимает вид

$$M_{12} = M_{21} = \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2C_2. \quad (5.6.97)$$

Для того чтобы найти $M_{22} = \text{Tr}(D_{22}J_2D_{22}^T)$, заметим, что

$$D_{22}J_2D_{22}^T = \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_2l^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_2l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_2l & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} = D_{22}^T \quad (5.6.98)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}m_2l^2S_{12} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_2lS_{12} \\ -\frac{1}{6}m_2l^2C_{12} & 0 & 0 & \frac{1}{2}m_2lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{12} & C_{12} & 0 & 0 \\ -C_{12} & -S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -lS_{12} & lC_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \quad (5.6.99)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}m_2l^2S_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2S_{12}^2 & \frac{1}{6}m_2l^2S_{12}C_{12} - \frac{1}{2}m_2l^2S_{12}C_{12} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6}m_2l^2S_{12}C_{12} - \frac{1}{2}m_2l^2C_{12}S_{12} & -\frac{1}{6}m_2l^2C_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2C_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6.100)$$

Следовательно,

$$M_{22} = \text{Tr}(D_{22}J_2D_{22}^T) = \frac{1}{3}m_2l^2S_{12}^2 + \frac{1}{3}m_2l^2C_{12}^2 = \frac{1}{3}m_2l^2. \quad (5.6.101)$$

Для того чтобы найти члены, относящиеся к кориолисовым и центробежным ускорениям, нужно вычислить члены типа M_{111} , M_{112} , M_{211} , M_{212} , M_{221} и M_{222} , как это следует из формул (5.6.45), (5.6.46), (5.6.69) и (5.6.72). Обратите внимание, что

$$M_{ikm} = \sum_{j=\max(i, k, m)}^n \text{Tr}(D_{jkm}J_jD_{ji}^T). \quad (5.6.102)$$

Таким образом,

$$M_{111} = \text{Tr}(D_{111}J_1D_{11}^T) + \text{Tr}(D_{211}J_2D_{21}^T) = 0, \quad (5.6.103)$$

$$M_{112} = \text{Tr}(D_{212}J_2D_{21}^T) = \frac{1}{2} m_2 S_2 l^2 = M_{121} = (D_{121}J_2D_{21}^T), \quad (5.6.104)$$

$$M_{211} = \text{Tr}(D_{211}J_2D_{22}^T) = \frac{1}{2} m_2 S_2 l^2, \quad (5.6.105)$$

$$M_{212} = \text{Tr}(D_{212}J_2D_{22}^T) = 0, \quad (5.6.106)$$

$$M_{221} = \text{Tr}(D_{221}J_2D_{22}^T) = 0, \quad (5.6.107)$$

$$M_{222} = \text{Tr}(D_{222}J_2D_{22}^T) = 0, \quad (5.6.108)$$

$$M_{122} = \frac{1}{2} m_2 S_2 l^2. \quad (5.6.109)$$

Теперь нужно найти гравитационный член M_i из формулы (5.6.67). Обратите внимание, что

$$M_1 = -m_1 \mathbf{g} \cdot D_{11} \bar{\mathbf{r}}_1 - m_2 \mathbf{g} \cdot D_{21} \bar{\mathbf{r}}_2 = \quad (5.6.110)$$

$$= -m_1 (0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} -$$

$$-m_2 (0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l(S_{12} + S_1) \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (5.6.111)$$

$$M_1 = -\frac{1}{2} m_1 g l C_1 - \frac{1}{2} m_2 g l C_{12} - m_2 g l C_1. \quad (5.6.112)$$

Аналогично

$$M_2 = -m_2 \mathbf{g} \cdot D_{22} \bar{\mathbf{r}}_2 = -\frac{1}{2} m_2 g l C_{12}. \quad (5.6.113)$$

Окончательно основные уравнения принимают вид

$$\tau_1 = \left[\frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{4}{3} m_2 l^2 + m_2 C_2 l^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[\frac{1}{3} m_2 l^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 C_2 \right] \ddot{\theta}_2 -$$

$$- \frac{1}{2} m_2 S_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 S_2 l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_1 g l C_1 - \frac{1}{2} m_2 g l C_{12} - m_2 g l C_1, \quad (5.6.114)$$

$$\tau_2 = \left[\frac{1}{3} m_2 l^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 C_2 \right] \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 S_2 l^2 \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l C_{12}. \quad (5.6.115)$$

5.6.6. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ШЕСТИСТЕПЕННОГО МАНИПУЛЯЦИОННОГО РОБОТА ОБЩЕГО ВИДА

Уравнение (5.6.64) может быть записано в матричной форме с использованием формулы (5.6.66), как что

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}). \quad (5.6.116)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — вектор 6×1 , $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ — матрица 6×6 , \mathbf{H} — вектор 6×1 , включающий все кориолисовы и центробежные члены, и \mathbf{G} — вектор 6×1 гравитации. (См. рис. 5.6.5.) Для шестистепенного робота предыдущие уравнения имеют вид

$$\tau_1 = M_{11} \ddot{\theta}_1 + M_{12} \ddot{\theta}_2 + M_{13} \ddot{\theta}_3 + M_{14} \ddot{\theta}_4 + M_{15} \ddot{\theta}_5 + M_{16} \ddot{\theta}_6 + M_{111} \dot{\theta}_1^2 +$$

$$+ M_{122} \dot{\theta}_2^2 + M_{133} \dot{\theta}_3^2 + M_{144} \dot{\theta}_4^2 + M_{155} \dot{\theta}_5^2 + M_{166} \dot{\theta}_6^2 + M_{112} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 +$$

$$+ M_{113} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + M_{114} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + M_{115} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + M_{116} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 + M_{123} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 +$$

$$+ M_{124} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + M_{125} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + M_{126} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 + M_{134} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + M_{135} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 +$$

$$+ M_{136} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 + M_{145} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + M_{146} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 + M_{156} \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 + G_1, \quad (5.6.117)$$

$$\tau_2 = M_{12} \ddot{\theta}_1 + M_{22} \ddot{\theta}_2 + M_{23} \ddot{\theta}_3 + M_{24} \ddot{\theta}_4 + M_{25} \ddot{\theta}_5 + M_{26} \ddot{\theta}_6 + M_{211} \dot{\theta}_1^2 +$$

$$+ M_{222} \dot{\theta}_2^2 + M_{233} \dot{\theta}_3^2 + M_{244} \dot{\theta}_4^2 + M_{255} \dot{\theta}_5^2 + M_{266} \dot{\theta}_6^2 + M_{212} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 +$$

$$+ M_{213} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + M_{214} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + M_{215} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + M_{216} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 + M_{223} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 +$$

$$+ M_{224} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + M_{225} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + M_{226} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 + M_{234} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + M_{235} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 +$$

$$+ M_{236} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 + M_{245} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + M_{246} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 + M_{256} \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 + G_2, \quad (5.6.118)$$

$$\tau_3 = M_{13} \ddot{\theta}_1 + M_{23} \ddot{\theta}_2 + M_{33} \ddot{\theta}_3 + M_{34} \ddot{\theta}_4 + M_{35} \ddot{\theta}_5 + M_{36} \ddot{\theta}_6 + M_{322} \dot{\theta}_2^2 +$$

$$+ M_{333} \dot{\theta}_3^2 + M_{344} \dot{\theta}_4^2 + M_{355} \dot{\theta}_5^2 + M_{366} \dot{\theta}_6^2 + M_{312} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 +$$

$$+ M_{313} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + M_{314} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + M_{315} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + M_{316} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 + M_{323} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 +$$

$$+ M_{324} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + M_{325} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + M_{326} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 + M_{345} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + M_{346} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 +$$

$$+ M_{356} \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 + G_3, \quad (5.6.119)$$

$$\tau_4 = M_{14} \ddot{\theta}_1 + M_{24} \ddot{\theta}_2 + M_{34} \ddot{\theta}_3 + M_{44} \ddot{\theta}_4 + M_{54} \ddot{\theta}_5 + M_{64} \ddot{\theta}_6 + M_{411} \dot{\theta}_1^2 +$$

$$+ M_{422} \dot{\theta}_2^2 + M_{433} \dot{\theta}_3^2 + M_{444} \dot{\theta}_4^2 + M_{455} \dot{\theta}_5^2 + M_{466} \dot{\theta}_6^2 + M_{412} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 +$$

$$+ M_{413} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + M_{414} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + M_{415} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + M_{416} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 + M_{123} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 +$$

$$+ M_{424} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + M_{425} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + M_{426} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 + M_{434} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + M_{435} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 +$$

$$+ M_{436} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 + M_{445} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + M_{446} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 + M_{456} \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 + G_4, \quad (5.6.120)$$

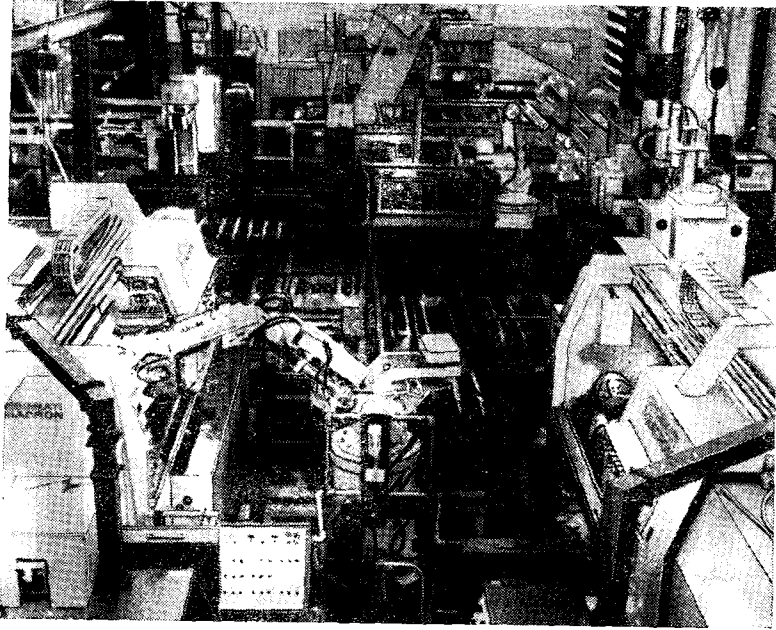


Рис. 5.6.5. Производственный модуль с большим количеством оборудования.

$$\begin{aligned} \tau_5 = & M_{15}\ddot{\theta}_1 + M_{25}\ddot{\theta}_2 + M_{35}\ddot{\theta}_3 + M_{45}\ddot{\theta}_4 + M_{55}\ddot{\theta}_5 + M_{65}\ddot{\theta}_6 + M_{511}\dot{\theta}_1^2 + \\ & + M_{522}\dot{\theta}_2^2 + M_{533}\dot{\theta}_3^2 + M_{544}\dot{\theta}_4^2 + M_{555}\dot{\theta}_5^2 + M_{566}\dot{\theta}_6^2 + M_{512}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \\ & + M_{513}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + M_{514}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + M_{515}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + M_{516}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_6 + M_{523}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \\ & + M_{524}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4 + M_{525}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + M_{526}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_6 + M_{534}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 + M_{535}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5 + \\ & + M_{536}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_6 + M_{545}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + M_{546}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6 + M_{556}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6 + G_5, \quad (5.6.121) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_6 = & M_{16}\ddot{\theta}_1 + M_{26}\ddot{\theta}_2 + M_{36}\ddot{\theta}_3 + M_{46}\ddot{\theta}_4 + M_{56}\ddot{\theta}_5 + M_{66}\ddot{\theta}_6 + M_{611}\dot{\theta}_1^2 + \\ & + M_{622}\dot{\theta}_2^2 + M_{633}\dot{\theta}_3^2 + M_{644}\dot{\theta}_4^2 + M_{655}\dot{\theta}_5^2 + M_{666}\dot{\theta}_6^2 + M_{612}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \\ & + M_{613}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + M_{614}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + M_{615}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + M_{616}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_6 + M_{623}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \\ & + M_{624}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4 + M_{625}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + M_{626}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_6 + M_{634}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 + M_{635}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5 + \\ & + M_{636}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_6 + M_{645}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + M_{646}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6 + M_{656}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6 + G_6. \quad (5.6.122) \end{aligned}$$

Заметим, что в предыдущих уравнениях

$$\sum_{k=\max(i, j)}^n \text{Tr}(\mathbf{D}_{kj}\mathbf{J}_k\mathbf{D}_{ki}^T) = \mathbf{M}_{ij}, \quad (5.6.123)$$

$$\sum_{m=\max(i, i', k)}^n \text{Tr}(\mathbf{D}_{mj}\mathbf{J}_m\mathbf{D}_{mi}^T) = \mathbf{M}_{lk,m}. \quad (5.6.124)$$

5.7. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ РОБОТОВ НЬЮТОНА — ЭЙЛЕРА

Теперь воспользуемся уравнениями динамики роботов Ньютона — Эйлера для вычисления обобщенных сил (моментов), необходимых для получения заданной траектории манипуляционного робота. Сначала будем считать, что известны положение, скорость и ускорение каждого сочленения, т. е. θ , $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$, и что мы хотим вычислить моменты в сочленениях, требуемые для осуществления такого движения. Как отмечалось выше, рекурсивное представление динамики и является решением этой задачи. Однако прежде, чем перейти к изложению, запишем уравнения, относящиеся к силам и моментам, действующим на звено робота. Они имеют вид:

$$\mathbf{f}_i = m_i \mathbf{v}_c(i) \quad (5.7.1)$$

и

$$\boldsymbol{\tau}_i = {}^C\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times ({}^C\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i), \quad (5.7.2)$$

где $\mathbf{v}_c(i)$ — скорость центра масс i -го звена, а ${}^C\mathbf{I}_i$ — момент инерции i -го звена относительно его центра масс в системе координат \mathbf{C} , начало которой лежит в центре масс i -го звена. Здесь \mathbf{f}_i и $\boldsymbol{\tau}_i$ являются д'аламберовы силой и парой сил i -го звена и могут быть получены с помощью уравнений баланса для сил и пар сил, приложенных к i -му звену (рис. 5.7.1), следующего вида

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{i-1, i} + \mathbf{f}_{i+1, i} + m_i \mathbf{g}, \quad (5.7.3)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_{i-1, i} - \boldsymbol{\tau}_{i, i+1} + (\mathbf{p}_{i-1} - \mathbf{F}_i) \times \mathbf{f}_{i-1, i} - (\mathbf{p}_i - \mathbf{F}_i) \times \mathbf{f}_{i, i+1}, \quad (5.7.4)$$

где $\mathbf{f}_{i, i}$ и $\boldsymbol{\tau}_{i, i}$ являются соответственно силой и парой сил, приложенных к i -му звену посредством соседнего j -го звена.

Теперь снова рассмотрим две системы координат робота $oxyz$ и $o^*x^*y^*z^*$, как показано на рис. 5.7.2. Пусть точка p

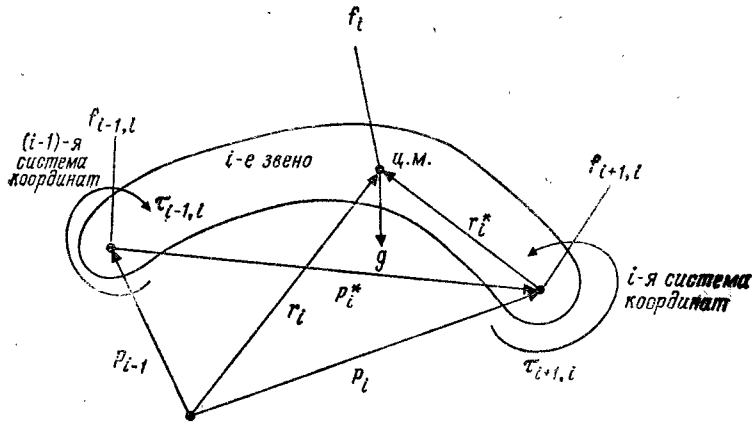


Рис. 5.7.1. Силы и моменты, приложенные к i -му звену.

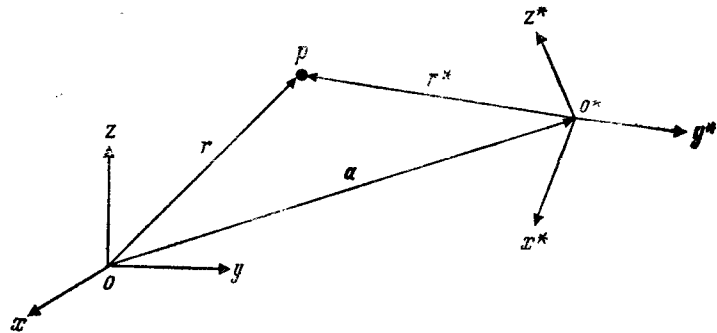


Рис. 5.7.2. Подвижные системы координат для манипуляционного робота.

описывается вектором \mathbf{r} в системе xyz и \mathbf{r}^* в системе $x^*y^*z^*$. Начала координат o и o^* разделены вектором \mathbf{a} в системе xyz . Тогда становится ясно, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \mathbf{a} \text{ и } \mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \mathbf{a}, \quad (5.7.5)$$

где $\mathbf{r} \equiv [x, y, z]^T$, $\mathbf{r}^* \equiv [x^*y^*z^*]^T$ и $\mathbf{a} \equiv [a_x a_y a_z]^T$. Если начало координат o^* движется относительно o , которое мы принимаем за неподвижное, то

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}_a, \quad (5.7.6)$$

где \mathbf{v} и \mathbf{v}^* — скорости точки p относительно систем координат xyz и $x^*y^*z^*$ соответственно. Однако если система координат

$x^*y^*z^*$ перемещается и вращается относительно системы xyz , то

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (5.7.7)$$

где $d^*\mathbf{r}/dt$ — производная по времени, взятая в системе координат $x^*y^*z^*$, а $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости системы координат $x^*y^*z^*$ (рис. 5.7.3).

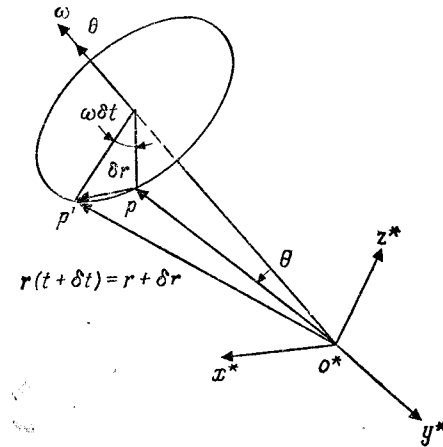


Рис. 5.7.3. Вращающаяся система координат.

Заметим, что $d^*\mathbf{r}/dt$ — скорость изменения \mathbf{r} , измеряемая наблюдателем, находящимся в начале системы координат $x^*y^*z^*$, т. е. o^* . Из уравнения (5.7.7) можно заметить, что

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^*\mathbf{r}}{dt} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} = \quad (5.7.8)$$

$$= \frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}. \quad (5.7.9)$$

Окончательно

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}. \quad (5.7.10)$$

Заметим, что

$\frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} \equiv$ составляющая ускорения, измеряемая наблюдателем, находящимся в начале системы координат $x^*y^*z^*$;

$2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} \equiv$ ускорение Кориолиса;

$\omega \times (\omega \times r) \equiv$ центростремительное ускорение;

$\frac{d\omega}{dt} \times r \equiv$ тангенциальное ускорение.

Если теперь $x^*y^*z^*$ — инерциальная система, т. е. ее начало координат o^* имеет постоянную скорость относительно системы xyz , которая считается неподвижной, то имеем

$$m \frac{d^{*2}r}{dt^2} = f - m\omega \times (\omega \times r) - 2m\omega \frac{dr}{dt} - m \frac{d\omega}{dt} \times r, \quad (5.7.11)$$

где m — масса, связанная с точкой p , и f — результирующий вектор всех внешних сил, приложенных к телу массой m , центр которой лежит в p .

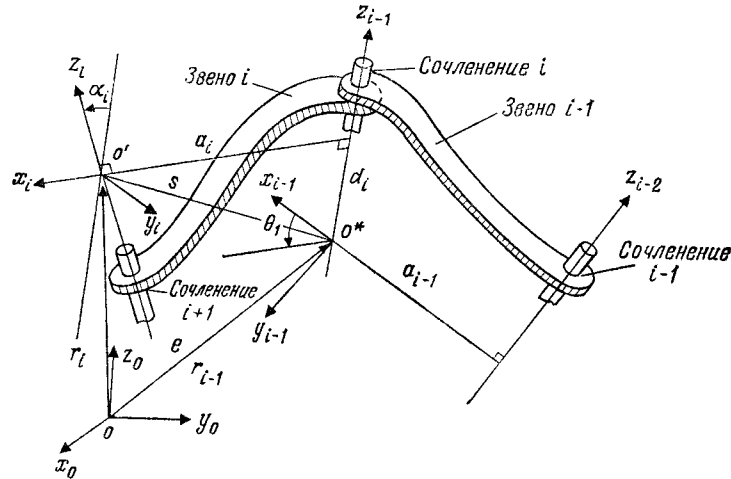


Рис. 5.7.4. Общий случай для смежных звеньев манипуляторов.

Если начало координат системы $x^*y^*z^*$ движется со скоростью da/dt относительно xyz , где a — вектор, соединяющий o и o^* (рис. 5.7.2), то

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^*r}{dt} + \omega \times r^* + \frac{da}{dt} \quad (5.7.12)$$

и, кроме того,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^{*2}r^*}{dt^2} + \omega \times (\omega \times r^*) + 2\omega \times \frac{d^*r^*}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r^* + \frac{d^2a}{dt^2}. \quad (5.7.13)$$

Рассмотрим теперь следующую общую ситуацию, показанную на рис. 5.7.4. Вспомним, что ортонормированная система координат $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ расположена в сочленении i и (x_0, y_0, z_0)

(y_0, z_0) является базовой системой координат. Обозначим через r_i вектор положения начала координат o' системы (x_i, y_i, z_i) относительно базовой системы координат, а через r_{i-1} — вектор положения начала координат o^* системы $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ относительно базовой системы координат. Обозначим через s вектор, соединяющий o^* с o' . Заметим, что

$$r_{i-1} + s = r_i. \quad (5.7.14)$$

Пусть v_{i-1} и ω_{i-1} — соответственно линейная и угловая скорости системы координат $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ относительно базовой системы координат (x_0, y_0, z_0) . Линейная скорость v_i системы координат (x_i, y_i, z_i) относительно базовой системы координат равна

$$v_i = \frac{d^*s}{dt} + \omega_{i-1} \times s + v_{i-1}, \quad \text{где} \quad (5.7.15)$$

$d^*()/dt$ означает производную по времени относительно движущейся/вращающейся системы координат $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ и

$$\dot{v}_i = \frac{d^{*2}s}{dt^2} + \dot{\omega}_{i-1} \times s + 2\omega_{i-1} \times \frac{d^*s}{dt} + \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times s) + \dot{v}_{i-1}. \quad (5.7.16)$$

Пусть ω_i и ω_s — угловые скорости (x_i, y_i, z_i) относительно (x_0, y_0, z_0) и $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ соответственно. Тогда

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_s, \quad (5.7.17)$$

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \dot{\omega}_s. \quad (5.7.18)$$

Обратите внимание, что

$$\dot{\omega}_s = \frac{d^*\omega_s}{dt} + \omega_{i-1} \times \omega_s \quad (5.7.19)$$

и, следовательно,

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \frac{d^*\omega_s}{dt} + \omega_{i-1} \times \omega_s. \quad (5.7.20)$$

Легко заметить, что угловая скорость системы (x_i, y_i, z_i) относительно системы $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$, т. е. ω_s , является такой же, как и угловая скорость звена i вокруг оси z_{i-1} . Тогда

$$\omega_s = \begin{cases} z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ 0, & \text{если звено } i \text{ поступательное,} \end{cases} \quad (5.7.21)$$

где \dot{q}_i — обобщенная скорость i -го сочленения либо величина скорости i -го звена относительно системы координат $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$, которая является ортонормальной.

Таким образом,

$$\frac{d^* \omega_s}{dt} = \begin{cases} z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ 0, & \text{если звено } i \text{ поступательное.} \end{cases} \quad (5.7.23)$$

Из формул (5.7.17), (5.7.19), (5.7.21), (5.7.22), (5.7.23) и (5.7.24) находим, что

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ \omega_{i-1}, & \text{если звено } i \text{ поступательное,} \end{cases} \quad (5.7.25)$$

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + z_{i-1} \ddot{q}_i + \omega_{i-1} \times (z_{i-1} \dot{q}_i), & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ \dot{\omega}_{i-1}, & \text{если звено } i \text{ поступательное.} \end{cases} \quad (5.7.27)$$

Пусть s будет заменено на p_i^* , где p_i^* — положение начала координат o' относительно системы $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$. Если звено i поступательное относительно системы координат $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$, то оно движется в направлении z_{i-1} со скоростью сочленения \dot{q}_i относительно звена $i-1$. Если по отношению к системе координат $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ оно вращательное, то у него имеется угловая скорость ω_s относительно системы координат $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$. Следовательно,

$$\frac{d^* s}{dt} = \begin{cases} \omega_s \times p_i^*, & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если звено } i \text{ поступательное.} \end{cases} \quad (5.7.29)$$

Кроме того,

$$\frac{d^* s^2}{dt^2} = \begin{cases} \frac{d^* \omega_s}{dt} \times p_i^* + \omega_s \times (\omega_s \times p_i^*), & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ z_{i-1} \ddot{q}_i, & \text{если звено } i \text{ поступательное.} \end{cases} \quad (5.7.31)$$

Следовательно, формула (5.7.15) принимает вид

$$v_i = \begin{cases} \omega_i \times p_i^* + v_{i-1}, & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ z_{i-1} \dot{q}_i + \omega_i \times p_i^* + v_{i-1}, & \text{если звено } i \text{ поступательное,} \end{cases} \quad (5.7.33)$$

$$\quad (5.7.34)$$

а формула (5.7.16) записывается как

$$\dot{v}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_i \times p_i^* + \omega_i \times (\omega_i \times p_i^*) + \dot{v}_{i-1}, & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ z_{i-1} \ddot{q}_i + \dot{\omega}_i \times p_i^* + 2\omega_i \times (z_{i-1} \dot{q}_i) + \omega_i \times (\omega_i \times p_i^*) + v_{i-1}, & \text{если звено } i \text{ поступательное,} \end{cases} \quad (5.7.35)$$

$$\quad (5.7.36)$$

Обратите внимание, что, как показывалось выше [в (5.7.26) и (5.7.36)], $\omega_i = \omega_{i-1}$ в случае, если звено i поступательное.

Пример 5.7.1 ■

Получить выражения (5.7.33) и (5.7.34) для v_i .

Решение. Из формулы (5.7.15) видно, что нужно вычислить $v_i = d^* s/dt + \omega_{i-1} \times s + v_{i-1}$. Из формул (5.7.29) и (5.7.30) следует, что

$$\frac{d^* s^2}{dt} = \begin{cases} \omega_s \times p_i^* = (\omega_i - \omega_{i-1}) \times p_i^*, & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если звено } i \text{ поступательное.} \end{cases} \quad (5.7.37)$$

Следовательно,

$$v_i = \begin{cases} \omega_i \times p_i^* + v_{i-1} = \omega \times p_i^* + v_{i-1}, & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ z_{i-1} \dot{q}_i + \omega_i \times p_i^* + v_{i-1}, & \text{если звено } i \text{ поступательное.} \end{cases} \quad (5.7.39)$$

Обратите внимание, что в случае поступательного перемещения $\omega_i = \omega_{i-1}$ в соответствии с формулой (5.7.33). ■ ■

Пример 5.7.2 ■

Получите выражения (5.7.35) и (5.7.36) для \dot{v}_i .

Решение. Из уравнения (5.7.16) легко заметить, что нужно вычислить $d^* s^2/dt^2$ и далее упростить $\omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times p_i^*)$. Из формул (5.7.31) и (5.7.32) получаем

$$\frac{d^* s^2}{dt^2} = \begin{cases} z_{i-1} \dot{q}_i \times p_i^* + \omega_s \times (\omega_s \times p_i^*), & \text{если звено } i \text{ вращательное,} \\ z_{i-1} \ddot{q}_i, & \text{если звено } i \text{ поступательное.} \end{cases} \quad (5.7.41)$$

Обратите внимание, что справедливы следующие тождества для векторов:

$$\omega_s \times (\omega_s \times p_i^*) = \omega_s (\omega_s \cdot p_i^*) - p_i^* (\omega_s \cdot \omega_s), \quad (5.7.43)$$

$$\omega_{i-1} \times (\omega_s \times p_i^*) = \omega_s (\omega_{i-1} \cdot p_i^*) - p_i^* (\omega_{i-1} \cdot \omega_s), \quad (5.7.44)$$

$$\omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times p_i^*) = \omega_{i-1} (\omega_{i-1} \cdot p_i^*) - p_i^* (\omega_{i-1} \cdot \omega_{i-1}). \quad (5.7.45)$$

Следовательно, если звено i вращательное,

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= z_{i-1} \ddot{q}_i \times p_i^* + \dot{\omega}_{i-1} \times p_i^* + 2\omega_{i-1} \times (\omega_s \times p_i^*) + \\ &+ \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times p_i^*) + v_{i-1} + \omega_s \times (\omega_s \times p_i^*) \end{aligned} \quad (5.7.46)$$

Из формулы (5.7.27) имеем в этом случае

$$\mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times (\mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i), \quad (5.7.47)$$

что в совокупности с формулой (5.7.25) приводит к соотношению

$$\mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_{i-1}) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} - \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{\omega}_i. \quad (5.7.48)$$

Таким образом, уравнение (5.7.46) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i = & \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{p}_i^* - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^* - \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^* + \\ & + 2\boldsymbol{\omega}_s (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \mathbf{p}_i^*) - 2\mathbf{p}_i^* (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_s) + \boldsymbol{\omega}_{i-1} (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \mathbf{p}_i^*) - \\ & - \mathbf{p}_i^* (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_{i-1}) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_s (\boldsymbol{\omega}_s \cdot \mathbf{p}_i^*) - \mathbf{p}_i^* (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_s). \end{aligned} \quad (5.7.49)$$

Обратите внимание, что

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* = \boldsymbol{\omega}_i (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \mathbf{p}_i^*) - \mathbf{p}_i^* (\boldsymbol{\omega}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_{i-1}). \quad (5.7.50)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i = & \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{p}_i^* - \boldsymbol{\omega}_i (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \mathbf{p}_i^*) + \mathbf{p}_i^* (\boldsymbol{\omega}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_{i-1}) + 2\boldsymbol{\omega}_s (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \mathbf{p}_i^*) - \\ & - 2\mathbf{p}_i^* (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_s) + \boldsymbol{\omega}_{i-1} (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \mathbf{p}_i^*) - \mathbf{p}_i^* (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_{i-1}) + \\ & + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_s (\boldsymbol{\omega}_s \cdot \mathbf{p}_i^*) - \mathbf{p}_i^* (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_s). \end{aligned} \quad (5.7.51)$$

Окончательно в данном случае (звено i вращательное):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i = & \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{p}_i^* + \boldsymbol{\omega}_i (\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{p}_i^*) - \mathbf{p}_i^* (\boldsymbol{\omega}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} = \\ = & \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{p}_i^* + \boldsymbol{\omega}_i (\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1}. \end{aligned} \quad (5.7.52)$$

Если звено i поступательное, то

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i = & \mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^* + 2\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} = \\ = & \mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{p}_i^* + 2\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i) + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1}. \quad \blacksquare \blacksquare \end{aligned} \quad (5.7.53)$$

5.8. РЕКУРСИВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

В этом разделе мы воспользуемся принципом Д'Аламбера, чтобы вывести совокупность рекурсивных уравнений движения для манипуляционных роботов.

Принцип Д'Аламбера. Динамическое равновесие системы из многих тел эквивалентно статическому равновесию такой же системы, если только силы инерции считаются независимыми

силами, уравновешивающими все другие силы, действующие на систему в каждый момент времени. Инерционные силы определяются как отрицательное произведение массы на вектор ускорения, проходящий через центр тяжести каждого звена. Рассмотрим i -е звено и будем считать, что начало координат o' находится в его центре масс (рис. 5.8.1). Тогда m_i является общей массой звена i , сосредоточенной в o' , $\bar{\mathbf{r}}_i$ — вектор положения центра масс звена i в базовой системе координат, $\bar{\mathbf{s}}_i$ — вектор

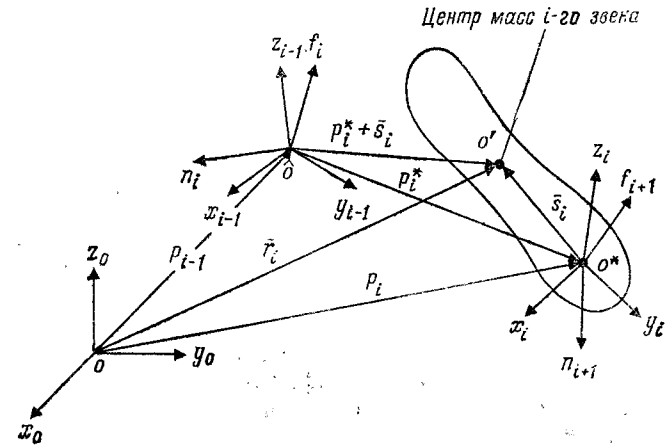


Рис. 5.8.1. Силы и моменты в i -м звене.

положения центра масс звена i в системе (x_i, y_i, z_i) , $\bar{\mathbf{v}}_i = d\bar{\mathbf{r}}_i/dt$ — вектор линейной скорости центра масс звена i в базовой системе координат, \mathbf{F}_i — вектор полной внешней силы (чистой силы Д'Аламбера), — приложенной к звену i в базовой системе координат, $\boldsymbol{\tau}_i$ — полный внешний момент (чистый момент Д'Аламбера), приложенный к звену i в базовой системе координат, \mathbf{I}_i — матрица инерции звена i относительно его центра масс в системе координат (x_0, y_0, z_0) , $\mathbf{f}_{i-1,i}$ — сила, действующая на звено i со стороны звена $i-1$, а $\boldsymbol{\tau}_{i-1,i}$ — момент, приложенный к звену i со стороны звена $i-1$.

Пренебрегая эффектами упругости и вязкого трения в сочленениях, имеем

$$\mathbf{f}_i = m_i \bar{\mathbf{a}}_i. \quad (5.8.1)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i), \quad (5.8.2)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \bar{\mathbf{s}}_i + \mathbf{v}_i, \quad (5.8.3)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \bar{\mathbf{s}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \bar{\mathbf{s}}_i) + \dot{\mathbf{v}}_i. \quad (5.8.4)$$

Очевидно, полная внешняя сила \mathbf{f}_i и момент $\boldsymbol{\tau}_i$ должны быть уравновешены соответственно силой тяжести и силами со стороны звеньев $i-1$ и $i+1$. Таким образом,

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{i-1,i} - \mathbf{f}_{i,i+1} + m_i \mathbf{g}, \quad (5.8.5)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_{i-1,i} - \boldsymbol{\tau}_{i,i+1} + (\mathbf{p}_{i-1} - \bar{\mathbf{r}}_i) \times \mathbf{f}_{i-1,i} - (\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{r}}_i) \times \mathbf{f}_{i,i+1}. \quad (5.8.6)$$

Заметим, что, поскольку $\bar{\mathbf{r}}_i - \mathbf{p}_{i-1} = (\mathbf{p}_i^* + \bar{\mathbf{s}}_i)$,

$$\mathbf{f}_{i-1,i} = \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i,i+1} - m_i \mathbf{g}, \quad (5.8.7)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{i-1,i} = \boldsymbol{\tau}_{i,i+1} + \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{f}_{i,i+1} + (\mathbf{p}_i^* + \bar{\mathbf{s}}_i) \times (\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{g}). \quad (5.8.8)$$

Уравнения (5.8.7) и (5.8.8) называются *рекурсивными уравнениями* динамики манипуляционных роботов. Ими можно воспользоваться для вычисления $(\mathbf{f}_{i-1,i}, \boldsymbol{\tau}_{i-1,i})$, т. е. силы и пары сил, приложенных к звену i со стороны звена $i-1$. Заметим, что $\mathbf{f}_{n,n+1}$ и $\boldsymbol{\tau}_{n,n+1}$ являются соответственно силой и моментом, приложенными к объекту в схвате. Если сочленение i вращательное, то оно действительно поворачивается вокруг оси \mathbf{z}_{i-1} на угол q_i или θ_i (в радианах). Таким образом, момент в сочленении i является просто суммой проекции \mathbf{p}_i на ось \mathbf{z}_{i-1} и моментов упругости и вязкого демпфирования в этой системе координат. С другой стороны, если сочленение i поступательное, оно перемещается на q_i единиц относительно (вдоль) оси \mathbf{z}_{i-1} . В этом случае входной момент $\boldsymbol{\tau}_i$ в сочленении является суммой проекции \mathbf{f}_i на ось \mathbf{z}_{i-1} и сил упругости и вязкого демпфирования в этой системе координат. Следовательно, окончательно имеем

$$\boldsymbol{\tau}_i^* = \begin{cases} (\boldsymbol{\tau}_{i-1,i} \cdot \mathbf{z}_{i-1}) \mathbf{z}_{i-1} + [b_i \dot{q}_i + K_i(q_i)] \mathbf{z}_{i-1}, & (5.8.9) \\ (\mathbf{f}_{i-1,i} \cdot \mathbf{z}_{i-1,i}) \mathbf{z}_{i-1,i} + [b_i \dot{q}_i + k_i(q_i)] \mathbf{z}_{i-1}, & (5.8.10) \end{cases}$$

где b_i — коэффициент вязкого демпфирования, K_i — коэффициент жесткости при вращении, k_i — коэффициент поступательной жесткости, а $\boldsymbol{\tau}_i^*$ — момент в сочленении. Очевидно, что если базовая система координат привязана к основанию и звено o неподвижно, то $\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0 = [0, 0, g]^T$, где $g = 9.8062 \text{ м/с}^2$ — гравитационное ускорение на высоте уровня моря.

В табл. 5.8.1 приведены прямые и обратные рекурсивные уравнения. В случае использования прямых рекурсивных уравнений мы начинаем с вычисления угловых скоростей и ускорений, линейных скоростей и ускорений, далее находим полную силу и момент в каждом звене и так продвигаемся от основания к схвату. В случае использования обратных рекурсивных

Таблица 5.8.1. Рекурсивные уравнения динамики робота

$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если звено } i \text{ вращательное} \\ \boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{если звено } i \text{ поступательное} \end{cases}$	(5.8.11)
$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_{i-1} \ddot{q}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times (\mathbf{z}_{i-1} \dot{q}_i), & \text{если звено } i \text{ вращательное} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} & \text{если звено } i \text{ поступательное} \end{cases}$	(5.8.12)
$\mathbf{v}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* + \mathbf{v}_{i-1} & \text{если звено } i \text{ вращательное} \\ \mathbf{z}_{i-1} \dot{q}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* + \mathbf{v}_{i-1} & \text{если звено } i \text{ поступательное} \end{cases}$	(5.8.13)
$\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1}, & \text{если звено } i \text{ вращательное} \\ \mathbf{z}_{i-1} \ddot{q}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{p}_i^* + 2\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{z}_{i-1} \dot{q}_i) + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1}, & \text{если звено } i \text{ поступательное} \end{cases}$	(5.8.14)
$\bar{\mathbf{a}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \bar{\mathbf{s}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \bar{\mathbf{s}}_i) + \dot{\mathbf{v}}_i$	(5.8.15)
$\mathbf{f}_i = M_i \bar{\mathbf{a}}_i$	(5.8.16)
$\boldsymbol{\tau}_i = \bar{\mathbf{f}}_i \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{l} \boldsymbol{\omega}_i)$	(5.8.17)
$\mathbf{f}_{i-1,i} = \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i,i+1} - m_i \mathbf{g}$	(5.8.18)
$\boldsymbol{\tau}_{i-1,i} = \boldsymbol{\tau}_{i,i+1} + \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{f}_{i,i+1} + (\mathbf{p}_i^* + \bar{\mathbf{s}}_i) \times \mathbf{f}_i + \boldsymbol{\tau}_i$	(5.8.19)
$\boldsymbol{\tau}_i^* = \begin{cases} (\boldsymbol{\tau}_{i-1,i} \cdot \mathbf{z}_{i-1}) \mathbf{z}_{i-1} + [b_i \dot{q}_i + K_i(q_i)] \mathbf{z}_{i-1} \\ (\mathbf{f}_{i-1,i} \cdot \mathbf{z}_{i-1,i}) \mathbf{z}_{i-1,i} + [b_i \dot{q}_i + k_i(q_i)] \mathbf{z}_{i-1} \end{cases}$	(5.8.20)
	(5.8.21)
	(5.8.22)
	(5.8.23)
	(5.8.24)
	(5.8.25)

Прямые рекурсивные уравнения

Обратные рекурсивные уравнения

уравнений мы вычисляем моменты и силы, приложенные к каждому звену, и продвигаемся от схвата к основанию. Таким образом, прямые уравнения позволяют вычислить кинематические параметры каждого звена последовательно от основания к руке, тогда как обратные уравнения дают необходимые моменты и силы для каждого звена в направлении от схвата к основанию.

5.9. РЕКУРСИВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЬЮТОНА — ЭЙЛЕРА В СИСТЕМАХ КООРДИНАТ ЗВЕНЬЕВ

Соотношения (5.8.11)—(5.8.25), в сущности, записаны в базовой системе координат. Полезнее было бы выразить уравнения динамики каждого звена в его собственной системе координат. Пусть R_{i-1}^i — подматрица поворота 3×3 матрицы A_{i-1}^i . Вспомните, что эта матрица ортонормирована, т. е. $(R_{i-1}^i)^{-1} = R_i^{i-1} = (R_{i-1}^i)^T$, где

$$R_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i (-\cos \theta_i) & -\sin \alpha_i \cos \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}, \quad (5.9.1)$$

$$(R_{i-1}^i)^{-1} = R_i^{i-1} = (R_{i-1}^i)^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (5.9.2)$$

Тогда уравнения (5.8.11)—(5.8.25) будут преобразованы к приведенным в табл. 5.9.1.

Пример 5.9.1 ■

Требуется показать, что в алгоритме Ньютона — Эйлера используется $135n - 48$ умножений и $123n - 48$ сложений.

Решение. С помощью формул (5.9.3)—(5.9.17) находим для членов $\omega_i, v_i, \dot{\omega}_i, \dot{v}_i, a_i, \dot{f}_i, \ddot{f}_{i-1, i}, \tau_i$ и $\tau_{i-1, i}$ число умножений и сложений, указанное в табл. 5.9.2. ■ ■

Следующий простой алгоритм, предназначенный для n -степенного манипуляционного робота, позволяет вычислить желаемые моменты или силы для всех приводов сочленений.

Алгоритм 5.9.1 Для начальных условий имеем

$$\omega_0 = \dot{\omega}_0 = v_0 = 0 \text{ и } \dot{v}_0 = [0 \ 0 \ g]^T. \quad (5.9.18)$$

q_i, \dot{q}_i и \ddot{q}_i для $i = 1, 2, \dots, n$ являются переменными для сочленений; $i, \dot{f}_i, \ddot{f}_{i-1, i}$ и $\tau_{i-1, i}$ являются переменными для звеньев.

Таблица 5.9.1. Рекурсивные уравнения прямой задачи динамики робота в локальных координатах

$R_i^0 \dot{\omega}_i = \begin{cases} R_i^{i-1} (R_{i-1}^0 \dot{\omega}_{i-1} + z_0 \dot{q}_i), & \text{если звено } i \text{ вращательное} \\ R_i^{i-1} (R_{i-1}^0 \dot{\omega}_{i-1}), & \text{если звено } i \text{ поступательное} \end{cases}$	(5.9.3)
$R_i^0 \dot{v}_i = \begin{cases} R_i^{i-1} [R_{i-1}^0 \dot{v}_{i-1} + z_0 \ddot{q}_i + (R_{i-1}^0 \dot{\omega}_{i-1}) \times z_0 \dot{q}_i], & \text{если звено } i \text{ вращательное} \\ R_i^{i-1} (R_{i-1}^0 \dot{v}_{i-1}), & \text{если звено } i \text{ поступательное} \end{cases}$	(5.9.4)
$R_i^0 \ddot{\omega}_i = \begin{cases} (R_i^0 \dot{\omega}_i) \times (R_i^0 \dot{p}_i) + R_i^{i-1} (R_{i-1}^0 \ddot{\omega}_{i-1}), & \text{если звено } i \text{ вращательное} \\ R_i^{i-1} (z_0 \ddot{q}_i + R_{i-1}^0 \ddot{v}_{i-1}) + (R_i^0 \dot{\omega}_i) \times (R_i^0 \dot{p}_i), & \text{если звено } i \text{ поступательное} \end{cases}$	(5.9.5)
$R_i^0 \ddot{v}_i = \begin{cases} (R_i^0 \dot{\omega}_i) \times (R_i^0 \dot{p}_i) + (R_i^0 \dot{\omega}_i) \times [(R_i^0 \dot{\omega}_i) \times (R_i^0 \dot{p}_i)] + R_i^{i-1} (R_{i-1}^0 \ddot{v}_{i-1}), & \text{если звено } i \text{ вращательное} \\ R_i^{i-1} (z_0 \ddot{q}_i + R_{i-1}^0 \ddot{v}_{i-1}) + (R_i^0 \dot{\omega}_i) \times (R_i^0 \dot{p}_i) + (R_i^0 \dot{\omega}_i) \times (R_i^{i-1} z_0 \dot{q}_i) + R_i^0 \dot{\omega}_i \times [(R_i^0 \dot{\omega}_i) \times (R_i^0 \dot{p}_i)], & \text{если звено } i \text{ поступательное} \end{cases}$	(5.9.6)
$R_i^0 \ddot{a}_i = (R_i^0 \dot{\omega}_i) \times (R_i^0 \dot{s}_i) + (R_i^0 \dot{\omega}_i) \times [(R_i^0 \dot{\omega}_i) \times (R_i^0 \dot{s}_i)] + R_i^0 \dot{v}_i$	(5.9.7)
$R_i^0 \tau_i = (R_i^0 \dot{f}_i R_i^0) (R_i^0 \dot{\omega}_i) + (R_i^0 \dot{\omega}_i) \times [(R_i^0 \dot{f}_i R_i^0) (R_i^0 \dot{\omega}_i)]$	(5.9.8)
$R_i^0 \tau_{i-1, i} = R_i^{i+1} [(R_{i+1}^0 \dot{f}_{i+1}) + (R_{i+1}^0 \dot{p}_i) \times (R_{i+1}^0 \dot{f}_{i+1})] + (R_i^0 \dot{p}_i \times R_i^0 \dot{s}_i) \times (R_i^0 \dot{f}_i) + R_i^0 \tau_i$	(5.9.9)
$\tau_i = \begin{cases} (R_i^0 \tau_{i-1, i}) \cdot (R_i^{i-1} z_0) R_i^{i-1} z_0 + [b_i \dot{q}_i + k_i (q_i)] R_i^{i-1} z_0 \\ (R_i^0 \tau_{i-1, i}) \cdot (R_i^{i-1} z_0) R_i^{i-1} z_0 + [b_i \dot{q}_i + k_i q_i] R_i^{i-1} z_0 \end{cases}$	(5.9.10)
где $z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T, \dot{v}_0 = [0 \ 0 \ g]^T$ и τ_i — момент в i -м сочленении	(5.9.11)
	(5.9.12)
	(5.9.13)
	(5.9.14)
	(5.9.15)
	(5.9.16)
	(5.9.17)

Таблица 5.9.2. Вычислительная сложность метода Ньютона — Эйлера

Уравнения Ньютона — Эйлера	Умножения	Сложения
ω_i	$9(n-1)$	$9n-9$
v_i	$9(n-1)$	$12n-9$
$\dot{\omega}_i$	$12n-9$	$12n-9$
\dot{v}_i	$27n$	$24n$
\bar{a}_i	$18n$	$15n$
f_i	$3n$	0
$f_{i-1,i}$	$9(n-1)+3$	$9n-6$
τ_i	$27n$	$18n$
$\tau_{i-1,i}$	$21n-15$	$24n-15$
Всего	$135n-48$	$123n-48$

n — число степеней подвижности кисти робота.

Прямые итерации

1. Положить $i=1$.
2. Вычислить $R_i^0 \dot{\omega}_i$, $R_i^0 \omega_i^0$ и $R_i^0 v_i^0$ с помощью табл. 5.9.1.
3. Вычислить $R_i^0 \bar{a}_i$, $R_i^0 f_i$ и $R_i^0 \tau_i$.
4. Если $i=n$, то перейти к следующему шагу; иначе положить $i=i+1$ и вернуться к шагу 2.

Обратные итерации

5. Положить $f_{n,n+1}$ и $\tau_{n,n+1}$ равными силе и моменту, необходимым для того, чтобы схват мог нести груз.
6. Вычислить $R_i^0 f_{i-1,i}$, $R_i^0 \tau_{i-1,i}$ и τ_i , зная $f_{n,n+1}$ и $\tau_{n,n+1}$.
7. Если $i=1$, то закончить вычисления; иначе, положить $i \rightarrow i-1$ и вернуться к шагу 6.

Пример 5.9.2

Для двухзвенного неплоского манипуляционного робота, показанного на рис. 5.9.1, вывести динамические уравнения движения при условии, что все массы m_1 и m_2 сосредоточены на внешнем конце каждого звена.

Решение. Согласно табл. 5.9.1, можно записать прямые итерационные уравнения следующим образом:

$$\omega_0 = \dot{\omega}_0 = v_0 = 0, \quad \dot{v}_0 = [0 \ 0 \ -g]^T, \quad (5.9.19)$$

$$R_1^0 \omega_1 = R_1^0 (R_0^0 \omega_0 + z_0 \dot{\theta}_1) = R_1^0 \omega_0 + z_1 \dot{\theta}_1 \quad (5.9.20)$$

или

$$R_1^0 \omega_1 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_1]^T, \quad (5.9.21)$$

$$R_1^0 \dot{\omega}_1 = R_1^0 [R_0^0 \dot{\omega}_0 + z_0 \dot{\theta}_1 + (R_0^0 \omega_0) \times z_0 \dot{\theta}_1] \quad (5.9.22)$$

или

$$R_1^0 \dot{\omega}_1 = [0 \ 0 \ \ddot{\theta}_1]^T, \quad (5.9.23)$$

$$R_1^0 v_1 = (R_1^0 \omega_1) \times (R_1^0 p_1^*) (R_1^0 (R_0^0 v_0)) = \quad (5.9.24)$$

$$= R_1^0 [0 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0]^T. \quad (5.9.25)$$

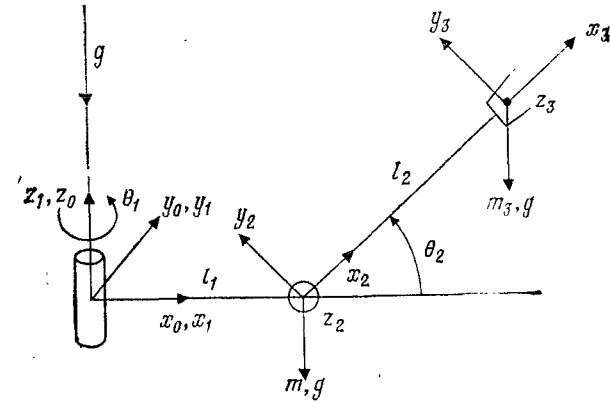


Рис. 5.9.1. Двухзвенный неплоский манипулятор.

Кроме того, как видно из рис. 5.9.1,

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.9.26)$$

$$R_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ S_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.9.27)$$

$$R_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.9.28)$$

Кроме того,

$$\mathbf{p}_1^* = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{p}_2^* = [l_1 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{p}_3^* = [l_2 \ 0 \ 0], \quad (5.9.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{v}}_1 &= \mathbf{R}_1^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}_1^* + \mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}_1^*) + \mathbf{R}_1^0 (\mathbf{R}_0^0 \mathbf{v}_0^0) = \\ &= [0 \ 0 \ -g]^T, \end{aligned} \quad (5.9.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^0 \bar{\mathbf{a}}_1 &= \mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1^0 \times \mathbf{R}_1^0 \bar{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}_1^0 \bar{\mathbf{s}}_1) + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{v}_1^0 = \\ &= [-l_1 \dot{\theta}_1^2 \ l_1 \ddot{\theta}_1 \ -g]^T, \end{aligned} \quad (5.9.31)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{R}_2^1 (\mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{z}_0 \dot{\theta}_2) = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{z}_0 \dot{\theta}_2, \quad (5.9.32)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ -S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_1 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.9.33)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \mathbf{R}_2^1 [\mathbf{R}_1^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \mathbf{z}_0 \ddot{\theta}_2 + (\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{z}_0 \dot{\theta}_2], \quad (5.9.34)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \mathbf{z}_2 \ddot{\theta}_2 + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{z}_0 \dot{\theta}_2, \quad (5.9.35)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} S_2 \ddot{\theta}_2 \\ C_2 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_1 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 \ddot{\theta}_1 + C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ C_2 \ddot{\theta}_1 - S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.9.36)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{R}_2^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}_2^* + \mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\omega}_2 \times [(\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\omega}_2) \times (\mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}_2^*)] + \mathbf{R}_2^1 (\mathbf{R}_2^0 \mathbf{v}_2), \quad (5.9.37)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \dot{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 \\ -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 C_2 \dot{\theta}_1^2 - S_2 g \\ l_1 S_2 \dot{\theta}_1^2 - C_2 g \\ -l_1 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad (5.9.38)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{R}_2^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{R}_2^0 \mathbf{S}_2 + (\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\omega}_2) \times [(\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{R}_2^0 \mathbf{S}_2] + \mathbf{R}_2^0 \dot{\mathbf{v}}_2, \quad (5.9.39)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} S_2 \ddot{\theta}_1 + C_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ C_2 \ddot{\theta}_1 - S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_1 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \dot{\theta}_2 \\ -l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_2^0 \dot{\mathbf{v}}_2, \quad (5.9.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2^0 \bar{\mathbf{a}}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \ddot{\theta}_2 \\ -l_2 C_2 \ddot{\theta}_1 + l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2 C_2 \dot{\theta}_1^2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \\ l_2 S_2 C_2 \dot{\theta}_1^2 \\ l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -l_1 C_2 \dot{\theta}_1^2 - S_2 g \\ l_1 S_2 \dot{\theta}_1^2 + C_2 g \\ -l_1 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.9.41)$$

или окончательно

$$\mathbf{R}_2^0 \bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} -(l_1 C_2 + l_2 C_2^2) \dot{\theta}_1^2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 - S_2 g \\ (l_1 S_2 + l_2 S_2 C_2) \dot{\theta}_1^2 - C_2 g + l_2 \ddot{\theta}_2 \\ 2l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - l_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 C_2 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}. \quad (5.9.42)$$

Тогда основные уравнения принимают вид

$$\mathbf{R}_1^0 \mathbf{f}_1 = m_1 \mathbf{R}_1^0 \bar{\mathbf{a}}_1 \quad (5.9.43)$$

или

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \\ m_1 g \end{bmatrix}, \quad (5.9.44)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \mathbf{f}_2 = m_2 \mathbf{R}_2^0 \bar{\mathbf{a}}_2 \quad (5.9.45)$$

или

$$\mathbf{R}_2^0 \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -m_2 (l_1 + l_2 C_2) C_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 S_2 g \\ m_2 (l_1 + l_2 C_2) S_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 g C_2 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \\ 2m_2 l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_2 C_2 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}. \quad (5.9.46)$$

Теперь уравнения для моментов принимают вид

$$\mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\tau}_1 = (\mathbf{R}_1^0 \mathbf{I}_1 \mathbf{R}_1^0) (\mathbf{R}_1^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_1) + \mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1 \times [(\mathbf{R}_1^0 \mathbf{I}_1 \mathbf{R}_1^0) (\mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1)], \quad (5.9.47)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\tau}_2 = (\mathbf{R}_2^0 \mathbf{I}_2 \mathbf{R}_2^0) (\mathbf{R}_2^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2) + (\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\omega}_2) \times [(\mathbf{R}_2^0 \mathbf{I}_2 \mathbf{R}_2^0) (\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\omega}_2)]. \quad (5.9.48)$$

Поскольку \mathbf{I}_1 и \mathbf{I}_2 равны нулю, то оказывается, что

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = 0. \quad (5.9.49)$$

Конечно, условие $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = 0$ — это идеализация, поскольку мы полагаем, что массы сосредоточены в центре тяжести элементов робота.

В случае обратных итераций для сил во втором звене имеем

$$\mathbf{R}_2^0 \mathbf{f}_{1,2} = \mathbf{R}_2^3 (\mathbf{R}_3^0 \mathbf{f}_{2,3}) + \mathbf{R}_2^0 \mathbf{f}_2 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{f}_2 \quad [\text{см. формулу (5.9.46)}], \quad (5.9.50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\tau}_{1,2} &= \mathbf{R}_2^3 [\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\tau}_{2,3} + (\mathbf{R}_3^0 \mathbf{p}_2^*) \times (\mathbf{R}_3^0 \mathbf{f}_{2,3})] + \\ &+ (\mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}_2^* + \mathbf{R}_2^0 \bar{\mathbf{s}}_1) \times (\mathbf{R}_2^0 \mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\tau}_2, \end{aligned} \quad (5.9.51)$$

$$\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\tau}_{1,2} = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{R}_2^0 \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 - 2m_2 l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2^2 C_2 \ddot{\theta}_1 \\ m_2 l_2 (l_1 + l_2 C_2) S_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 g l_2 C_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.9.52)$$

$$\mathbf{R}_1^0 \mathbf{f}_1 = \mathbf{R}_1^2 (\mathbf{R}_2^0 \mathbf{f}_{1,2}) + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{f}_1, \quad (5.9.53)$$

$$\mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\tau}_{0,1} = \mathbf{R}_1^2 [\mathbf{R}_2^0 \boldsymbol{\tau}_{1,2} + (\mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}_1^*) \times (\mathbf{R}_2^0 \mathbf{f}_{1,2})] + (\mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}_1^* + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{s}_1) \times (\mathbf{R}_1^0 \mathbf{f}_1) + \mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\tau}_1. \quad (5.9.54)$$

После упрощений с использованием формул (5.9.51), (5.9.52) и (5.9.54) получаем

$$\mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\tau}_{0,1} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 C_2) \ddot{\theta}_1 - 2(l_1 + l_2 C_2) m_2 l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2^2 C_2^2 \end{bmatrix}. \quad (5.9.55)$$

Окончательно при отсутствии трения и упругости в сочленениях имеем

$$\boldsymbol{\tau}_1^* = [m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2 C_2)^2] \ddot{\theta}_1 - 2(l_1 + l_2 C_2) m_2 l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, \quad (5.9.56)$$

$$\boldsymbol{\tau}_2^* = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + (l_1 + l_2 C_2) m_2 l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 g l_2 C_2 \quad (5.9.57)$$

или в общем виде

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\theta) \ddot{\theta} + \mathbf{V}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{G}(\theta), \quad (5.9.58)$$

где

$$\mathbf{M}(\theta) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2 C_2)^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}, \quad (5.9.59)$$

$$\mathbf{V}(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -2(l_1 + l_2 C_2) m_2 l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ (l_1 + l_2 C_2) m_2 l_2 S_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}, \quad (5.9.60)$$

$$\mathbf{G}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g l_2 C_2 \end{bmatrix}. \quad (5.9.61)$$

5.10. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой достаточно важной главе по динамике роботов всесторонне описаны различные методы получения уравнений динамики и рассмотрен ряд примеров, демонстрирующих определенные детали.

Представление динамики манипуляционных роботов методом связанных графов имеет преимущества, поскольку оно применимо для весьма сложных манипуляционных роботов. Однако даже для робота с тремя степенями подвижности представление как методом Лагранжа — Эйлера, так и методом Ньютона — Эйлера

приводит к настолько сложным уравнениям, что мы не включили их в качестве примеров в эту главу. Они предназначаются в качестве домашних заданий, а их решение можно найти в соответствующих сборниках задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bejczy A. K., Robot Arm Dynamics and Control, NASA-JPL Tech. Memo Rep. 33—669 (Feb.), 1974.
2. Hollerbach J. M., A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 10(11), 730—736, 1980.
3. Kahn M. E., Roth B., The Near-Minimum-time Control of Open Loop Kinematic Chains, *Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 93, 164—172, 1971.
4. Lee C. S. G., Robot Arm Kinematics, Dynamics and Control, *IEEE Trans. Computer*, 62—79 (Dec.), 1982.
5. Luh J. Y. S., Walker M. W., Paul R. P., On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators, *Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 120, 69—76, 1980.
6. Rosenberg R. M., Analytical Dynamics of Discrete Systems, Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, Angelo Miele (Ser. Ed.), Vol. 4, Plenum Press, New York, 1977.
7. Shahinpoor M., Bond Graph Dynamic Modeling of Robotic Manipulators, Recent Developmental Applied Mathematics Series 1, I. G. Tadjbakhsh and F. F. Ling (Eds.), RPI Press, Troy, NY, pp. 176—186, 1983.
8. Shahinpoor M., Robotics Dynamics, in Encyclopedia of Robotics, Wiley, New York (в печати).
9. Silver W., On the Equivalence of Lagrangian and Newton — Euler Dynamics for Manipulators, *Int. J. Robotics Res.*, 1(2), 60—70, 1982.
10. Uicker J. J., Jr., Dynamic Behaviour of Spatial Linkages, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 5(68), 1—15, 1966.

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Выведите основные уравнения динамики для одноногого прыгающего манипулятора (рис. 35.1) методом связанных графов, описанным в разд. 5.2.

2. Выведите те же уравнения, что и в задаче 1, но с помощью метода Лагранжа — Эйлера.

3. Выведите те же уравнения, что и в задаче 1, но с помощью метода Ньютона — Эйлера.

4. Выведите уравнения динамики для момента $\boldsymbol{\tau}_{0,1}$ однозвеного робота, изображенного на рис. 35.4, выражая его через опрокидывающие силы и моменты $f_{1,2}$ и $\boldsymbol{\tau}_{1,2}$, а также другие соответствующие параметры.

5. Покажите, что для манипуляционного робота с n степенями подвижности при решении уравнений динамики Ньютона — Эйлера требуется $126n - 99$ умножений и $106n - 92$ сложений.

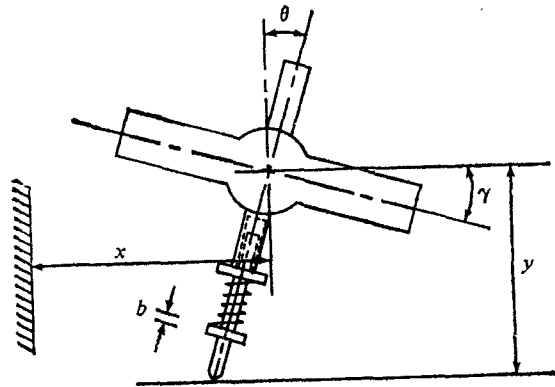


Рис. 35.1. Одноногий прыгающий робот.

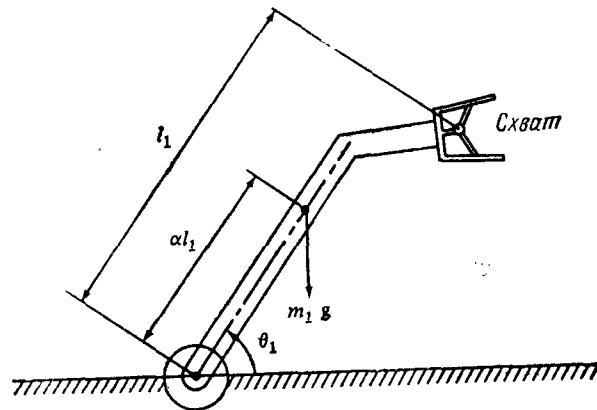


Рис. 35.4. Однозвенный манипуляционный робот.

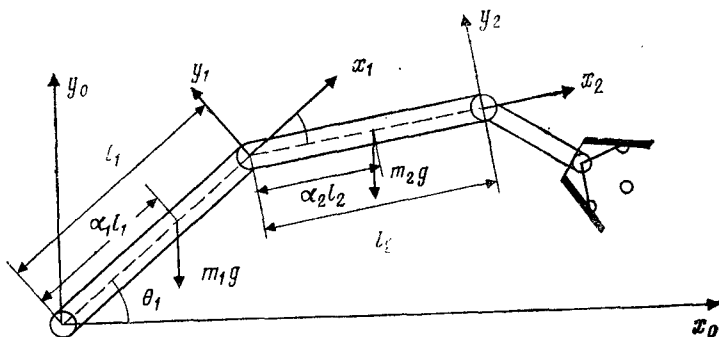


Рис. 35.7.

6. Покажите, что для манипуляционного робота с n степенями подвижности при решении уравнений динамики Лагранжа — Эйлера требуется $32n^4 + 86n^3 + 171n^2 + 53n - 128$ умножений и $25n^4 + 66n^3 + 129n^2 + 42n - 96$ сложений.

7. Для плоского двухзвенного робота, показанного на рис. 35.7, найдите моменты $p_{1,2}$ и $p_{0,1}$ в сочленениях, используя уравнения Ньютона — Эйлера. При этом звенья имеют одинаковый диаметр $2R$, длины l_1 и l_2 и массы m_1 и m_2 соответственно.

8. В условиях статического равновесия к основанию робота приложены следующие сила и момент (f и τ):

$$f = 5i + 6j + 7k \text{ и } \tau = 10i + 20j + 30k.$$

Каковы эквивалентные сила и момент в схвате, если его матрица преобразований имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Выведите основные уравнения динамики для плоского трехзвенного манипуляционного робота, показанного на рис. 35.9.

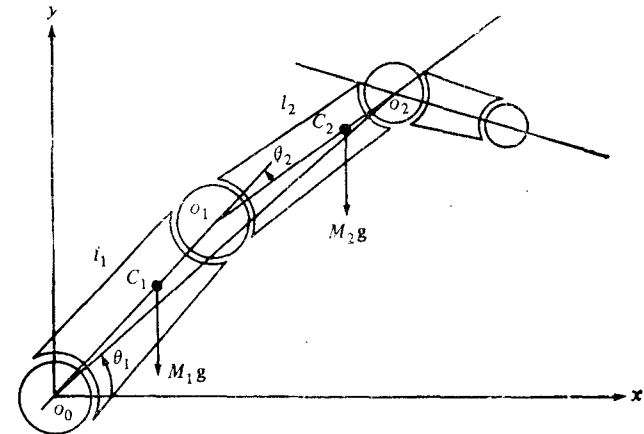


Рис. 35.9. Геометрия трехзвенного плоского манипулятора.

10. Найдите тензор инерции следующих тел в системе координат, начало которой лежит в центре тяжести каждого тела:
а) однородного кругового цилиндра;

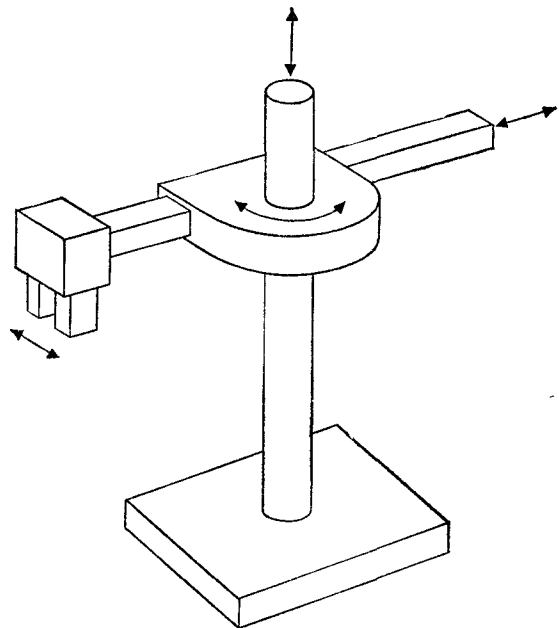


Рис. 35.11.

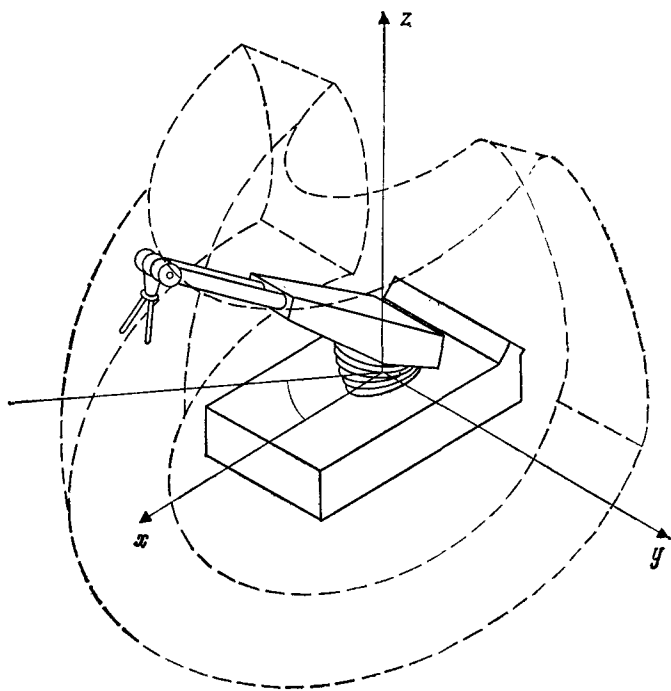


Рис. 35.12.

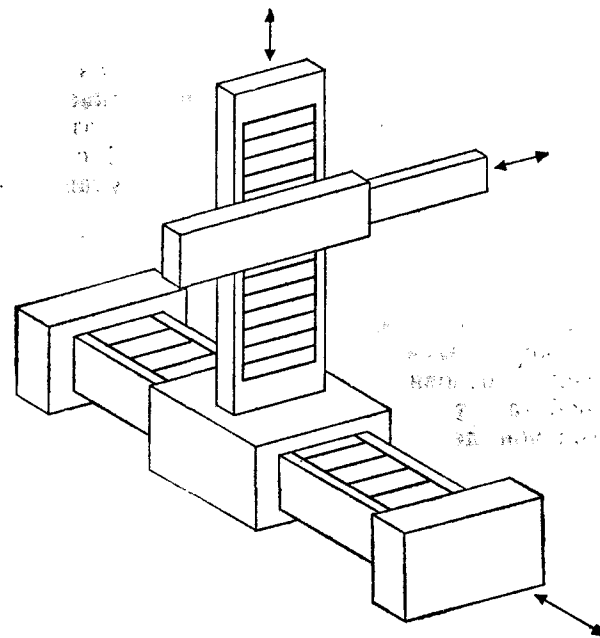


Рис. 35.13.

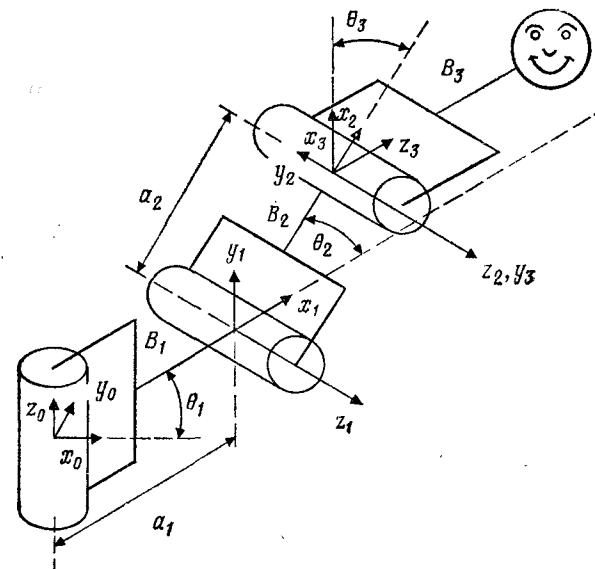


Рис. 35.14.

б) однородной круглой трубы;

в) трубы с прямоугольным поперечным сечением.

11. Получите в явной форме уравнения динамики для манипулятора в цилиндрической системе координат, описанного в примере 5.4.3 и изображенного на рис. 5.4.5, с помощью или а) уравнений Лагранжа—Эйлера, или б) уравнений Ньютона—Эйлера. (См. также рис. 35.11.)

12. Выведите основные уравнения динамики робота в сферической системе координат, описанного в примере 5.4.2 и изображенного на рис. 5.4.3 с помощью а) уравнений Лагранжа—Эйлера и б) уравнений Ньютона—Эйлера. Сопоставьте свои результаты с полученными в примере 5.4.2. (См. также рис. 35.12.)

13. Выведите основные уравнения динамики для манипуляционного робота с тремя степенями подвижности, работающего в прямоугольной декартовой системе координат, как описано в основном изложении. (См. рис. 35.13.)

14. Выведите основные уравнения динамики для манипуляционного робота с тремя степенями подвижности, показанного на рис. 35.14.

Управление движением манипуляционных роботов

6.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе будет рассмотрено управление открытой кинематической цепью. Мы сосредоточим внимание на динамическом управлении роботом, т. е. рассмотрим силы и моменты, которые нужно приложить в сочленениях манипулятора, с тем чтобы переместить манипулятор из текущей конфигурации в желаемую конфигурацию при ограничении в виде конкретной траектории. Если робот должен двигаться очень медленно, то на систему не действуют какие-либо значительные взаимовлияющие динамические силы. Простым решением этой задачи является независимое управление каждым сочленением. Это так называемый *алгоритм пропорционального управления*, который подходит для большинства приложений. Если же движения робота быстрые, то сочленениями нельзя управлять независимо, поскольку динамическое взаимовлияние между звеньями становится чрезвычайно большим и требуется нелинейный или комбинированный алгоритм управления. В общем случае для построения алгоритмов нелинейного управления робот разбивается на две подсистемы (минимальную и терминальную). Динамические переменные (углы, скорости, ускорения и моменты) минимальной конфигурации вычисляются до начала движения и запоминаются. При управлении манипулятором в реальном времени хранящиеся в памяти ЭВМ данные используются для минимальной конфигурации, и далее для любого задания прилагаются компенсирующие управляющие моменты во время движения. Итак, общую задачу управления манипулятором можно сформулировать следующим образом: *найти моменты, развиваемые приводами в сочленениях $\{\tau_i(t)\}$, которые необходимы для получения данной планируемой траектории $\{\theta_i(t)\}$ либо планируемой совокупности сил $\mathbf{i}(t)$ и моментов $\boldsymbol{\tau}(t)$ в схвате.*

Таким образом, задача управления заключается в том, чтобы найти необходимые моменты, которые желательным образом управляют сочленениями в каждый момент времени. Очевидно, что в силу эффектов взаимного влияния инерционных, кориолисовых, центробежных и гравитационных нагрузок, которые непрерывно изменяются, чрезвычайно трудно, если вообще возможно, добиться настоящего управления в реальном времени.

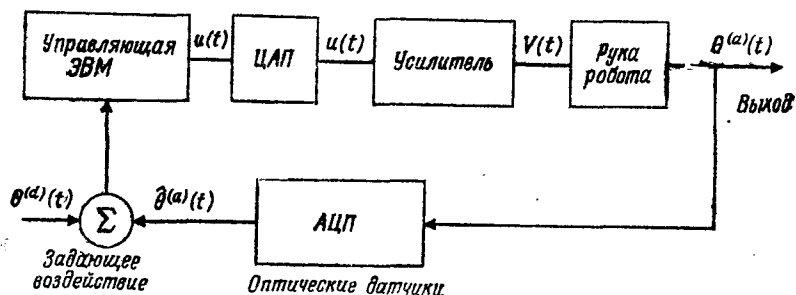


Рис. 6.1.1. Общая блок-схема системы управления руки робота.

Сначала будем рассматривать манипулятор как непрерывную нестационарную систему и будем пользоваться преобразованием Лапласа для упрощения нашего анализа. На рис. 6.1.1 показана общая структура системы управления роботами.

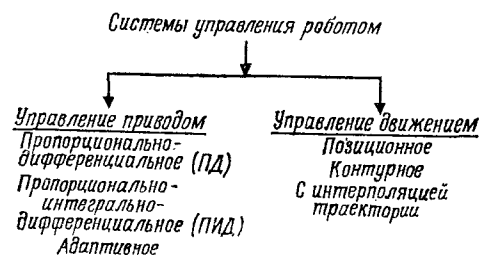


Рис. 6.1.2. Системы управления роботом.

Обратите внимание, что управляющим устройством обычно является небольшая ЭВМ, ЦАП — это цифро-аналоговый преобразователь, а АЦП — это аналого-цифровой преобразователь. Усилитель — схемная часть привода, преобразующая маломощный аналоговый сигнал момента $u(t)$ в $V(t)$, который непосредственно приводит в действие двигатели сочленений. Если двигателями сочленений являются двигатели постоянного тока (с якорным управлением), то получаемый момент пропорционален току якоря. Следовательно, усилитель на рис. 6.1.1 может быть

аналоговой подсистемой, управляющей током посредством изменения приложенного к якорю напряжения. Блок АЦП измеряет положение (кодовыми преобразователями) и скорость (тахометрами) приводов сочленений и преобразует их в форму, пригодную для цифрового управляющего устройства. Датчики могут представлять собой кодирующий диск (оптический кодирующий диск), аналогичный цифровому преобразователю. С другой стороны, это может быть простой потенциометр или соединенный с АЦП тахогенератор, измеряющий положение или скорость робота. На рис. 6.1.2 показаны два основных типа управления движением робота.

6.2. РАЗОМКНУТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТАМИ

Здесь коротко напомним основные идеи, лежащие в основе разомкнутых и замкнутых систем управления. Мы будем выражать через переменную s преобразования Лапласа. Заметим,

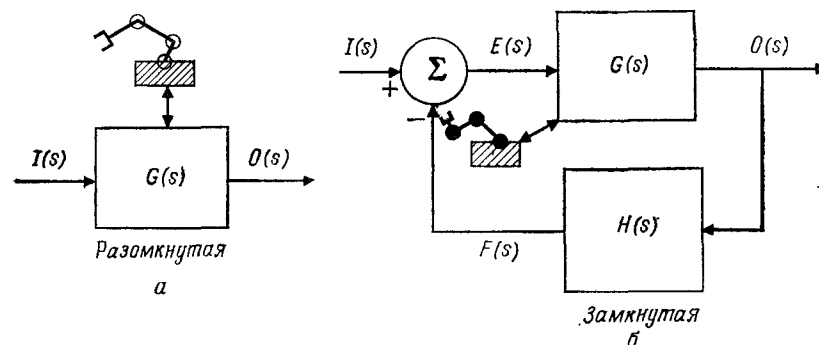


Рис. 6.2.1. Разомкнутые и замкнутые системы управления роботом.

что преобразование Лапласа переводит функцию времени в функцию s , такую, что

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega. \quad (6.2.1)$$

Принципиальным преимуществом преобразования Лапласа является то, что обыкновенные дифференциальные уравнения во временной области могут быть преобразованы в алгебраические уравнения в область переменной s преобразования Лапласа. Для обеих систем управления роботами, представленных на рис. 6.2.1, мы хотим найти их передаточные функции $T(s)$.

Здесь переменные определены таким образом: $I(s)$ — вход, $O(s)$ — выход, $G(s)$ — передаточная функция, $G(s) = O(s)/I(s)$, $H(s)$ — передаточная функция канала обратной связи и $E(s)$ — сигнал ошибки¹⁾. Заметим, что общие передаточные функции $T_o(s)$ и $T_c(s)$ для разомкнутой и замкнутой систем соответственно равны

$$T_o(s) = \frac{O(s)}{I(s)} = G(s), \quad (6.2.2)$$

$$T_c(s) = \frac{O(s)}{I(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \quad (6.2.3)$$

Пример 6.2.1 ■

Вывести уравнение (6.2.3) для замкнутой системы управления роботом.

Решение. Заметим, что

$$T_c(s) = \frac{O(s)}{I(s)} \text{ и } G(s) = \frac{O(s)}{E(s)}, \text{ но} \quad (6.2.4)$$

$$E(s) = I(s) - F(s), \quad (6.2.5)$$

$$F(s) = H(s)O(s),$$

потому что $H(s) = F(s)/O(s)$. Следовательно,

$$E(s) = I(s) - H(s)O(s) = I(s) - H(s)G(s)E(s), \quad (6.2.6)$$

либо

$$I(s) = E(s)[1 + G(s)H(s)]. \quad (6.2.7)$$

Окончательно

$$T_c(s) = \frac{O(s)}{I(s)} = \frac{G(s)E(s)}{[1 + G(s)H(s)]E(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}. \quad (6.2.8)$$

Динамическая устойчивость манипуляционного робота характеризуется откликом системы на разные входные сигналы. Вообще говоря, робототехническая система устойчива, если для любого данного ограниченного входа также является ограниченным. Например, при определенном возмущении манипулятор может совершать очень сильные колебания. Колебания — это признак неустойчивости, которая либо может быть спонтанной, либо являться результатом некоторого непериодического входного воздействия. Другим признаком неустойчиво-

¹⁾ Здесь, конечно, имеются в виду не сами сигналы, а их преобразование по Лапласу. — Прим. ред.

сти является незатухающий или неограниченный отклик на входной сигнал¹⁾.

Заметим, что сигналы ошибки обеих систем равны

$$E_o(s) = I(s) - O(s) = O(s)[G^{-1}(s) - 1] = I(s)[1 - G(s)], \quad (6.2.9)$$

$$E_c(s) = I(s) \left(\frac{1 - G(s) + G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \right). \quad (6.2.10)$$

В следующих разделах мы опишем ряд важных областей управления роботами, в частности системы второго порядка, системы регулирования по ошибке и общую задачу управления.

6.3. СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим линейную систему второго порядка с обратной связью, характеризуемую с помощью передаточной функции $G(s) = K/s(s+p)$, такой, что

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s^2 + ps + K}. \quad (6.3.1)$$

Введя обозначения $\omega_n^2 = K$ и $p = 2\xi\omega_n$, получим

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (6.3.2)$$

По традиции ξ называется коэффициентом демпфирования, а ω_n — собственной частотой системы. В случае разомкнутой системы полюсы передаточной функции $T(s)$, которая здесь равна $G(s)$, находятся в $s_1 = 0$ и $s_2 = -p$. Однако для замкнутой системы полюсы находятся в s_1 и s_2 , таких, что

$$s_1, s_2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (6.3.3)$$

Здесь следует рассмотреть четыре различных случая, а именно случай 1:

$$\xi = 0, \text{ отсутствие демпфирования, } s_1, s_2 = 0 \pm j\omega_n; \quad (6.3.4)$$

случай 2:

$$\xi > 1, \text{ передемпфирование}^2), s_1, s_2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}; \quad (6.3.5)$$

¹⁾ Рассуждения автора относительно устойчивости динамических систем (в том числе робототехнических), вообще говоря, не являются корректными. Читателю, не знакомому с этим понятием, следует обратиться к литературе, посвященной этой проблематике. — Прим. ред.

²⁾ Полюсы в данном случае действительные. — Прим. ред.

случай 3:

$$0 < \xi < 1, \text{ демпфирование, } s_1, s_2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}; \quad (6.3.6)$$

случай 4:

$$\xi = 1, \text{ критическое демпфирование, } s_1, s_2 = -\xi\omega_n. \quad (6.3.7)$$

Вообще для единичного входного воздействия выход демпфированной системы, $0 < \xi < 1$, представляет собой затухающую синусоидальную функцию с перерегулированием, такую, что

$$C(t) = L^{-1}O(s) = 1 - \beta^{-1} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \varphi), \quad t > 0, \quad (6.3.8)$$

где $\beta = \sqrt{1 - \xi^2}$ и $\varphi = \arctg \xi$.

Чтобы получить быстродействующую устойчивую выходную реакцию в манипуляционных роботах, нужно пытаться так настроить параметры системы, чтобы получилась критически демпфированная система, как показано на рис. 6.3.1.

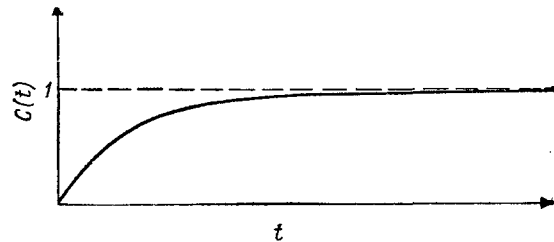


Рис. 6.3.1. Отклик демпфированной системы второго порядка.

Сначала мы рассмотрим стандартные методы управления однозвенными роботами. В этих методах используется комбинация регуляторов как в прямой, так и в обратной цепи, с тем чтобы добиться устойчивости и отслеживания желаемых входных сигналов и подавления нежелательных возмущений. Управление многостепенными роботами рассматривается в разд. 6.8, где указаны различные применяемые методы.

Следует отметить, что, хотя реальное управление любым манипулятором осуществляется цифровой ЭВМ дискретным способом, частота дискретизации достаточно высока для того, чтобы рассматривать манипулятор и регулятор как непрерывные системы и пренебречь эффектом дискретизации¹⁾.

¹⁾ К сожалению, это не всегда верно, так что при синтезе регулятора часто приходится учитывать цифровую природу управления. — Прим. ред.

6.4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЗАМКНУТОГО КОНТУРА

Рассмотрим простое одномерное движение одноосной руки робота, показанной на рис. 6.4.1. Основное уравнение движения имеет вид

$$\tau_{0,1}(t) = mgl_c \cos \theta + ml_c^2 \ddot{\theta} + b_\tau \dot{\theta}, \quad (6.4.1)$$

где b_τ — коэффициент трения. Предположим, что у нас имеются датчики, которые преобразуют θ и $\dot{\theta}$ в ток, который можно

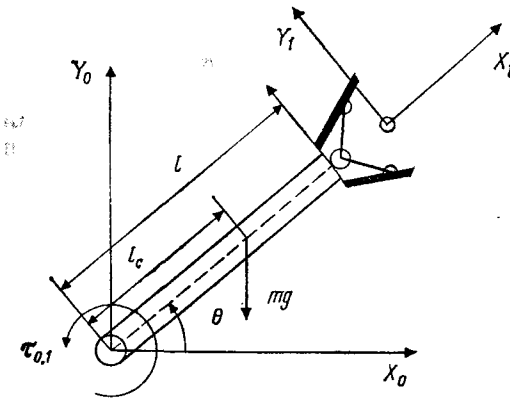


Рис. 6.4.1. Движение одноосной руки робота.

легко усилить и сформировать момент

$$\tau_{0,1}(t) = -k_1 \theta - k_2 \dot{\theta} + mgl_c \cos \theta. \quad (6.4.2)$$

Вычисленное значение $\tau_{0,1}$ — это момент, развиваемый двигателем в сочленении. Таким образом, поведение системы описывается следующим уравнением:

$$ml_c^2 \ddot{\theta} + (b_\tau + k_2) \dot{\theta} + k_1 \theta = 0. \quad (6.4.3)$$

Следовательно, система теперь действует как линейная система второго порядка с жесткостью k_1 и коэффициентом трения $b_\tau + k_2$. Таким образом, мы имеем алгоритм управления, который позволяет регулировать угловую жесткость и демпфирование однозвенного манипуляционного робота. Это наиболее существенное распространение теории нелинейного управления с обратной связью на нелинейные механические системы. Если мы хотим управлять положением, то можно выбрать большую величину k_1 , так что рука станет похожей на очень жесткую

пружину, которая удерживается в фиксированном угловом положении (т. е. не вращается). Такой вид пропорционального управления называется *регулированием*. Как отмечалось выше, можно выбрать соответствующие значения k_1 и k_2 , чтобы получить критически демпфированную систему относительно всех возмущений около номинальной траектории. Мы рассмотрим эти положения в следующих нескольких разделах.

6.5. УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ РОБОТА ПО ОШИБКЕ

На рис. 6.5.1 показана специальная система цифрового управления одной степенью подвижности. Выходными сигналами системы являются $\theta(t)$ и $\dot{\theta}(t)$, измеряемые потенциометром и тахогенератором соответственно. Входными сигналами системы являются задаваемое положение и его производные, т. е. $\theta^{(d)}(t)$, $\dot{\theta}^{(d)}(t)$ и $\ddot{\theta}^{(d)}(t)$, которые определяются из уравнений планируемой траектории движения сочленений, рассмотренных

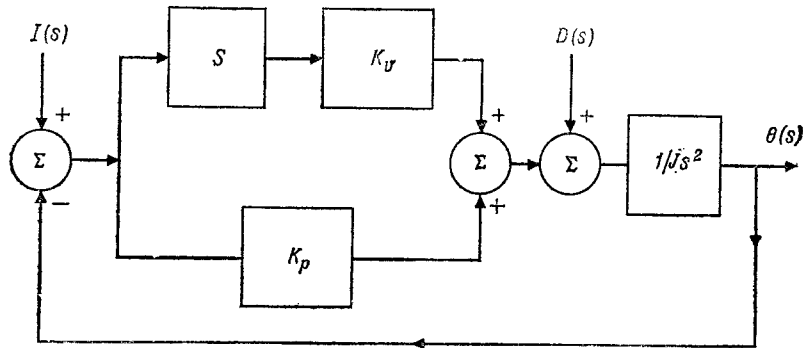


Рис. 6.5.1. Общая блок-схема цифрового управления одноосным манипулятором.

в гл. 4. Здесь задача управления анализируется для системы с непрерывным временем, так что ошибки из-за квантования в АЦП и ЦАП игнорируются. Мы хотим найти передаточную функцию разомкнутой системы $G(s)$ для руки робота. Будем сначала рассматривать каждое сочленение руки манипулятора как управляемый по цепи якоря двигатель постоянного тока с инерционной нагрузкой и пренебрежимо малым вязким трением. Мы ограничиваемся двигателями постоянного тока с якорным управлением. Далее полагаем, что поток возбуждения постоянный. Это означает, что ток в обмотке возбуждения i_f поддержи-

вается постоянным. Обмотки возбуждения может и не быть, если используется двигатель с постоянным магнитом. В любом случае модель двигателя постоянного тока такова, как показано на рис. 6.5.2.

Обратите внимание, что v_a — напряжение, приложенное к якорю, i_a — ток якоря, v_b — напряжение противо-э. д. с., R_a — сопротивление обмотки якоря, L_a — индуктивность обмотки якоря, J_m и J — моменты инерции вращающихся частей, f_m и f — коэффициенты трения в подшипниках, n_1 и n_2 — числа зубьев

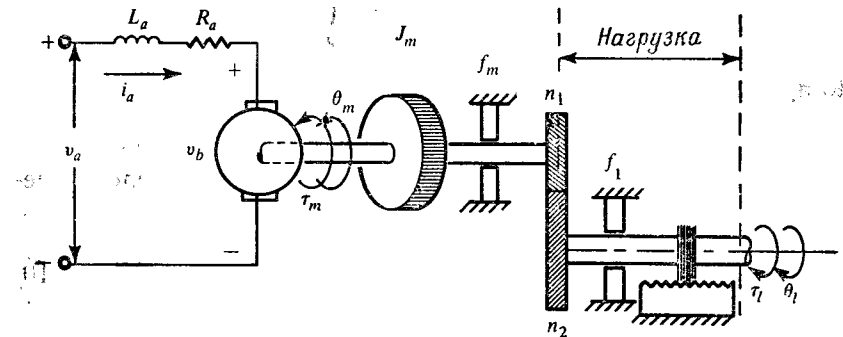


Рис. 6.5.2. Структура нагруженного двигателя постоянного тока с якорным управлением.

редуктора. Используя представление связными графами, можно показать, что

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + v_b = v_a. \quad (6.5.1)$$

Коэффициент передачи между двигателем и нагрузкой обозначается через $n = n_1/n_2$, так что эквивалентные момент инерции нагрузки J и коэффициент трения f имеют вид

$$J = J_m + n^2 J_l, \quad (6.5.2)$$

$$f = f_m + n^2 f_l. \quad (6.5.3)$$

Пример 6.5.1 ■

Требуется вывести уравнения (6.5.2) и (6.5.3) для эквивалентных инерции и трения.

Решение. Используя закон сохранения энергии, получаем

$$\frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} J_l \dot{\theta}_l^2 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_m^2. \quad (6.5.4)$$

Но

$$n_2 \dot{\theta}_l = n_1 \dot{\theta}_m \text{ или } \dot{\theta}_l = n \dot{\theta}_m; \quad \dot{\theta}_l^2 = n^2 \dot{\theta}_m^2. \quad (6.5.5)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} J_l n^2 \dot{\theta}_m^2 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_m^2 \quad (6.5.6)$$

$$\text{или } J = J_m + n^2 J_l. \quad (6.5.7)$$

С другой стороны, полная энергия, рассеиваемая при трении, равна

$$\int f_m \dot{\theta}_m \dot{\theta}_m dt + \int f_l \dot{\theta}_l \dot{\theta}_l dt = \int f \dot{\theta}_m \dot{\theta}_m dt. \quad (6.5.8)$$

По-прежнему, $\dot{\theta}_l^2 = n^2 \dot{\theta}_m^2$, так что

$$f = f_m + n^2 f_l. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (6.5.9)$$

Ток якоря создает момент τ_m , развиваемый двигателем. Очевидно, что уравнение движения этой системы при отсутствии силы тяжести имеет вид

$$\tau_m = J \ddot{\theta}_m + f \dot{\theta}_m. \quad (6.5.10)$$

Уравнения (6.5.1) и (6.5.10) связаны между собой в силу того, что двигатель является гиратором, а против-э. д. с. связана с угловой скоростью $\dot{\theta}_m$, так что

$$v_b = k_b \dot{\theta}_m, \quad (6.5.11)$$

где k_b — коэффициент против-э. д. с., или коэффициент гирации в смысле теории связанных графов. Поскольку двигатель является здесь гиратором, то также справедливо и то, что

$$\tau_m = k i_a, \quad (6.5.12)$$

где k — постоянная момента двигателя. Заметим, что при отсутствии любых других видов потери энергии должно выполняться равенство

$$v_b i_a = \tau_m \dot{\theta}_m, \quad (6.5.13)$$

что означает $k \approx k_b$.

Из соотношений (6.5.1) — (6.5.13) получаем

$$\frac{\theta_m(s)}{v_a(s)} = \frac{k}{s [L_a J s^2 + (L_a f + R_a J) s + (R_a f + k k_b)]}. \quad (6.5.14)$$

Если пренебречь величиной L_a как достаточно малой, то будем иметь

$$\frac{\theta_m(s)}{v_a(s)} = \frac{k_m}{s (T_m s + 1)}, \quad (6.5.15)$$

где k_m и T_m — коэффициент передачи двигателя и механическая постоянная двигателя соответственно. Полагая $L_a \approx 0$ в (6.5.14) и используя (6.5.15), получаем

$$k_m = (R_a f + k k_b)^{-1} k, \quad (6.5.16)$$

$$T_m = (R_a f + k k_b)^{-1} R_a J. \quad (6.5.17)$$

Обозначим отношение $\theta_m(s)/v_a(s)$ через $T(s)$ — передаточную функцию. Необходимо регулировать напряжение якоря для управления моментом. Это осуществляется неявно за счет изменения подаваемого тока якоря, потому что момент зависит от тока якоря i_a согласно равенству (6.5.12). Такую функцию выполняет усилитель, как объяснялось в разд. 6.6. Однако на данном этапе было бы удобно записать соотношение (6.5.15) через входной момент $T_m(s)$. Таким образом, из формулы (6.5.10) мы заключаем, что

$$\frac{\theta_m(s)}{\tau_m(s)} = \frac{1}{s (J s + f)}. \quad (6.5.18)$$

Из формулы (6.5.15) и (6.5.18) видно, что

$$\frac{\tau_m(s)}{v_a(s)} = \frac{k_m s (J s + f)}{s (T_m s + 1)} \quad (6.5.19)$$

— это выражение для передаточной функции момент — напряжение якоря, используемой для управления роботом.

В силу сложности динамической модели мы сначала рассматриваем задачу управления с одной осью, а затем пытаемся обобщить ее на более сложные случаи. Рассмотрим опять рис. 6.1.1 и предположите, что время преобразования АЦП и время обновления сигналов, поступающих на ЦАП, малы по сравнению с наименьшей постоянной времени усилителя. Это допущение необходимо для того, чтобы рассматривать систему как систему с непрерывным временем. Будем далее полагать, что разрешение АЦП и ЦАП достаточно высоко, так что можно пренебречь ошибкой квантования, т. е. при таких условиях регулятор может задавать $\theta^{(d)}(t)$ и восстанавливать $\mathbf{u}(t)$ достаточно быстро. Это приводит к тому, что $\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t)$ и $\hat{\theta}^{(a)}(t) = \theta^{(a)}(t)$ на рис. 6.1.1. В следующем разделе мы рассмотрим систему управления, связанную с усилителем на рис. 6.1.1.

6.6. СТРУКТУРА УПРАВЛЯЮЩЕЙ ЧАСТИ УСИЛИТЕЛЯ

Рассмотрим схему усилителя привода, показанную на рис. 6.6.1. Заметим, что $\hat{\mathbf{u}}(t)$ — мгновенный командный сигнал момента, и, таким образом, контур привода должен регулировать

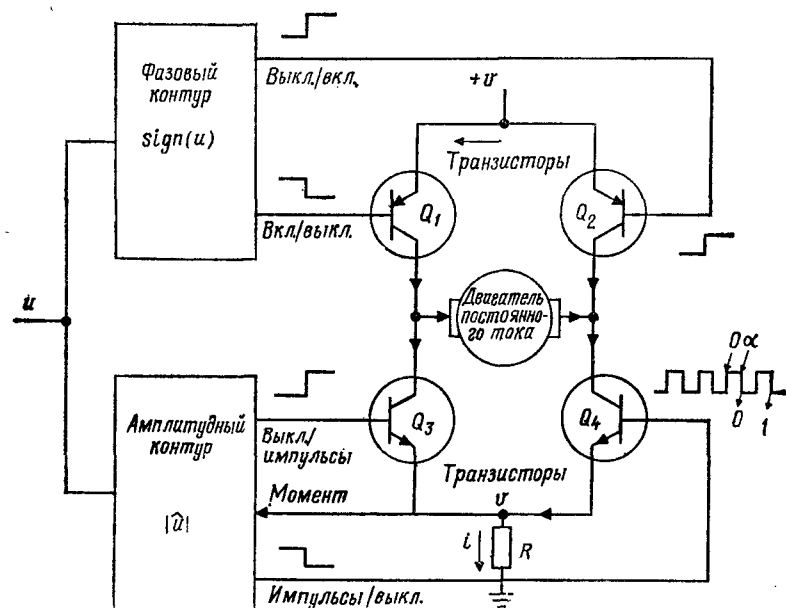


Рис. 6.6.1. Двухплечевой контур привода двигателя постоянного тока.

ток двигателя с использованием $\hat{u}(t)$ в качестве уставки. Типичная диаграмма для такой управляющей системы с использованием широтно-импульсной модуляции (ШИМ) и транзисторного моста показана на рис. 6.6.1.

Силовые транзисторы Q_1 , Q_2 , Q_3 и Q_4 являются элементами мостовой схемы, так что Q_1 и Q_2 определяют направление тока через обмотку возбуждения двигателя. В каждый момент времени t один из этих транзисторов открыт, а другой закрыт. Менее мощные транзисторы Q_3 и Q_4 определяют величину тока, протекающего через обмотку возбуждения. Таким образом, Q_3 и Q_4 управляют величиной момента, открываясь и закрываясь со скважностью α , где в идеальном случае

$$\alpha = |\hat{u}| / \tau_{\max}. \quad (6.6.1)$$

Вспомните, что $\tau_m = k i_a = k(v/R)$ согласно рис. 6.6.1. Таким образом, τ_{\max} — максимально возможный момент, который может развить двигатель. Это соответствует полностью открытым транзисторам Q_1 и Q_4 либо Q_2 и Q_3 . Следовательно, управляя скважностью α , можно получить различные величины момента в диапазоне $0 \leq |\hat{u}| \leq \tau_{\max}$. Обратите внимание, что изменение

скважности α за счет изменения $|\hat{u}|$ — это одна из форм широтно-импульсной модуляции (ШИМ).

Период ШИМ-сигнала $u(t)$, подаваемого на Q_3 или Q_4 , должен быть мал по сравнению с постоянными времени двигателя постоянного тока. Рассмотрим теперь стационарную разомкнутую модель контура привода. В этом случае развиваемый момент τ пропорционален току возбуждения i_a , который в свою очередь пропорционален измеряемому падению напряжения v на токочувствительном сопротивлении R . Следовательно, $\tau = k_1(v/R)$,

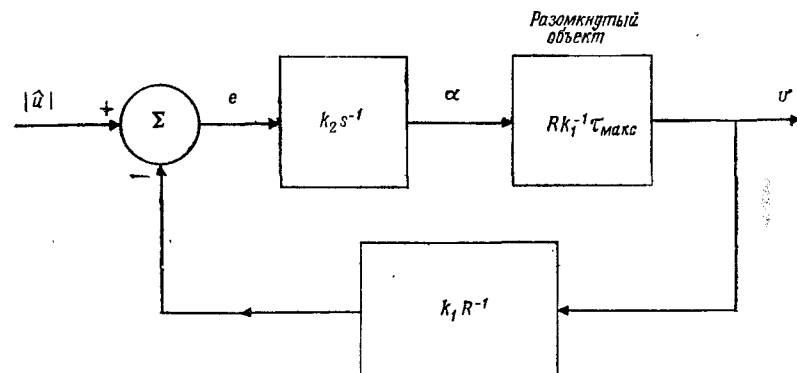


Рис. 6.6.2. Замкнутое управление моментом.

где k_1 — коэффициент пропорциональности. Измерительное сопротивление обычно очень мало ($R \ll 1$) и, таким образом, пропускает большой ток, а значит и большую мощность (Ri^2). Следовательно, оно обычно является сопротивлением большой мощности. Из формулы (6.6.1) можно заметить, что желаемый момент $|\hat{u}|$ задается с помощью выражения $|\hat{u}| = \alpha \tau_{\max}$ и, таким образом, $0 \leq \alpha \leq 1$. В стационарном случае развиваемый момент равен желаемому моменту, т. е. $\tau = |\hat{u}|$. Следовательно, для разомкнутого случая передаточная функция контура усилителя привода в установившемся состоянии ($s = 0$) равна

$$\frac{v}{\alpha} = \frac{R \tau_{\max}}{k_1}. \quad (6.6.2)$$

Чтобы получить замкнутый контур привода, необходимый для отслеживания изменений уставки момента $|\hat{u}|$, можно завести измеряемый момент $k_1 v/R$ в обратную связь и использовать регулятор по интегральной ошибке с коэффициентом передачи k_2 , как показано на рис. 6.6.2.

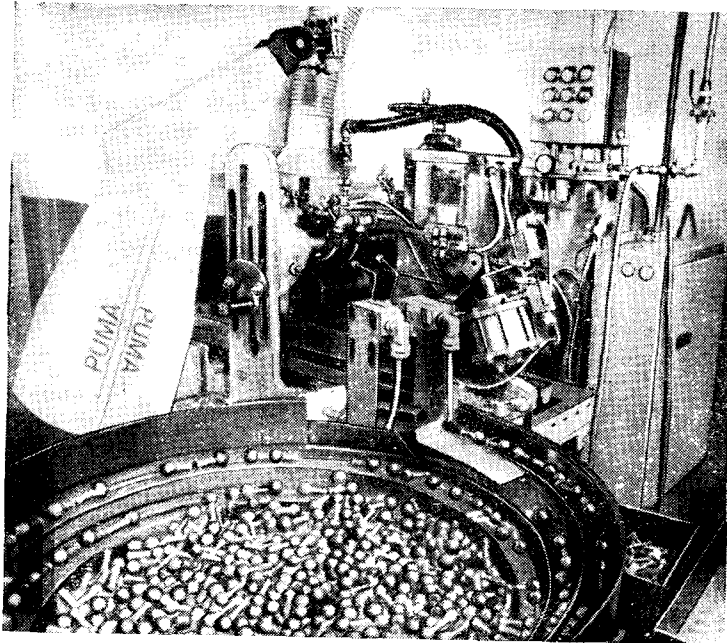


Рис. 6.6.3. Управление движением робота при сборке.

Обратите внимание, что интегральное управление необходимо для получения нулевой установившейся ошибки отслеживания ступеньки $\hat{\mathbf{u}}$. Передаточная функция этой системы управления первого типа может быть представлена в виде

$$\frac{V(s)}{W(s)} = Rk_1^{-1} \left(\frac{k_2 \tau_{\max}}{s + k_2 \tau_{\max}} \right), \quad (6.6.3)$$

где $V(s) = Lv$ и $W(s) = L|\hat{\mathbf{u}}|$. Теперь в установившемся режиме ($s = 0$) имеем $v = R|u|k_1^{-1}$. Таким образом, развиваемый момент τ в данном случае равен желаемому моменту $|\hat{\mathbf{u}}|$.

Если выбрать коэффициент передачи регулятора k_2 достаточно большим, постоянная времени регулятора момента $1/k_2 \tau_{\max}$ может стать малой по сравнению с постоянными времени двигателя постоянного тока. При этих условиях контур момента привода имеет достаточное быстродействие, так что он может быть представлен усилителем с единичным коэффициентом передачи в установившемся режиме ($\tau = |\hat{\mathbf{u}}|$).

В табл. 6.6.1 приведено два множества значений для двух серводвигателей, используемых в станфордском роботе.

Таблица 6.6.1 Параметры типичных серводвигателей

Модель	A	B
k_1 (фунт·дюйм/А)	6.1	14.4
J_0 (фунт·дюйм·с ² /рад)	0.008	0.0033
B_m (фунт·дюйм·с/рад)	0.01146	0.04297
k_b (В·с/рад)	0.04297	0.10123
L (мкГн)	100	100
R (Ом)	1.025	0.91
k_f (В·с/рад)	0.02149	0.5062
\hat{f}_m (фунт·дюйм)	6.0	6.0
n	0.01	0.01

6.7. УПРАВЛЕНИЕ ОДНООСНОЙ РУКОЙ РОБОТА

Рассмотрим одноосную руку с ПД-регулятором. Схематично это показано на рис. 6.7.1. Здесь $\theta^{(d)}(t)$ — семейство желаемых траекторий и $\theta^{(a)}(t)$ — семейство измеряемых траекторий. Заметим, что $\mathbf{u}(t)$ — сигнал вектора управления моментом и $\mathbf{d}(t)$ —

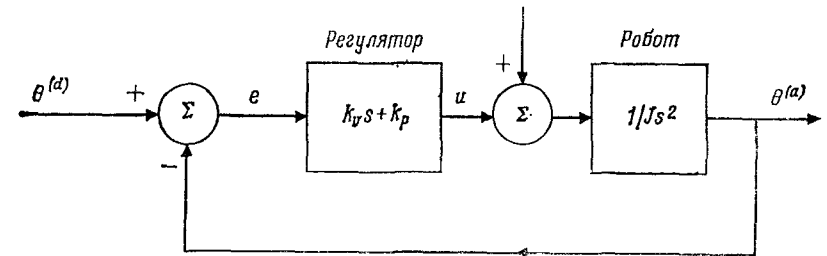


Рис. 6.7.1. Пропорционально-дифференциальный регулятор.

вектор возмущающего момента. Как рассматривалось раньше, передаточная функция замкнутого контура при отсутствии возмущений ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$) равна

$$\frac{\theta^{(a)}(s)}{\theta^{(d)}(s)} = \frac{k_D s + k_P}{J s^2 + k_D s + k_P}. \quad (6.7.1)$$

Пример 6.7.1

Требуется вывести уравнение (6.7.1).

Решение. Из формулы (6.2.3) видно, что

$$T(s) = \frac{\theta^{(a)}(s)}{\theta^{(d)}(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)},$$

поскольку $H(s) = 1$. Здесь мы замечаем, что $G(s) = (k_v s + k_p) / Js^2$. Следовательно,

$$\frac{\theta^{(a)}(s)}{\theta^{(d)}(s)} = \frac{(k_v s + k_p) / Js^2}{1 + (k_v s + k_p) / Js^2} = \frac{k_v s + k_p}{Js^2 + k_v s + k_p}, \quad \blacksquare \blacksquare$$

что и требовалось доказать.

Уравнение (6.7.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\theta^{(a)}(s)}{\theta^{(d)}(s)} = \frac{(k_v/J)s + (k_p/J)}{s^2 + (k_v/J)s + k_p/J}. \quad (6.7.2)$$

Сравнивая формулы (6.3.2) и (6.7.2), можно увидеть, что собственная частота этой системы второго порядка $\omega_n = \sqrt{k_p/J}$, а коэффициент демпфирования $\xi = k_v/2J\sqrt{k_p/J}$.

Чрезвычайно важно и необходимо обрабатывать команды для робота без перерегулирования. Например, при перемещении вниз перерегулирование может вызвать удар о поверхность. Тем не менее руку следует перемещать как можно быстрее для обеспечения минимального времени выполнения задачи. Это означает, что $\xi = 1$ является наиболее подходящим значением. Таким образом, коэффициенты передачи регулятора k_v и k_p , входящие в формулу (6.7.2), должны выбираться так, чтобы

$$k_p = J\omega_n^2, \quad (6.7.3)$$

$$k_v = 2\sqrt{Jk_p}. \quad (6.7.4)$$

Это означает, что система обладает критически демпфированным откликом. Однако сложность при таком виде отклика заключается в том, что оба коэффициента передачи регулятора k_p и k_v зависят от момента инерции руки робота, J , который зависит от конфигурации руки; например, если робот движется, J может изменяться в 10 раз¹⁾. Таким образом, мы должны построить регулятор, инвариантный относительно конфигурации. Этого можно достичь масштабированием коэффициентов передачи регулятора k_v и k_p , как показано на рис. 6.7.2.

Пример 6.7.2 ■

Требуется показать, что система управления на рис. 6.7.2 имеет передаточную функцию, не зависящую от J .

¹⁾ Основная сложность, возникающая в этом случае, состоит в том, что рассматриваемая система перестает быть линейной и стационарной, а только для таких систем возможно построение передаточных функций. — Прим. ред.

Решение. Заметим, что в этом случае при отсутствии возмущающего момента

$$G(s) = J(k_v s + k_p) \left(\frac{1}{Js^2} \right) = s^{-2} (k_v s + k_p).$$

Следовательно,

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{k_v s + k_p}{s^2 + k_v s + k_p}. \quad \blacksquare \blacksquare$$

Теперь введем вектор возмущений $d(t)$, положим желаемую величину $\theta^{(d)}(t) = 0$ и выразим $\theta^{(a)}(s)$ через $d(s)$. Получим сле-

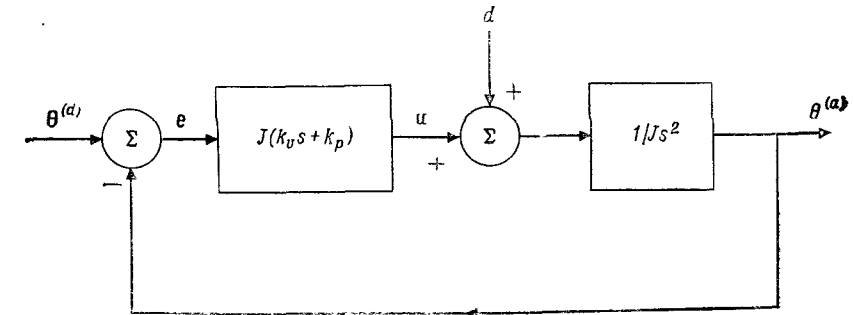


Рис. 6.7.2. ПД-регулятор, инвариантный относительно конфигурации.

дующую передаточную функцию возмущения $T_d(s)$:

$$T_d(s) = \frac{\theta^{(a)}(s)}{d(s)} = \frac{1}{Js^2 + Jk_v s + Jk_p}. \quad (6.7.5)$$

Пример 6.7.3 ■

Требуется получить выражение (6.7.5) для передаточной функции $T_d(s)$.

Решение. Блок-схема для этого случая ($\theta^{(d)} = 0$) показана на рис. 6.7.3. Наша задача заключается в том, чтобы найти передаточную функцию $T_d(s) = [\theta^{(a)}(s)/d(s)]$.

Заметим, что рассматриваемая система похожа на систему с обратной связью общего вида, показанную на рис. 6.3.1, где

$$G(s) = \frac{1}{Js^2} \quad \text{и} \quad H(s) = J(k_v s + k_p). \quad (6.7.6)$$

Поскольку добавляются сигналы e и d , $T_d(s)$ имеет вид

$$T_d(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1/Js^2}{1 + J(k_v s + k_p)/Js^2}. \quad (6.7.7)$$

Окончательно

$$T_d(s) = \frac{1}{Js^2 + Jk_v s + Jk_p} \quad (6.7.8)$$

В этом случае опять $\theta^{(d)} = 0$, и отклик руки робота на возмущающий момент может быть критически демпфированным, так как

$$Jk_p = J\omega_n^2 \rightarrow k_p = \omega_n^2, \quad (6.7.9)$$

$$Jk_v = 2J\delta\omega_n \rightarrow k_v = 2\delta\omega_n. \quad (6.7.10)$$

Если $\delta = 1$, то в регуляторе легко достичь $k_v = 2\sqrt{k_p}$. Кроме того, для единичного ступенчатого возмущения функция отклика равна $(Jk_p)^{-1}$.

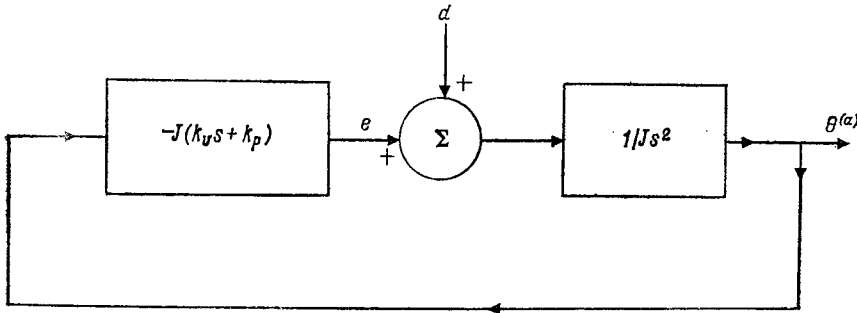


Рис. 6.7.3. Регулятор с нулевым входом и возмущениями.

При отсутствии механических несовершенств конструкции руки робота, таких как люфты, зазоры, трение передач, эксцентриситет, несбалансированность и собственные колебания, основным возмущением будет смещение центров тяжести. Таким образом, вес руки может создавать возмущающий момент, который должен быть компенсирован. Это особенно справедливо для плечевого и локтевого сочленений, в случае когда рука распрямляется. При этом приходится к сочленению прикладывать момент, равный и противоположно направленный общей гравитационной нагрузке d_g на сочленение. Это приводит к системе управления, показанной на рис. 6.7.4.

Пример 6.7.4

Требуется показать, что гравитационный возмущающий момент может быть представлен как $s^{-1}d_g$.

Решение. Заметим, что если гравитационный возмущающий момент d_g не зависит от времени, его преобразование Лапласа

будет иметь вид

$$\int_0^{\infty} d_g e^{-st} dt = -\frac{d_g}{s} \int_0^{\infty} d(e^{-st}) = \frac{d_g}{s} = s^{-1}d_g. \quad (6.7.11)$$

Если же гравитационный возмущающий момент является функцией времени, т. е. $d_g = d_g(t)$, то вместо $s^{-1}d_g$ должно быть подставлено $d_g(s)$.

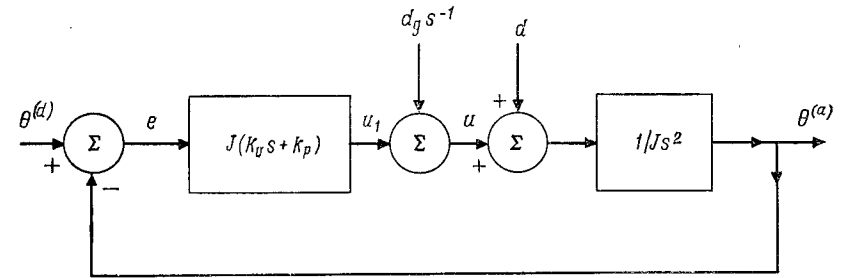


Рис. 6.7.4. Регулятор с компенсацией возмущающих моментов, возникающих из-за силы тяжести (управление роботом с компенсацией силы тяжести).

Не зависящие от силы тяжести возмущения (момент) в таком случае представляются остаточным моментом $d_r(s)$, таким, что

$$d_r(s) = d(s) - d_g(s). \quad (6.7.12)$$

Очевидно, что изображение ошибки $e(s)$ выражается как $e(s) = \theta^{(d)}(s) - \theta^{(a)}(s)$, так что

$$e(s) = \theta^{(d)}(s) \left(\frac{s^2}{s^2 + k_v s + k_p} \right) + d_r(s) \left(\frac{1}{Js^2 + Jk_v s + Jk_p} \right). \quad (6.7.13)$$

Идея заключается в том, чтобы свести к нулю ошибку $e(s)$ за минимальное время, не вызывая при этом какого-либо замедления (задержки) или перерегулирования в отклике. Таким образом, приходится компенсировать влияние первого члена правой части уравнения (6.7.13). Для этого следует добавить регулятор s^2 параллельно регулятору $k_v s + k_p$ на рис. 6.7.4, так что получится рис. 6.7.5. Следовательно, формула (6.7.13) принимает вид

$$e(s) = d_r(s) \left(\frac{1}{Js^2 + Jk_v s + Jk_p} \right). \quad (6.7.14)$$

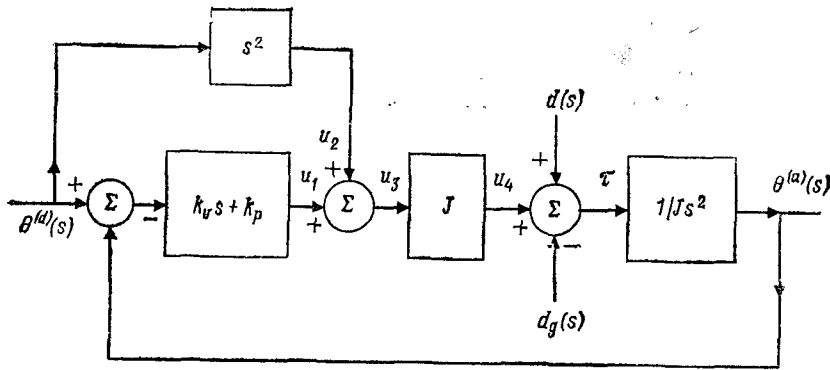


Рис. 6.7.5. Регулятор с компенсацией ускорения.

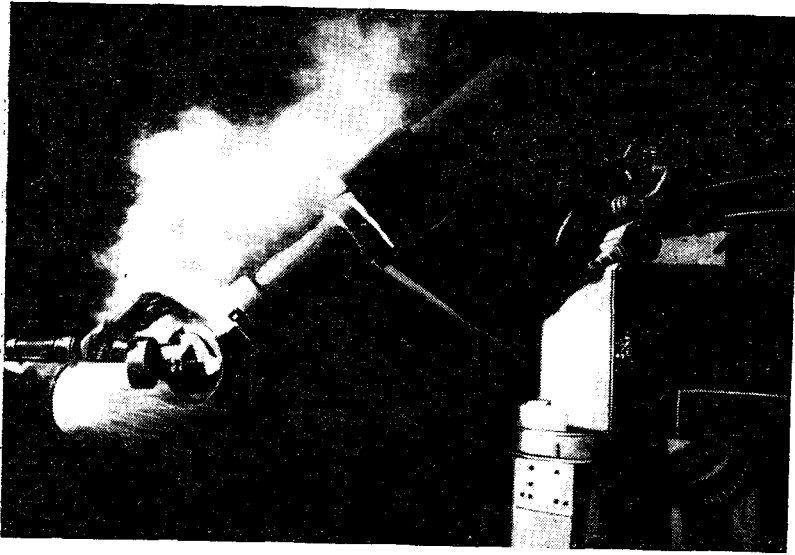


Рис. 6.7.6. Управление плазменной резкой. (С разрешения Cincinnati Milacron.)

Окончательно

$$\frac{\theta^{(a)}(s)}{\theta^{(d)}(s)} \Big|_{d_r=0} = \frac{s^2 + k_v s + k_p}{s^2 + k_v s + k_p} = 1. \quad (6.7.15)$$

Подводя итоги, можно сказать следующее: ПД-регулятор (рис. 6.7.1) может обеспечить независимость от конфигурации (рис. 6.7.2), компенсировать составляющую силы тяжести (рис. 6.7.3) и включать форсирующий компенсатор по ускорению в прямой цепи (рис. 6.7.5). Закон управления, соответствующий рис. 6.7.5, может быть записан в виде

$$\tau(t) = J [\ddot{\theta}^{(d)}(t) + k_v (\dot{\theta}^{(d)} - \dot{\theta}^{(a)}) + k_p (\theta^{(d)} - \theta^{(a)})] + d_r(t). \quad (6.7.16)$$

Первый член представляет компенсацию ускорения, два средних члена отражают пропорционально-дифференциальный (ПД) закон и последний член представляет собой гравитационный момент. Параметры k_v и k_p считаются константами, тогда как J и d_g существенно зависят от конфигурации; другими словами, они зависят от θ_i . Уравнение (6.7.16) в действительности представляет собой нелинейный закон управления, потому что $J = J(\theta_i)$ и $d_r = d_r(\theta_i)$. Для каждого сочленения i уравнение (6.7.16) может быть переписано в виде

$$\tau_i(t) = J_i [\ddot{\theta}_i^{(d)}(t) + k_v (\dot{\theta}_i^{(d)} - \dot{\theta}_i^{(a)}) + k_p (\theta_i^{(d)} - \theta_i^{(a)})] + d_{r_i}(t). \quad (6.7.17)$$

6.8. ОБОБЩЕННЫЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

Возвращаясь к уравнению (6.7.17), мы видим, что коэффициенты передачи J и d , являются переменными, зависящими от конфигурации. Следовательно, в общем случае нужно рассматривать полную динамику руки робота. Запишем теперь уравнения динамики для многоосных манипуляционных роботов в компактном виде для последующего использования в рамках общего подхода к задаче управления:

$$\tau = \mathbf{M}(\theta) \ddot{\theta} + \mathbf{V}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{G}(\theta), \quad (6.8.1)$$

где \mathbf{M} — матрица масс размера $n \times n$, \mathbf{V} — $(n \times 1)$ -вектор центробежных и кориолисовых компонент, а \mathbf{G} — $(n \times 1)$ -вектор гравитационных составляющих.

Как указывалось выше, мы предполагаем использовать нелинейные члены в формуле для формирования момента в цепи обратной связи, временно полагая пренебрежимо малыми эффекты квантования по уровню и по времени, а также время

вычислений:

$$\tau^* = \mathbf{M}(\theta) [\ddot{\theta}_{(d)} + k_v(\dot{\theta}_{(d)} - \dot{\theta}) + k_p(\theta_{(d)} - \theta)] + \mathbf{V}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{G}(\theta), \quad (6.8.2)$$

где τ^* — момент в цепи обратной связи для системы, а k_v и k_p — $(n \times n)$ -диагональные матрицы. Член обратной связи $\mathbf{V}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{G}(\theta)$ является составляющей нелинейного момента в цепи обратной связи, которая должна достаточно быстро вычисляться компьютером, чтобы получилось эффективное управление по обратной связи. Этот метод называется *методом вычисляемого момента*, и время вычисления составляющей нелинейной обратной связи является одной из трудностей для эффективного применения этого метода управления (рис. 6.8.1).

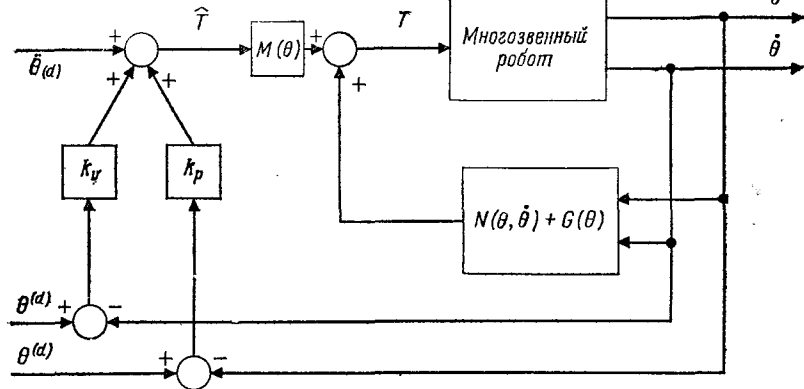


Рис. 6.8.1. Метод вычисления моментов.

Управление (6.8.2) в совокупности с уравнением динамики (6.8.1) приводит к следующему линеаризованному уравнению для управления движением робота с использованием вектора ошибки $\mathbf{e} = (\theta_{(d)} - \theta)$:

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{e}} + k_v \dot{\mathbf{e}} + k_p \mathbf{e}) = 0. \quad (6.8.3)$$

Таким образом, любая ошибка может быть критически демпфируемой, включая также ту, которая появляется при добавлении форсирующей прямой связи по ускорению. То же относится и к типичному ПД-регулятору (см. рис. 6.8.1). Очевидно, что желаемая траектория $\theta_{(d)}(t)$ должна принадлежать классу C_2 для того, чтобы существовала $\ddot{\theta}_{(d)}(t)$. Например, если желаемая траектория должна иметь резкое изменение скорости, то этот метод не пригоден, поскольку $\ddot{\theta}_{(d)}$ может катастрофически расти и создавать неконтролируемый шум в форсирующей цепи. При

использовании указанного метода также требуются значения всей совокупности кинематических и динамических параметров, таких, как размеры звеньев и другие геометрические параметры, коэффициенты трения и инерционные характеристики. Поскольку имеющаяся динамическая модель никогда не бывает совершенной, то такой алгоритм управления никогда не будет очень эффективным, и необходимо делать промежуточную коррекцию. С учетом этого можно определить обобщенный вектор возмущений в виде момента τ_D , так что уравнение для управления принимает вид

$$\ddot{\mathbf{e}} + k_v \dot{\mathbf{e}} + k_p \mathbf{e} = \mathbf{M}^{-1}(\theta) \tau_D. \quad (6.8.4)$$

Это справедливо лишь в том случае, если матрица масс $\mathbf{M}(\theta)$ имеет обратную матрицу $\mathbf{M}^{-1}(\theta)$. Поскольку в общем случае $\mathbf{M}(\theta)$ — несимметричная матрица, то возмущение в любом сочленении может вызвать возмущения в других сочленениях. Кроме того, некоторые возмущения, такие, как наличие различных деталей и инструментов в схвате, заметным образом влияют на матрицу масс $\mathbf{M}(\theta)$ и с трудом поддаются управлению; при этом нужно обратиться к другим стратегиям управления.

Большинство систем управления манипуляторами — цифровые и, следовательно, работают на определенной *тактывой частоте*. Показания датчиков движения могут считываться только в дискретные моменты времени, и только тогда может быть вычислен сигнал управления и послан в двигатели сочленений. Следовательно, необходимо анализировать эффект задержки, вызванной вычислениями, используя методы *управления с квантованием по времени*. Только тогда можно проанализировать задачи устойчивости и расположения полюсов. В любом алгоритме управления с вычислениями обычно требуются очень большие объемы памяти. Например, если диапазоны изменения θ , $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ разбиты на 100 интервалов, то для шестиосного робота объем требуемой памяти равен 10^{36} ячеек. Каждая такая ячейка должна содержать шесть значений момента, что дает 6×10^{36} ячеек памяти. Таким образом, для систем управления роботами крайне желательно было бы добиться некоторого упрощения и уменьшения времени вычислений.

6.9. РАСПРОСТРАНЕННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫМИ РОБОТАМИ

Поскольку промышленные роботы должны быть дешевыми, то нет смысла использовать полные алгоритмы управления из-за высокой стоимости машинного времени. Такой подход оправдан

в силу отсутствия полного знания различных кинематических и динамических параметров. Таким образом, для многих промышленных роботов применяются простые алгоритмы управления, которые обычно работают по ошибке. В следующем подразделе мы коротко опишем некоторые современные алгоритмы управления промышленными роботами.

6.9.1. ПРОСТЫЕ МАНИПУЛЯЦИОННЫЕ РОБОТЫ

Если структура робота достаточно проста, как у роботов типа SCARA, то основные уравнения динамики сильно упрощаются. Для некоторых конструкций кинематика может упроститься, и матрица инерции может стать диагональной, существенно упрощая, таким образом, вычислительные алгоритмы. Кроме того, удаление таких нелинейных эффектов, как люфт в редукторе, сильно упрощает задачу управления. Следовательно, проектирование более простых, но тем не менее более эффективных роботов — это один из путей, по которым идет промышленность.

6.9.2. НЕЗАВИСИМОЕ ПИД-УПРАВЛЕНИЕ СОЧЛЕНЕНИЯМИ

Пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) закон, применяемый к отдельному сочленению, — популярный метод управления для большинства промышленных роботов. Здесь сервомомент задается следующим выражением:

$$\tau^* = \ddot{\theta}_{(d)} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt. \tag{6.9.1}$$

Величины $\ddot{\theta}_{(d)}$ и $\dot{\theta}_{(d)}$ иногда могут быть недоступны для измерения, и закон управления (6.9.1) принимает вид

$$\tau^* = k_v \dot{\theta} + k_p e + k_i \int e dt. \tag{6.9.2}$$

Это иллюстрируется следующим примером.

Пример 6.9.1

Проанализировать устойчивость управляющего алгоритма для ПИД-регулятора, показанного на рис. 6.9.1.

Решение. Блок-схема регулятора изображена на рис. 6.9.1. Рассмотрим двухосный робот с двумя приводами в сочленениях. Первоначальной целью использования пропорциональной позиционной обратной связи является улучшение скорости отклика. Интегральная обратная связь также улучшает скорость отклика и гарантирует отслеживание задающего входного воздействия в установившемся режиме при наличии возмущений. Дифферен-

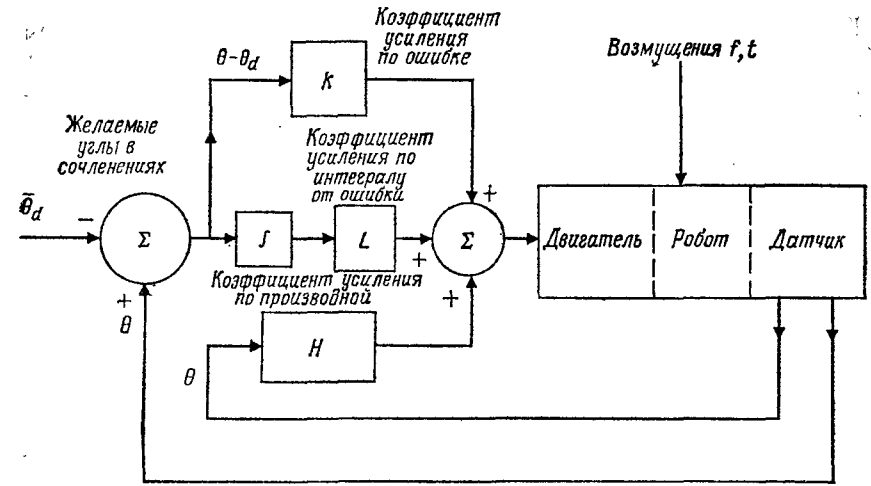


Рис. 6.9.1. ПИД-регулятор для привода сочленения, включая блок-схему типичного привода сочленения.

циальная обратная связь улучшает устойчивость и ослабляет тенденцию к колебаниям. Это именно те свойства, которые требуются для хорошего отклика.

Основные уравнения динамики имеют вид

$$I_{11}\ddot{\theta}_1 + I_{12}\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin \theta_2 - \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) l_1 g \cos \theta_1 + \tau_{0,1} - \tau_{1,2} - (l_1 \cos \theta_1) f_{2,3y} + (l_1 \sin \theta_1) f_{2,3x}, \tag{6.9.3}$$

$$I_{21}\ddot{\theta}_1 + I_{22}\ddot{\theta}_2 = -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 - \frac{1}{2} m_2 l_2 g \cos (\theta_1 + \theta_2) + \tau_{1,2} - \tau_{2,3} - [l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)] f_{2,3y} + [l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)] f_{2,3x}, \tag{6.9.4}$$

где $f_{2,3}$ и $\tau_{1,2}$ — векторы сил и моментов в схвате, $\tau \equiv (\tau_{0,1}, \tau_{1,2})$ — вектор моментов сочленений, а I — матрица инерции. Законы управления в таком случае следуют из равенства (6.9.2), так что

$$\tau_{0,1} = k_{p01} (\theta_1 - \bar{\theta}_{1d}) + k_{i01} e_1 + k_{v01} \dot{\theta}_1, \tag{6.9.5}$$

$$\dot{e}_1 = \theta_1 - \bar{\theta}_{1d} \text{ и } \dot{e}_2 = \theta_2 - \bar{\theta}_{2d}. \tag{6.9.6}$$

$$\tau_{1,2} = k_{p12} (\theta_2 - \theta_{2d}) + k_{i12} e_2 + k_{v12} \dot{\theta}_2. \tag{6.9.7}$$

Теперь для анализа устойчивости ПИД-системы линеаризуем ее в окрестности установившегося состояния $\bar{\theta}_d$ и из уравнений (6.9.3) и (6.9.4) получим следующие линеаризованные уравнения:

$$I_{11}\delta\ddot{\theta}_1 + I_{12}\delta\ddot{\theta}_2 = k_{v01}\delta\dot{\theta}_1 - k_{v12}\delta\dot{\theta}_2 + (I_1^* + k_{p01})\delta\theta - k_{p12}\delta\theta_2 + k_{i01}\delta l_1 - k_{i12}\delta l_2, \quad (6.9.8)$$

$$I_{21}\delta\ddot{\theta}_1 + I_{22}\delta\ddot{\theta}_2 = k_{v12}\delta\dot{\theta}_2 + k_{i12}\delta l_2 + (I_2^* + k_{p12})\delta\theta_2 + I_2^*\delta\theta, \quad \text{где} \quad (6.9.9)$$

$$I_1^* = \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)l_1g \sin \bar{\theta}_{1d}, \quad (6.9.10)$$

$$I_2^* = \frac{1}{2}m_2l_2g \sin (\bar{\theta}_{1d} + \bar{\theta}_{2d}). \quad (6.9.11)$$

Выполняя преобразование Лапласа над уравнениями (6.9.8) и (6.9.9) и полагая детерминант коэффициентов $\delta\theta_1$ и $\delta\theta_2$ равным нулю, получаем следующий характеристический полином:

$$\alpha(s) = \sum_{i=0}^6 \alpha_i s^i = 0, \quad \text{где} \quad (6.9.12)$$

$$\alpha_0 = k_{i01}k_{i12}, \quad (6.9.13)$$

$$\alpha_1 = k_{i12}(k_{p01} + I_1^* + I_2^*) + k_{i01}(k_{p12} + I_2^*), \quad (6.9.14)$$

$$\alpha_2 = k_{i12}k_{v01} + k_{i01}k_{v12} + k_{p12}(k_{p01} + I_1^* + I_2^*) + (k_{p01} + I_1^*)I_2^*, \quad (6.9.15)$$

$$\alpha_3 = k_{p12}(k_{p01} + I_1^* + I_2^*) + k_{v01}(k_{p12} + I_2^*) - k_{i01}I_{22} - k_{i12}k_{i12}I_m, \quad (6.9.16)$$

$$\alpha_4 = k_{v01}k_{p12} - k_{p01}I_{22} - k_{p12}I_m - \left[I_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + m_2\right)l_1^2\right]I_1^*I_2^* - I_1^*I_2^*, \quad (6.9.17)$$

$$\alpha_5 = -k_{v12}I_m - k_{v01}I_{22}, \quad (6.9.18)$$

$$\alpha_6 = I_1I_2 + \left(\frac{1}{4}m_1 + m_2\right)l_1^2l_2^2 + \frac{1}{16}m_1m_2l_1^2l_2^2 + \frac{1}{4}m_2^2l_1^2l_2^2 \sin \bar{\theta}_{2d} \quad \text{и} \quad (6.9.19)$$

$$I_m = I_1 + I_2 + \left(\frac{1}{4}m_1 + m_2\right)l_1^2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos \bar{\theta}_{2d}. \quad (6.9.20)$$

Критерий устойчивости Рауса обеспечивает необходимые и достаточные условия того, чтобы корни этого полинома лежали в левой полуплоскости и, таким образом, гарантировали устойчивость. Эти условия имеют форму неравенств, включающих функции $\alpha_0, \dots, \alpha_6$. Если эти неравенства одновременно удов-

летворяются для некоторых коэффициентов передачи и некоторых значений $(\bar{\theta}_{1d}, \bar{\theta}_{2d})$, то регулятор асимптотически устойчив в малом в том смысле, что достаточно малые начальные состояния $(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\dot{\theta}_1, \delta\dot{\theta}_2, \delta l_1 \text{ и } \delta l_2)$ по истечении некоторого времени станут равными нулю. Условия асимптотической устойчивости могут быть получены для всего множества значений $\bar{\theta}_d$, если воспользоваться этим подходом. ■ ■

6.9.3. НЕЗАВИСИМОЕ ПИД-УПРАВЛЕНИЕ СОЧЛЕНЕНИЯМИ С ЭФФЕКТИВНОЙ ИНЕРЦИЕЙ СОЧЛЕНЕНИЯ

Закон для привода в этом случае записывается как

$$\tau^* = \mathbf{M}^*(\theta) (\ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt), \quad (6.9.21)$$

где $\mathbf{M}^*(\theta)$ — диагональная часть матрицы $\mathbf{M}(\theta)$. Следовательно, сочленения в этой модели независимы, и моменты инерции сочленений зависят от их конфигурации.

Эта модель может быть модифицирована заменой $\mathbf{M}^*(\theta)$ на некоторую другую аппроксимацию истинной матрицы инерции $\mathbf{M}(\theta)$. Заметим, что уравнение для замкнутого контура, определяющее динамику ошибки, в данном случае имеет вид

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = \mathbf{M}^{-1}(\theta) (\mathbf{V} + \mathbf{G}). \quad (6.9.22)$$

Таким образом, в закон управления приводом (6.9.21) можно ввести гравитационный член типа $\mathbf{G}(\theta)$.

6.10. СИЛОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАНИПУЛЯЦИОННЫМИ РОБОТАМИ

При движении по траектории на манипуляционные роботы обычно действуют силы со стороны внешней среды. Следовательно, приходится рассматривать способы регулирования этих сил, не воздействуя при этом на текущее управление движением, особенно если оно недостаточно обеспечивает выполнение задачи роботом. Например, рассмотрим робот, осуществляющий финишную обработку поверхности. Если общая податливость робота, его руки и обрабатываемых деталей очень мала или их общая жесткость очень велика, то трудно использовать позиционную обратную связь для управления силами, необходимыми для финишной обработки поверхности. Вместо этого гораздо проще непосредственно измерять эти силы и использовать обратную связь по силе таким образом, чтобы обеспечить требуемое усилие в схвате. В конечном счете лучше всего управлять

одновременно положением и силой и таким образом построить гибридные регуляторы положения/силы. Для измерения сил нужно использовать шестикомпонентные силовые датчики либо тактильные датчики, которые выдают напряжение, пропорциональное приложенной силе. Напряжение затем может быть оцифровано и использовано в ЭВМ для управления движением робота.

6.10.1. ТИПЫ ДАТЧИКОВ СИЛ

В силовых датчиках используются тензоэлементы, преобразователи давления и пьезоэлектрические элементы, такие как пьезокерамические PZT, которые вырабатывают напряжение или ток, пропорциональные деформации или силе. На манипуляторе есть три места, куда можно помещать датчики сил или моментов. Прежде всего, это приводы сочленений; в этом случае удобнее осуществлять управление, чем контактные измерения. Второе место — запястье, поскольку здесь можно разместить многокомпонентные (от трех до шести) силомоментные датчики. Третье место находится на кончиках пальцев манипулятора; здесь можно обеспечить тактильное ощущение.

6.10.2. СПОСОБЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО СИЛЕ

Существует два основных способа управления по силе: логическое ветвление по событиям и непрерывное управление по силе, основанное на приращениях.

При логическом ветвлении алгоритм управления воспринимает событие, такое, как столкновение, с тем чтобы определить, что величина силы или момента превысила определенный предел. Таким образом осуществляется изменение движения (ветвление).

Непрерывное управление по силе подразделяется на две категории — *чистое* и *комбинированное*. В обоих случаях сначала измеряется сила, а затем перемещается инструмент. Математически это выглядит следующим образом:

$$\begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{matrix} \begin{bmatrix} \text{Новый} \\ \text{командный} \\ \text{вектор} \\ \text{скорости} \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \times 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \text{Матрица} \\ \text{обратной связи} \\ \text{по силе} \\ \text{(матрица} \\ \text{регулирующая)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \times 6 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \text{Измеряемый} \\ \text{вектор} \\ \text{силы}^1 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{matrix} \begin{matrix} 6 \times 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

¹⁾ Здесь имеется в виду обобщенный вектор силы, объединяющий вектор силы и вектор момента. — *Прим. ред.*

6.10.3. УПРАВЛЕНИЕ МОМЕНТОМ ПОДАТЛИВОЙ РУКИ

Рассмотрим управление силами, приложенными к руке при наличии определенной податливости в сочленении или в руке (рис. 6.10.1). Заметим, что существует неизвестная возмущающая сила \mathbf{f} , которая может возникать из-за столкновений с другими объектами, трения, заклиниваний в механической части

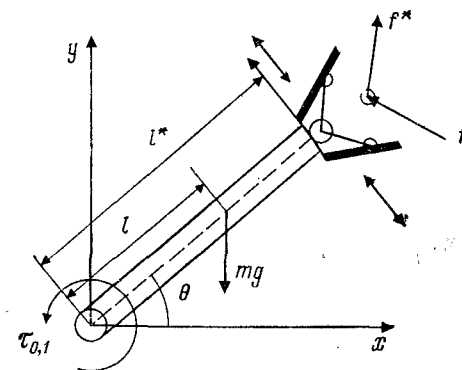


Рис. 6.10.1. Податливая рука робота.

и других эффектов. Мы хотим управлять силой \mathbf{f}^* , действующей на податливое окружение, т. е.

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{k}_e \mathbf{x}, \quad \text{где } |\mathbf{x}| = l^* \theta. \quad (6.10.1)$$

Основное уравнение при отсутствии трения имеет вид

$$\tau_{0,1} = ml^2 \ddot{\theta} + mlg \cos \theta - k_e l^2 \theta - f l^*. \quad (6.10.2)$$

Выражая члены этого уравнения через \mathbf{f}^* , получаем

$$\tau_{0,1} = ml^2 k_e^{-1} (l^*)^{-1} \dot{\mathbf{f}}^* + mlg \cos [k_e^{-1} (l^*)^{-1} \mathbf{f}^*] - \mathbf{f}^* l^* - f l^*. \quad (6.10.3)$$

Допустим, мы используем желаемую силу \mathbf{f}_d^* , так что $e = \mathbf{f}_d^* - \mathbf{f}^*$ — рассогласование между желаемой и измеряемой силами. Тогда закон управления приводом может иметь следующий вид:

$$\tau_{0,1} = ml^2 k_e^{-1} (l^*)^{-1} (\dot{\mathbf{f}}_d^* + k_v e + k_p e) + mlg \cos [k_e^{-1} (l^*)^{-1} \mathbf{f}^*] - \mathbf{f}^* l^* - f l^*. \quad (6.10.4)$$

Таким образом, уравнение, описывающее поведение рассогласования сил, принимает вид

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0. \quad (6.10.5)$$

Эта система может быть критично демпфируемой для любого рассогласования сил, если известна величина f в любой момент на заданном интервале времени.

6.11. АНАЛИЗ ОШИБКИ СЛЕЖЕНИЯ

Ошибка слежения — это разница между планируемой траекторией $\theta^{(d)}$ и действительной траекторией $\theta^{(a)}$. Разумеется, сюда же входят $\dot{\theta}^{(d)}$, $\dot{\theta}^{(a)}$, $\ddot{\theta}^{(d)}$ и $\ddot{\theta}^{(a)}$. Когда рука манипулятора удерживается в фиксированном положении, можно определить статическую ошибку как разность между планируемыми конечными точками и действительными конечными точками. Следует подчеркнуть, что главными источниками рассогласования являются неточности, вносимые управляющими уравнениями динамики. В таком случае

$$\tau(t) = J \cdot (\ddot{\theta}^{(d)} - \ddot{\theta}^{(a)}) + Jk_v \cdot (\dot{\theta}^{(d)} - \dot{\theta}^{(a)}) + Jk_p \cdot (\theta^{(d)} - \theta^{(a)}) + G(\theta). \quad (6.11.1)$$

В уравнении (6.11.1) не учитывается влияние кориолисовых и центробежных ускорений. Более точное отслеживание может быть достигнуто при сохранении членов, относящихся к ускорению:

$$\tau(t) = J \cdot (\ddot{\theta}^{(d)} - \ddot{\theta}^{(a)}) + Jk_v \cdot (\dot{\theta}^{(d)} - \dot{\theta}^{(a)}) + Jk_p \cdot (\theta^{(d)} - \theta^{(a)}) + G(\theta) + H(\theta, \dot{\theta}). \quad (6.11.2)$$

Приведенное выше уравнение трудно использовать, потому что при наличии $H(\theta, \dot{\theta})$ объем вычислений очень большой.

Ниже описан алгоритм управления динамикой руки робота, основанный на использовании формулы (6.11.2).

Алгоритм 6.11.1. Чтобы обеспечить управление динамикой руки робота, предлагается использовать уравнение (6.11.2) следующим образом.

1. Постройте вашу траекторию как 4—3—4 либо 3—5—3.
2. Начиная управление динамикой путем проверки величины $|\theta^{(d)} - \theta_{\text{конечн}}^{(a)}| < \epsilon$.
3. Оцифруйте $\theta_i^{(a)}(t)$ и $\theta_i^{(d)}(t)$ для всех i .
4. Преобразуйте $\theta_i^{(a)}(t)$ и $\theta_i^{(d)}(t)$ в углы сочленений в радианах.
5. Вычислите $\ddot{\theta}_i^{(a)} = [\dot{\theta}_i^{(a)}(t) - \dot{\theta}_i^{(a)}(t-1)]/\Delta t$.
6. Вычислите ошибку $e = \theta^{(d)} - \theta^{(a)}$, $\dot{e} = \dot{\theta}^{(d)} - \dot{\theta}^{(a)}$ и $\ddot{e} = \ddot{\theta}^{(d)} - \ddot{\theta}^{(a)}$.
7. Вычислите нелинейные члены типа $D(\theta)$, $H(\theta, \dot{\theta})$, $G(\theta)$, k_p и k_v для всех i .
8. Вычислите требуемый момент для каждого сочленения.

9. Преобразуйте требуемый момент к требуемому входному напряжению двигателя.

10. Подайте напряжение на двигатель через ЦАП и усилитель.

11. Увеличьте содержимое счетчика на единицу времени.

12. Вычислите $\theta^{(d)}$, $\dot{\theta}^{(d)}$ и $\ddot{\theta}^{(d)}$ для нового времени.

13. Выполняйте цикл, пока он не закончится или ошибка не обратится в нуль.

14. Перейдите к шагу 2 (заново).

6.12. КООРДИНИРУЕМОЕ ДВИЖЕНИЕ

Планируемая траектория $\theta^{(d)}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, формирует *непрерывный* путь, который схват должен пройти в рабочей области. В таких приложениях, как сварка, распылительная окраска и автоматическая резка, непрерывность движения существенна. С другой стороны, необходимо также тщательно планировать скорость и ускорение конца схвата или конца инструмента. Это требует точного управления скоростью и ускорением всех приводов сочленений, которые перемещают оси. В таких приложениях, как точечная сварка, складирование, раскройка материалов, достаточно *движения от точки к точке*. Однако в этих приложениях хочется минимизировать время перехода схвата между точками. Чтобы обеспечить быстрое скоординированное движение схвата от $\theta(t_0)$ до $\theta(t_1)$, рассмотрим два следующих основных случая.

1. *Регулятор переменной скорости.* Рассмотрим привод в i -м сочленении. Допустим, что скорость $\dot{\theta}_i(t)$ может управляться регулятором независимо. Пусть $\omega_{\text{макс}}$ — максимально возможная скорость и $(\Delta\theta)_{\text{макс}}$ — максимальный угол, на который нужно переместиться, т. е.

$$(\Delta\theta)_{\text{макс}} = \max_{t=1}^5 \{ |\theta_i(t) - \theta_i(t_0)| \}. \quad (6.12.1)$$

Идея состоит в том, чтобы переместить ось, которой соответствует наибольший $\Delta\theta$, на максимально возможной скорости $\omega_{\text{макс}}$, с тем чтобы минимизировать время перемещения между двумя точками. Чтобы скоординировать движение, нужно перемещать остальные оси с меньшими скоростями (пропорционально значениям $\Delta\theta$), чтобы все оси начали и закончили движение одновременно в моменты t_0 и t_1 соответственно. Можно добиться этого, потребовав выполнения следующего алгоритма управления скоростью:

$$\dot{\theta}_i(t) = \frac{\omega_{\text{макс}}}{(\Delta\theta)_{\text{макс}}} [\theta_i(t_1) - \theta_i(t_0)]. \quad (6.12.2)$$

Регуляторы скорости должны обеспечивать различные скорости для разных приводов сочленений, что эквивалентно наличию полинома первой степени для движения каждого сочленения. Регуляторы должны быть сконструированы так, чтобы обеспечивать разгон до ω_{\max} , а также останов в конце движения за минимальное время.

2. *Регулятор постоянной скорости.* Если регулятор является так называемым *релейным регулятором*, то каждый привод сочленения всегда может быть только в одном из следующих состояний: а) полный вперед; б) полный назад; в) останов. Система управления Rhino XR-2 обеспечивает именно такой способ регулирования. Средняя скорость в этом случае регулируется выбором полного времени, в течение которого включен привод данного сочленения. Ось, которой соответствует наибольший угол, будет двигаться с полной скоростью в течение всего временного интервала $[t_0, t_1]$, что соответствует минимальному времени перемещения. Для получения координированного движения желательно перемещать остальные оси на полной скорости в течение пропорционально более коротких подынтервалов, принадлежащих $[t_0, t_1]$, чтобы все оси завершили движение в заданное время. Можно включить все двигатели одновременно и затем выключить их по отдельности по мере завершения соответствующего движения. С другой стороны, может возникнуть желание отложить запуск каждого двигателя с тем расчетом, чтобы все оси закончили движение одновременно. К сожалению, такие методы приводят к большим кратковременным токам через источник питания и регулятор. Это вызвано тем, что все приводы сочленений либо одновременно включаются, либо одновременно выключаются на полном ходу. Другая возможность состоит в том, чтобы включить каждый привод сочленений на подынтервале интервала $[t_0, t_1]$. Таким образом можно исключить трудности, связанные с кратковременными токами из-за больших общих выбросов. Различные варианты включения двигателей для шестиосного манипулятора показаны на рис. 6.12.1. Мы произвольно положили $\theta_1(t_1) - \theta_1(t_0)$ равным максимальному перемещению $\Delta\theta$ и, таким образом, приписали $t_1 - t_0$ приводу сочленения 1.

На рис. 6.12.2 и 6.12.3 показаны типичные ситуации, соответствующие стратегиям координированного движения по останову и стратегиям с симметричным движением соответственно. Как можно увидеть на рис. 6.12.3, приводы сочленений включаются или выключаются в различные моменты времени, и, следовательно, никаких сильных кратковременных токов не возникает. Здесь мы можем получить простые выражения для времени включения $t_0^{(k)}$ и времени выключения $t_1^{(k)}$ k -го привода

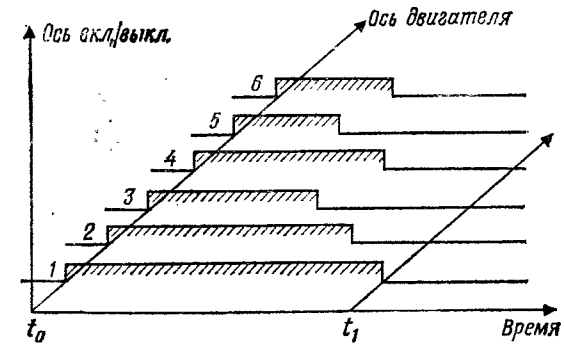


Рис. 6.12.1. Релейный регулятор с выравниванием по старту.

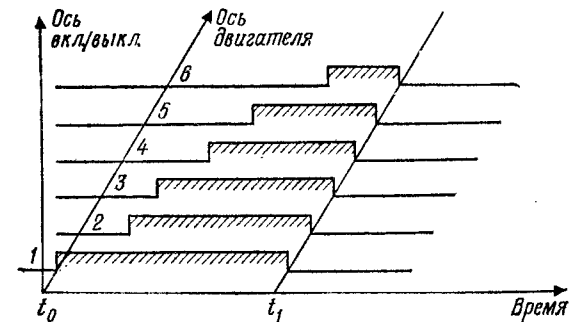


Рис. 6.12.2. Релейный регулятор с выравниванием по останову.

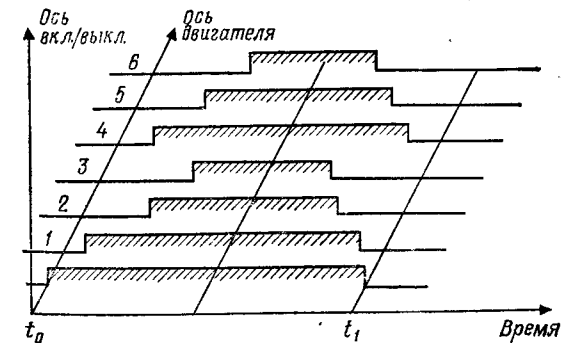


Рис. 6.12.3. Релейный регулятор с симметричным выравниванием движения.

сочленения. Эти выражения имеют вид

$$t_0^{(k)} = t_0 + \left(\frac{1 - |\theta_k(t_1) - \theta_k(t_0)| / (\Delta\theta)_{\max}}{2} \right) (t_1 - t_0), \quad (6.12.3)$$

$$t_1^{(k)} = t_0 + \left(\frac{1 + |\theta_k(t_1) - \theta_k(t_0)| / (\Delta\theta)_{\max}}{2} \right) (t_1 - t_0). \quad (6.12.4)$$

Отметим, что для двигателя с максимальным углом поворота $\theta_k(t_1) - \theta_k(t_0)$ имеют место соотношения $t_0^{(k)} = t_0$ и $t_1^{(k)} = t_1$. С другой стороны, если для каждого привода сочленения $\theta_k(t_1) - \theta_k(t_0) = 0$, то времена старта и останова из уравнений (6.10.3) и (6.10.4) получаются равными

$$t_0^{(k)} = t_0 + \frac{1}{2} (t_1 - t_0) = \frac{t_1 + t_0}{2}, \quad (6.12.5)$$

$$t_1^{(k)} = t_0 + \frac{1}{2} (t_1 - t_0) = \frac{t_1 + t_0}{2}, \quad (6.12.6)$$

и, следовательно, сочленение k перестанет двигаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bejczy A. K., Robot Arm Dynamics and Control, Technical Memorandum 33-669, NASA-Jet Propulsion Laboratory, 1974.
2. Koditschek D., Natural Motion for Robot Arms, Proceedings of the 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas, pp. 733-735, 1984.
3. Lee C. S. G., Chung M. J., An Adaptive Control Strategy for Computer-based Manipulators, Proceedings of the 21st Conference on Decision and Control, Tucson, pp. 95-100, 1982.
4. Luh J. Y. S., Conventional Controller Design for Industrial Robots — A Tutorial, *IEEE Trans. Syst. Man Cybernet.*, SMC-13(3), 298-316, 1983.
5. Luh J. Y. S., Walker M. W., Paul R. P., Resolved Acceleration Control of Mechanical Manipulators, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-25(3), 468-474, 1980.
6. Markiewicz W. R., Analysis of the Computed Torque Drive Method and Comparison with Conventional Position Servo for a Computer-Controller Manipulator, Technical Memorandum 33-601, NASA-Jet Propulsion Laboratory, 1973.
7. Ogata K., Modern Control Engineering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
8. Paul R., Modeling, Trajectory Calculation, and Servoing of a Computer-Controller Arm, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, A. I. Memo 177, 1972.
9. Paul R., Robot Manipulator: Mathematics, Programming and Control, M. I. T. Press, Cambridge, MA, 1981.
10. Raibert M. H., Craig J. J., Hybrid Position/Force Control of Manipulators, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 102, 126-133, 1981.
11. Seraji H., Shahinpoor M., Jamshidi M., Perfect Tracking with Application to Robotics, Proceedings of the IASTED Symposium on Robotics, Zurich, 1985.

12. Singh S. N., Schy A. A., Invertibility and Robust Nonlinear Control of Robotic Systems, in Proceedings of the 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas, pp. 1058-1063, 1984.
13. Studenny J., Belanger P. R., Robot Manipulator Control by Acceleration Feedback, Proceedings of the 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas, pp. 1070-1072, 1984.

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Какова передаточная функция $f(s)$ системы управления (рис. 36.1) с форсирующим ускорением, которая позволит сделать ошибку равной нулю, т. е.

$$e(t) = \theta^{(d)}(t) - \theta^{(a)}(t) = 0.$$

2. Обратившись к системе управления, показанной на рис. 36.2, покажите, что сигнал ошибки определяется выражением

$$e(s) = \theta^{(d)}(s) \left(\frac{s^2}{s^2 + k_v s + k_p} \right) - \theta^*(s) \left(\frac{1}{Js^2 + Jk_v s + Jk_p} \right).$$

3. Рассмотрите простую систему масса — упругость — трение, основное уравнение динамики которой имеет вид

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t).$$

Чтобы управлять движением массы m по прямой линии, мы используем закон управления с позиционной обратной связью (т. е. силу) вида

$$f(t) = k_p [x_d(t) - x(t)],$$

где $x_d(t)$ — желаемое положение. Изобразите блок-схему системы и выразите коэффициент демпфирования и собственную частоту недемпфированных колебаний ω_r через k_p . Найдите отклик системы на единичное воздействие, а также на линейно возрастающий входной сигнал $x_d(t)$. Каков отклик системы в установившемся режиме?

4. Для системы из задачи 3 примените следующий закон управления и ответьте на те же вопросы:

$$f(t) = k_p [x_d(t) - x(t)] - k_v \dot{x}(t).$$

5. Для системы из задачи 3 примените следующий закон управления и ответьте на те же вопросы:

$$f(t) = k_p [x_d(t) - x(t)] - k_v \dot{x}(t) + k_i \int_0^t [x_d(t) - x(t)] dt.$$

6. Рассмотрите однозвенный манипулятор, показанный на рис. 36.6, имеющий вращательное сочленение. Предположите,

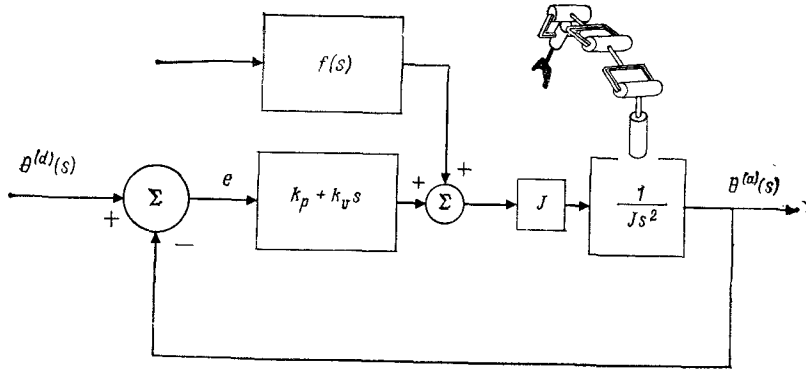


Рис. 36.1. Компенсация ускорения.

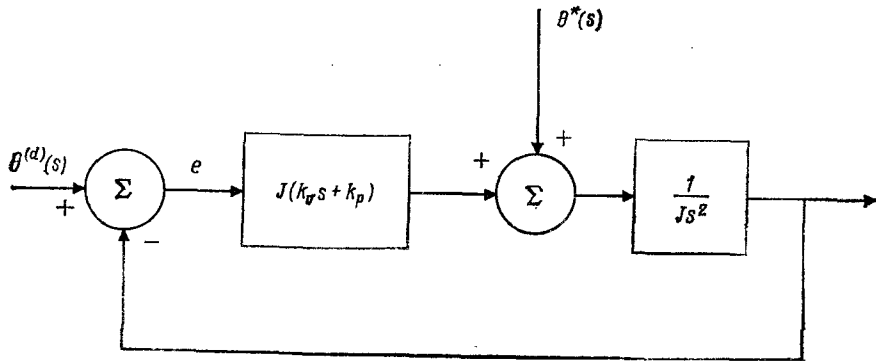


Рис. 36.2. Регулятор сигнала ошибки.

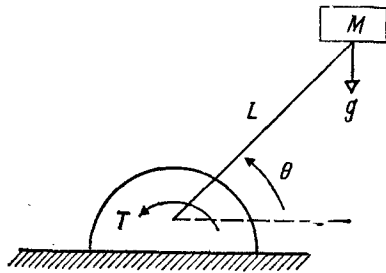


Рис. 36.6. Однозвенный поворотный манипулятор.

что масса сосредоточена на конце и в сочленении действует сила трения.

а) Выведите основные уравнения динамики.

б) Линеаризуйте уравнения в окрестности рабочей точки.

в) Изобразите блок-схему управления и найдите передаточную функцию.

7. В большинстве промышленных систем управления используются ПИД-алгоритмы, так что система нечувствительна к изменениям параметров объекта. Для представленной на рис. 6.9.1 ПИД-системы покажите, что можно добиться отслеживания в установившемся режиме, несмотря на возмущения в установке.

8. Для системы управления, показанной на рис. 36.8, покажите, что передаточная функция $Q(s)$ форсирующего регуля-

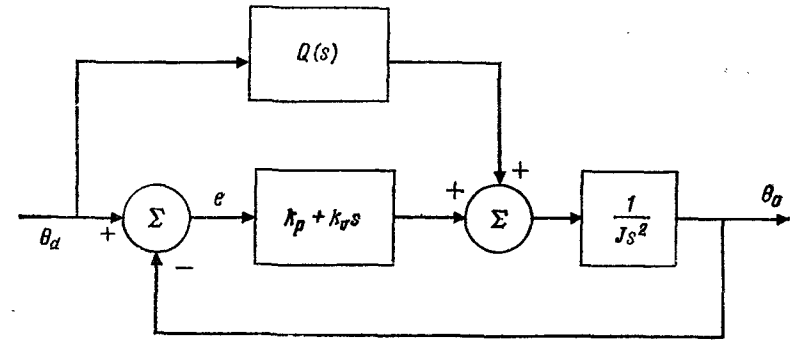


Рис. 36.8. Система из задачи 8.

тора может быть выбрана такой, что ошибка отслеживания будет тождественно равна нулю, а именно:

$$E(s) = \theta_{(d)}(s) - \theta(s) = 0.$$

9. Рассмотрите систему управления роботом, показанную на рис. 36.9. Получите выражение для ошибки слежения $E(s)$ через желаемое положение $\theta_{(d)}(s)$ и возмущающий момент $T^*(s)$. Найдите статическую ошибку e_{ss} , когда $\theta_{(d)}$ и T^* — ступенчатые функции.

10. В задаче 7 в регуляторе обратной связи добавлен интегральный член, что дает $k_p + k_v s + k_i/s$. Определите статическую ошибку e_{ss} для линейно возрастающего входного сигнала $\theta_{(d)}(s)$ и ступенчатого возмущения T^* . Получите характеристический полином замкнутой системы в зависимости от коэффициентов передачи k_p и k_v и интегрального коэффициента k_i .

11. Рассмотрите нелинейный закон управления вида

$$\tau(t) = (20 + 1)\ddot{\theta} + 4\dot{\theta} - \cos\theta.$$

Рассмотрите условия, которые обеспечат получение критически демпфируемой системы при $k_p = 8$.

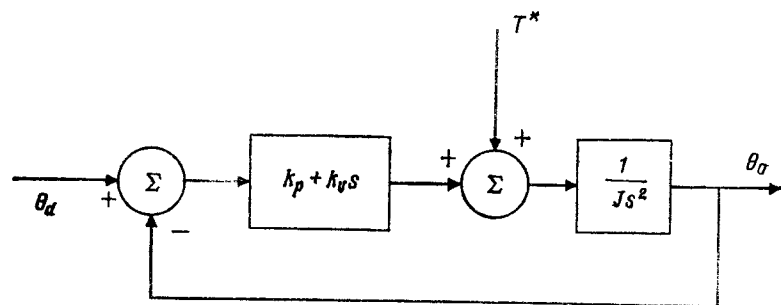


Рис. 36.9. Система из задачи 9.

12. Для двузвенного робота общего вида изобразите соответствующую блок-схему системы управления роботом, основанную на методе вычисляемых моментов. Отметьте вычислительные трудности, связанные с таким методом.

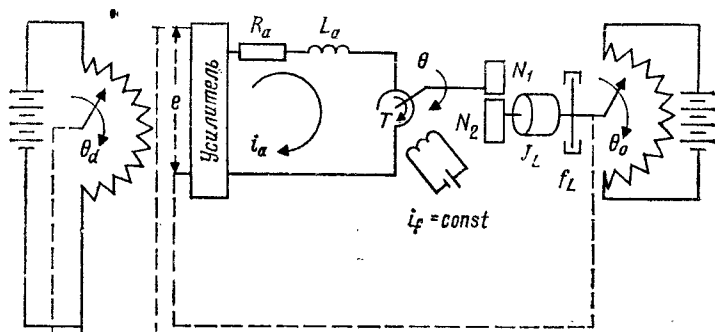


Рис. 36.14. Позиционный сервомеханизм.

13. Рассмотрите естественные ограничения при установке шестигранного штифта в шестигранное отверстие за счет проскальзывания, если движение контролируется обратной связью по силе.

14. На рис. 36.14 показана блок-схема типичного позиционного сервомеханизма, используемого для управления робототехническими системами. Получите замкнутую передаточную

функцию системы, считая, что входным и выходным сигналами являются соответственно относительное опорное положение вала $\theta_d(t)$ и выходное положение вала $\theta_0(t)$. В качестве значащих параметров системы примите следующие [1]:

k_1 — коэффициент передачи потенциометра = $24/\pi$ В/рад;

k_p — коэффициент передачи усилителя = 10 В/В;

R_a — сопротивление обмотки = 0.2 Ом;

L_a — индуктивность обмотки ≈ 0 ;

K_b — коэффициент противо-э. д. с. = 5.5×10^{-2} В·с/рад;

K_a — коэффициент передачи двигателя по моменту = 0.8×10^{-5} Н·м/А;

J_m — момент инерции двигателя = $1.3 \cdot 10^{-6}$ кг·м²;

f_m — вязкое трение двигателя ≈ 0 ;

J_L — момент инерции нагрузки = $0.6 \cdot 10^{-3}$ кг·м²;

f_L — вязкое трение нагрузки = $0.53 \cdot 10^{-2}$ Н·м·с;

n — коэффициент передачи редуктора $N_1/N_2 = 1/10$.

Анализ сил, моментов и упругости роботов

7.1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимо всегда знать величины и направления различных сил и моментов, которые действуют в манипуляционных роботах. Во-первых, эти силы и моменты должны удовлетворять условиям статического или динамического равновесия (Д'Аламбера) на различных этапах работы робота. Далее, совместное действие всех сил и моментов не должно вызывать повреждения конструкции. Анализ сил и моментов в манипуляционных роботах чрезвычайно важен для понимания и управления податливостью, т. е. способностью робота воспринимать и реагировать на внешние контактные силы изменением своей траектории. В этой главе будут рассмотрены статические и динамические силы и моменты, равновесие таких сил и моментов, включая силы типа силы тяжести, преобразования сил и моментов и обратную задачу статики, проведен анализ моментов сочленений, даны конструктивные соображения относительно нагрузки в схвате и, наконец, описано податливое движение манипуляционных роботов. При анализе податливого движения манипуляционных роботов рассматриваются такие вопросы, как движения при наличии силовых ограничений, движения при кинематических ограничениях, управление жесткостью схвата, силы торможения, колебания, анализ податливости сочленений и восприятие сил.

7.2. СИЛЫ И МОМЕНТЫ РОБОТОВ:
ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Для манипуляционных роботов в статическом или динамическом равновесии силы и моменты в каждой точке можно представить шестикомпонентным вектором. В этом случае пер-

вые три компоненты являются компонентами силы, а остальные три компоненты — компонентами момента в локальной системе координат. Обозначим вектор силы и вектор момента в любой точке P_i через \mathbf{f}_i и $\boldsymbol{\tau}_i$ соответственно. Предполагается, что точка P_i расположена в системе координат i . Обозначим далее обобщенную шестимерную силу через \mathbf{F} , так что получится следующее представление:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \\ \boldsymbol{\tau}_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \mathbf{f}_3 \ \boldsymbol{\tau}_1 \ \boldsymbol{\tau}_2 \ \boldsymbol{\tau}_3]^T. \quad (7.2.1)$$

Представление (7.2.1) обобщенных сил роботов является всего лишь удобной и компактной формой. Силы и моменты \mathbf{f}_i

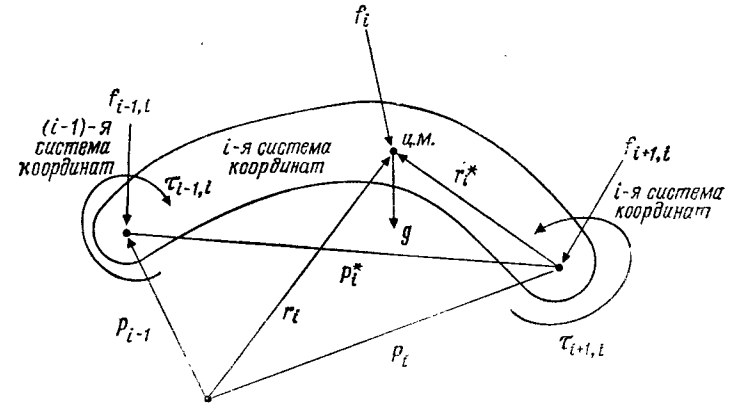


Рис. 7.2.1. Силы и моменты в отдельном звене робота.

и $\boldsymbol{\tau}_i$ могут рассматриваться как Д'Аламберовы силы и моменты, так что для отдельного звена робота (рис. 7.2.1) имеем следующие соотношения:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{i-1,i} + \mathbf{f}_{i+1,i} + m_i \mathbf{g}, \quad (7.2.2)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_{i-1,i} + \boldsymbol{\tau}_{i+1,i} - (\mathbf{p}_i^* + \mathbf{r}_i^*) \times \mathbf{f}_{i-1,i} - \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{f}_{i+1,i}, \quad (7.2.3)$$

где векторы \mathbf{r}_i^* и \mathbf{p}_i^* определены соответственно как вектор положения центра масс i -го звена в i -й системе координат и вектор положения сочленения i -го звена, $\mathbf{f}_{i,j}$ — сила, приложенная к j -му звену со стороны i -го звена, \mathbf{g} — вектор силы тяжести,

а $\tau_{i,j}$ — момент, приложенный к j -му звену со стороны i -го звена.

Разумеется, Д'Аламберовы силы и моменты \mathbf{f}_i и τ_i определяются как

$$\mathbf{f}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \quad (7.2.4)$$

$$\tau = \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i), \quad (7.2.5)$$

где $\ddot{\mathbf{r}}_i$ — ускорение, связанное с центром масс i -го звена, \mathbf{I}_i — тензор полярного момента инерции i -го звена относительно его центра масс, $\boldsymbol{\omega}_i$ — угловая скорость i -го звена и $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ — угловое ускорение, связанное с i -м звеном. При статическом равновесии сумма Д'Аламберовых сил и моментов равна нулю и, следовательно,

$$\mathbf{f}_{i-1,i} = \mathbf{f}_{i,i+1} - m_i \mathbf{g}. \quad (7.2.6)$$

$$\tau_{i-1,i} = \tau_{i,i+1} + (\mathbf{p}_i^* + \mathbf{r}_i^*) \times \mathbf{f}_{i-1,i} + \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{f}_{i+1,i}. \quad (7.2.7)$$

Пример 7.2.1 ■

Для двухосного плоского манипулятора требуется выразить моменты в сочленениях через силу и моменты на схвате $\mathbf{f}_{2,3}$ и $\tau_{2,3}$, обеспечивающие статическое равновесие.

Решение. Из уравнений (7.2.6) и (7.2.7) для $i=1,2$ имеем соответственно:

$$\mathbf{f}_{0,1} = \mathbf{f}_{1,2} - m_1 \mathbf{g}, \quad (7.2.8)$$

$$\mathbf{f}_{1,2} = \mathbf{f}_{2,3} - m_2 \mathbf{g}, \quad (7.2.9)$$

$$\tau_{0,1} = \tau_{1,2} + (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{r}_1^*) \times \mathbf{f}_{0,1} - \mathbf{r}_1^* \times \mathbf{f}_{1,2}, \quad (7.2.10)$$

$$\tau_{1,2} = \tau_{2,3} + (\mathbf{p}_2^* + \mathbf{r}_2^*) \times \mathbf{f}_{1,2} - \mathbf{r}_2^* \times \mathbf{f}_{2,3}. \quad (7.2.11)$$

Мы должны выразить $\tau_{0,1}$ и $\tau_{1,2}$ через $\mathbf{f}_{2,3}$. Следовательно, из формул (7.2.8) и (7.2.9) имеем

$$\mathbf{f}_{0,1} = \mathbf{f}_{2,3} - (m_1 + m_2) \mathbf{g}. \quad (7.2.12)$$

Теперь из равенства (7.2.11) получаем

$$\tau_{1,2} = \tau_{2,3} + \mathbf{p}_2^* \times \mathbf{f}_{2,3} - m_2 (\mathbf{p}_2^* + \mathbf{r}_2^*) \times \mathbf{g}. \quad (7.2.13)$$

Из равенства (7.2.10) имеем

$$\begin{aligned} \tau_{0,1} = & \tau_{2,3} + (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^*) \times \mathbf{f}_{2,3} - m_2 (\mathbf{p}_2^* + \mathbf{r}_2^*) \times \mathbf{g} - \\ & - m_1 (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{r}_1^*) \times \mathbf{g} - m_2 \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{g}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (7.2.14) \end{aligned}$$

Пример 7.2.2 ■

Требуется выразить момент $\tau_{0,1}$ для однозвенного робота (рис. 7.2.2 и 7.2.3) через силы на схвате и моменты $\mathbf{f}_{1,2}$ и $\tau_{1,2}$, а также другие относящиеся к этому параметры.

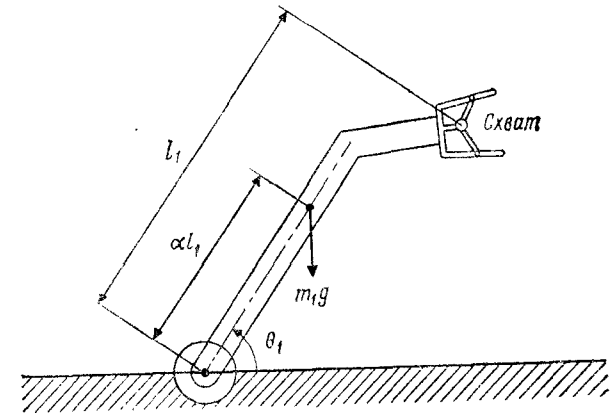


Рис. 7.2.2. Однозвенный манипуляционный робот.

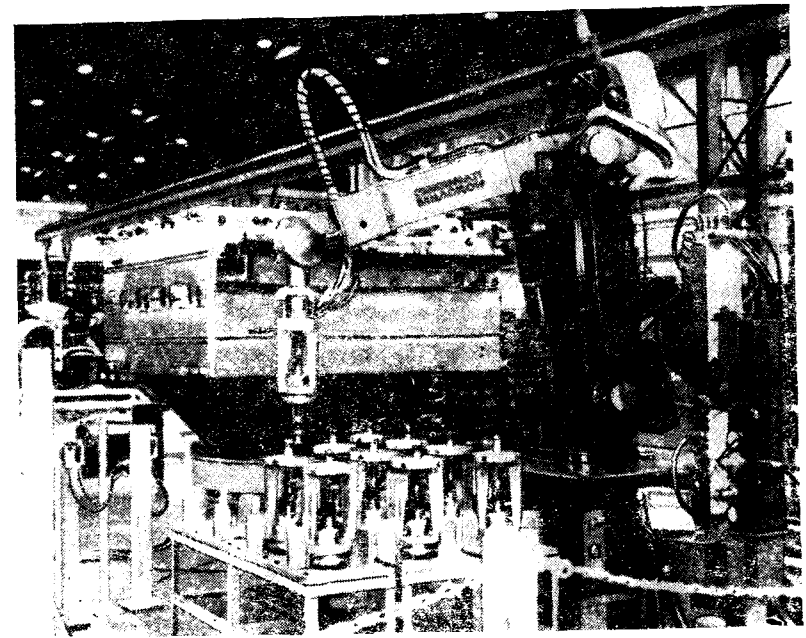


Рис. 7.2.3. Робототехнический комплекс.

Решение. Заметим, что в этом случае

$$\mathbf{p}_1^* = l_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \quad (7.2.15)$$

$$\mathbf{r}_1 = \alpha_1 \mathbf{p}_1^* = \alpha_1 l_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \quad (7.2.16)$$

$$\mathbf{r}_1^* = (\alpha_1 - 1) \mathbf{p}_1^*, \quad (7.2.17)$$

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{r}_1^* = \alpha_1 \mathbf{p}_1^*. \quad (7.2.18)$$

Таким образом, силы и моменты можно вычислить из формул (7.2.6) — (7.2.15) как

$$\mathbf{f}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{f}_{0,1} - \mathbf{f}_{1,2} + m\mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{f}_{0,1} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{f}_{1,2} + m\mathbf{g}, \quad (7.2.19)$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = I_1 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \boldsymbol{\tau}_{0,1} - \boldsymbol{\tau}_{1,2} - \alpha_1 \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{f}_{0,1} + (\alpha_1 - 1) \mathbf{p}_1^* \times \mathbf{f}_{1,2}, \quad (7.2.20)$$

$$\begin{aligned} \tau_{0,1} = \tau_{1,2} + \alpha_1 l_1 (f_{0,1y} \cos \theta_1 - f_{0,1x} \sin \theta_1) - \\ - (\alpha_1 - 1) l_1 (f_{1,2y} \cos \theta_1 - f_{1,2x} \sin \theta_1) + I_1 \ddot{\theta}_1. \end{aligned} \quad (7.2.21)$$

Теперь

$$f_{0,1x} = m_1 \alpha_1 l_1 (-\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1) + f_{1,2x}, \quad (7.2.22)$$

$$f_{0,1y} = m_1 \alpha_1 l_1 (\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) + f_{1,2y} - mg_2. \quad (7.2.23)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tau_{0,1} = \tau_{1,2} + \alpha_1 l_1 (f_{1,2y} \cos \theta_1 - f_{1,2x} \sin \theta_1) + m_1 \alpha_1^2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - \\ - \alpha_1 l_1 mg_2 C_1 - (\alpha_1 - 1) l_1 (f_{1,2y} \cos \theta_1 - f_{1,2x} \sin \theta_1) + I_1 \ddot{\theta}_1, \end{aligned} \quad (7.2.24)$$

$$\begin{aligned} \tau_{0,1} = \tau_{1,2} + l_1 f_{1,2y} \cos \theta_1 - l_1 f_{1,2x} \sin \theta_1 + m_1 \alpha_1^2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - \\ - \alpha_1 l_1 mg_2 \cos \theta_1 + I_1 \ddot{\theta}_1. \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

7.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИЛ И МОМЕНТОВ

Одной из фундаментальных проблем при анализе сил, действующих на манипулятор, является определение сил и моментов, приложенных к любой точке манипуляционного робота при заданной системе сил в определенной точке. Например, если на схват робота действует совокупность сил и моментов, то какие силы и моменты действуют на основание робота? Чтобы ответить на такие вопросы, воспользуемся принципом независимости от системы координат выражений для работы, совершаемой различными системами обобщенных сил в манипуляцион-

ных роботах. Далее мы воспользуемся законом сохранения энергии в совокупности с принципом Д'Аламбера, чтобы связать силы и моменты сочленений. Здесь заметим, что работа¹⁾, совершаемая обобщенной силой ${}^A\mathbf{F}$, заданной в системе координат A , вычисляется как

$${}^A W = {}^A \mathbf{F}^T {}^A \mathbf{V}, \quad (7.3.1)$$

где ${}^A \mathbf{V}$ — вектор обобщенной скорости, такой, что

$${}^A \mathbf{V} = [{}^A v_x \quad {}^A v_y \quad {}^A v_z \quad {}^A \omega_x \quad {}^A \omega_y \quad {}^A \omega_z]^T, \quad (7.3.2)$$

как рассматривалось в гл. 4. Отметим, что эта работа должна быть инвариантной относительно преобразований координат, т. е. работа, выраженная в другой системе координат B , должна оставаться такой же. Таким образом,

$${}^B W = {}^B \mathbf{F}^T {}^B \mathbf{V} = {}^A W = {}^A \mathbf{F}^T {}^A \mathbf{V}, \quad (7.3.3)$$

где ${}^B \mathbf{F}$ — та же ${}^A \mathbf{F}$, выраженная в системе B , а ${}^B \mathbf{V}$ — обобщенная скорость, выраженная в системе B , так что

$${}^B \mathbf{V} = [{}^B v_x \quad {}^B v_y \quad {}^B v_z \quad {}^B \omega_x \quad {}^B \omega_y \quad {}^B \omega_z]^T. \quad (7.3.4)$$

Обобщенные скорости ${}^A \mathbf{V}$ и ${}^B \mathbf{V}$, как было показано в гл. 3, связаны якобианом¹⁾ для систем координат A и B , так что

$${}^B \mathbf{V} = {}^B \mathbf{J}_A {}^A \mathbf{V}, \quad (7.3.5)$$

где ${}^B \mathbf{J}_A$ — якобиан преобразования из системы A в систему B и задается в явном виде следующей матрицей размера 6×6

$${}^B \mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_z \\ o_x & o_y & o_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_z \\ a_x & a_y & a_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}, \quad (7.3.6)$$

где \mathbf{n} , \mathbf{o} , \mathbf{a} и \mathbf{p} — соответственно векторы нормали, ориентации, подхода и положения. Положение системы B относительно системы A описывается преобразованием

$${}^A \mathbf{B} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.3.7)$$

¹⁾ См. примечание на стр. 188, 409. — Прим. ред.

Из формул (7.3.3), (7.3.5) и (7.3.6) получаем

$${}^B\mathbf{F}^T {}^B\mathbf{J}_A {}^A\mathbf{V} = {}^A\mathbf{F}^T {}^A\mathbf{V} = {}^A\mathbf{F}^T {}^A\mathbf{V} \quad (7.3.8)$$

или

$$({}^B\mathbf{F}^T {}^B\mathbf{J}_A - {}^A\mathbf{F}^T \mathbf{I}) {}^A\mathbf{V} = 0. \quad (7.3.9)$$

Уравнение (7.3.9) должно быть справедливо для любых произвольных обобщенных скоростей ${}^A\mathbf{V}$ и, таким образом,

$${}^B\mathbf{F}^T {}^B\mathbf{J}_A = {}^A\mathbf{F}^T \quad \text{или} \quad (7.3.10)$$

$${}^A\mathbf{F} = {}^B\mathbf{J}_A^T {}^B\mathbf{F}. \quad (7.3.11)$$

В развернутой форме это уравнение можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} {}^A f_x \\ {}^A f_y \\ {}^A f_z \\ {}^A \tau_x \\ {}^A \tau_y \\ {}^A \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 & 0 & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 & 0 & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_x & n_x & o_x & a_x \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_y & n_y & o_y & a_y \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_z & n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B f_x \\ {}^B f_y \\ {}^B f_z \\ {}^B \tau_x \\ {}^B \tau_y \\ {}^B \tau_z \end{bmatrix}. \quad (7.3.12)$$

Уравнение (7.3.12) можно решить относительно вектора обобщенной силы. Тогда имеем

$$\begin{bmatrix} {}^B f_x \\ {}^B f_y \\ {}^B f_z \\ {}^B \tau_x \\ {}^B \tau_y \\ {}^B \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 & 0 & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_z & n_x & n_y & n_z \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_z & o_x & o_y & o_z \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_z & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A f_x \\ {}^A f_y \\ {}^A f_z \\ {}^A \tau_x \\ {}^A \tau_y \\ {}^A \tau_z \end{bmatrix}. \quad (7.3.13)$$

Из матричного уравнения (7.3.13) можно получить следующие соотношения для вычисления эквивалентных сил в различных системах координат:

$${}^B f_x = \mathbf{n} \cdot {}^A \mathbf{f}, \quad (7.3.14)$$

$${}^B f_y = \mathbf{o} \cdot {}^A \mathbf{f}, \quad (7.3.15)$$

$${}^B f_z = \mathbf{a} \cdot {}^A \mathbf{f}, \quad (7.3.16)$$

$${}^B \tau_x = {}^A \mathbf{f} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot {}^A \boldsymbol{\tau}, \quad (7.3.17)$$

$${}^B \tau_y = {}^A \mathbf{f} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{o}) + \mathbf{o} \cdot {}^A \boldsymbol{\tau}, \quad (7.3.18)$$

$${}^B \tau_z = {}^A \mathbf{f} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot {}^A \boldsymbol{\tau}. \quad (7.3.19)$$

Уравнения (7.3.17)–(7.3.19) можно упростить, переписав их в следующем виде:

$${}^B \tau_x = \mathbf{n} \cdot [({}^A \mathbf{f} \times \mathbf{p}) + {}^A \boldsymbol{\tau}], \quad (7.3.20)$$

$${}^B \tau_y = \mathbf{o} \cdot [({}^A \mathbf{f} \times \mathbf{p}) + {}^A \boldsymbol{\tau}], \quad (7.3.21)$$

$${}^B \tau_z = \mathbf{a} \cdot [({}^A \mathbf{f} \times \mathbf{p}) + {}^A \boldsymbol{\tau}]. \quad (7.3.22)$$

Эти уравнения являются более простыми в вычислительном плане.

Пример 7.3.1 ■

На основании робота, находящегося в статическом равновесии, действуют следующие силы и моменты \mathbf{f} и $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathbf{f} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad (7.3.23)$$

$$\boldsymbol{\tau} = 10\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 30\mathbf{k}. \quad (7.3.24)$$

Каковы эквивалентные сила и момент ${}^A \mathbf{f}$ и ${}^A \boldsymbol{\tau}$ в схвате, если он расположен в такой системе координат \mathbf{A} , что

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.3.25)$$

Решение. Из матрицы \mathbf{A} находим

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.3.26)$$

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.3.27)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.3.28)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.3.29)$$

Из выражений (7.3.14) — (7.3.16) и (7.3.20) — (7.3.22) имеем

$${}^A f_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}, \quad (7.3.30)$$

$${}^A f_y = \mathbf{o} \cdot \mathbf{f}, \quad (7.3.31)$$

$${}^A f_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}, \quad (7.3.32)$$

$${}^A \tau_x = \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \boldsymbol{\tau}], \quad (7.3.33)$$

$${}^A \tau_y = \mathbf{o} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \boldsymbol{\tau}], \quad (7.3.34)$$

$${}^A \tau_z = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \boldsymbol{\tau}]. \quad (7.3.35)$$

Теперь

$$\mathbf{f} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 6 & 7 \\ 20 & 30 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{i}(-210) - \mathbf{j}(-140) + \mathbf{k}(150 - 120), \quad (7.3.36)$$

$$\mathbf{f} \times \mathbf{p} = -210\mathbf{i} + 140\mathbf{j} + 30\mathbf{k}, \quad (7.3.37)$$

$$(\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \boldsymbol{\tau} = -200\mathbf{i} + 160\mathbf{j} + 60\mathbf{k}. \quad (7.3.38)$$

Таким образом,

$${}^A f_x = 6, \quad {}^A f_y = 7 \quad \text{и} \quad {}^A f_z = 5 \quad \text{или} \quad (7.3.39)$$

$${}^A \mathbf{f} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}. \quad (7.3.40)$$

$${}^A \tau_x = 160, \quad {}^A \tau_y = 60 \quad \text{и} \quad {}^A \tau_z = -200 \quad \text{либо} \quad (7.3.41)$$

$${}^A \boldsymbol{\tau} = 160\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 200\mathbf{k}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (7.3.42)$$

Пример 7.3.2 ■

Сила и момент ${}^G \mathbf{f}$ и ${}^G \boldsymbol{\tau}$ в схвате манипуляционного робота при статическом равновесии определяются как:

$${}^G \mathbf{f} = 10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k}, \quad (7.3.43)$$

$${}^G \boldsymbol{\tau} = 200\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 100\mathbf{k}. \quad (7.3.44)$$

Система координат схвата \mathbf{G} относительно системы T_0^G задается как

$${}^{T_0^G} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.3.45)$$

Система T_0^G относительно базовой системы выражается как

$$T_0^G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.3.46)$$

Найти эквивалентную силу \mathbf{f} и эквивалентный момент $\boldsymbol{\tau}$ в основании робота, возникающие благодаря силам и моменту в схвате.

Решение. Заметим, что в данном случае имеем

$${}^{O_{\text{сн}}} \mathbf{G} = T_0^{G^0} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad (7.3.47)$$

$${}^{O_{\text{сн}}} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.3.48)$$

Поскольку нужно найти силы в основании, то необходимо получить выражение для базовой системы координат в системе координат схвата. Это, очевидно, матрица, обратная ${}^{O_{\text{сн}}} \mathbf{G}$, или

$${}^{G_{\text{осн}}} = ({}^{O_{\text{сн}}} \mathbf{G})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.3.49)$$

Таким образом,

$$\mathbf{n} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}, \quad (7.3.50)$$

$$\mathbf{o} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad (7.3.51)$$

$$\mathbf{a} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad (7.3.52)$$

$$\mathbf{p} = -21\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 13\mathbf{k}. \quad (7.3.53)$$

Теперь из выражений (7.3.14) — (7.3.16) и (7.3.20) — (7.3.22) получаем

$${}^B f_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = 8, \quad (7.3.54)$$

$${}^B f_y = \mathbf{o} \cdot \mathbf{f} = 10, \quad (7.3.55)$$

$${}^B f_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} = 7, \quad (7.3.56)$$

$$\mathbf{f} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10 & 7 & 8 \\ -21 & -12 & -13 \end{bmatrix} = 51\mathbf{i} - 38\mathbf{j} + 27\mathbf{k}, \quad (7.3.57)$$

$$\mathbf{f} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\tau} = 205\mathbf{i} + 62\mathbf{j} - 73\mathbf{k}, \quad (7.3.58)$$

$${}^B \tau_x = -73, \quad {}^B \tau_y = 205, \quad {}^B \tau_z = 62. \quad (7.3.59)$$

Таким образом,

$${}^B \mathbf{f} = 8\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad (7.3.60)$$

$${}^B \boldsymbol{\tau} = -73\mathbf{i} + 205\mathbf{j} + 62\mathbf{k}. \quad (7.3.61)$$

7.4. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ В СХВАТЕ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МОМЕНТЫ В СОЧЛЕНЕНИЯХ

В этом разделе мы воспользуемся законом сохранения энергии, с тем чтобы связать обобщенные силы в схвате с моментами в сочленениях, которые соответствуют силам. Мы полагаем, что Д'Аламберовы моменты в сочленениях, необходимые для компенсации гравитационного момента, возникающего благодаря наличию веса манипулятора, не включаются в выражения для моментов сочленений. Общее выражение для моментов сочленений дается уравнением (7.2.3), куда включены гравитационные эффекты. Отметим, что скорость изменения работы, совершаемой обобщенной силой схвата ${}^G \mathbf{F}$, равна ${}^G \mathbf{F}^T {}^G \mathbf{V}$. Эта величина равна общей скорости изменения работы, совершаемой всеми приводами сочленений $\boldsymbol{\tau}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — вектор моментов сочленений, а $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ — вектор угловых скоростей сочленений. Таким образом,

$${}^G \mathbf{F}^T {}^G \mathbf{V} = \boldsymbol{\tau}^T \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{F}^T \mathbf{V}, \quad (7.4.1)$$

где \mathbf{F} и \mathbf{V} представляют собой ${}^G \mathbf{F}$ и ${}^G \mathbf{V}$, преобразованные относительно базовой системы координат. По-прежнему, как рассматривалось в гл. 4, обобщенные векторы ${}^G \mathbf{V}$ и $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ связаны якобианом преобразования между скоростями схвата и угловыми скоростями сочленений, так что

$$\mathbf{V} = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (7.4.2)$$

В общем случае \mathbf{J} дается следующей матрицей размера 6×6 :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{2x} & d_{3x} & d_{4x} & d_{5x} & d_{6x} \\ d_{1y} & d_{2y} & d_{3y} & d_{4y} & d_{5y} & d_{6y} \\ d_{1z} & d_{2z} & d_{3z} & d_{4z} & d_{5z} & d_{6z} \\ \delta_{1x} & \delta_{2x} & \delta_{3x} & \delta_{4x} & \delta_{5x} & \delta_{6x} \\ \delta_{1y} & \delta_{2y} & \delta_{3y} & \delta_{4y} & \delta_{5y} & \delta_{6y} \\ \delta_{1z} & \delta_{2z} & \delta_{3z} & \delta_{4z} & \delta_{5z} & \delta_{6z} \end{bmatrix}, \quad (7.4.3)$$

где

$$d_{ix} = \mathbf{n}_i \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p}_i), \quad (7.4.4)$$

$$d_{iy} = \mathbf{o}_i \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p}_i), \quad (7.4.5)$$

$$d_{iz} = \mathbf{a}_i \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p}_i), \quad (7.4.6)$$

$$\delta_{ix} = \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (7.4.7)$$

$$\delta_{iy} = \mathbf{o}_i \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (7.4.8)$$

$$\delta_{iz} = \mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\delta}. \quad (7.4.9)$$

В приведенных выше уравнениях i означает i -е звено, описанное в системе координат \mathbf{A}_i , так что

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i & \mathbf{o}_i & \mathbf{a}_i & \mathbf{p}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.10)$$

и $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{k}$. Из формул (7.4.1) и (7.4.2) находим, что

$$\boldsymbol{\tau}^T \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{F}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (7.4.11)$$

Это уравнение должно быть справедливо для любых произвольных угловых скоростей звеньев $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{\tau}^T = \mathbf{F}^T \mathbf{J}. \quad (7.4.12)$$

Окончательно из уравнения (7.4.12) получаем

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}, \quad (7.4.13)$$

связывая моменты сочленений с обобщенной силой в схвате.

Пример 7.4.1 ■

Для двухзвенного плоского манипулятора (рис. 7.4.1 и 7.4.2) требуется найти эквивалентные моменты в сочленениях через силы и моменты в схвате (обратная задача статики).

Решение. Расположение схвата характеризуется с помощью x и y , так что

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (7.4.14)$$

Дифференцирование этого выражения по времени приводит к следующему соотношению:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 & -l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad (7.4.15)$$

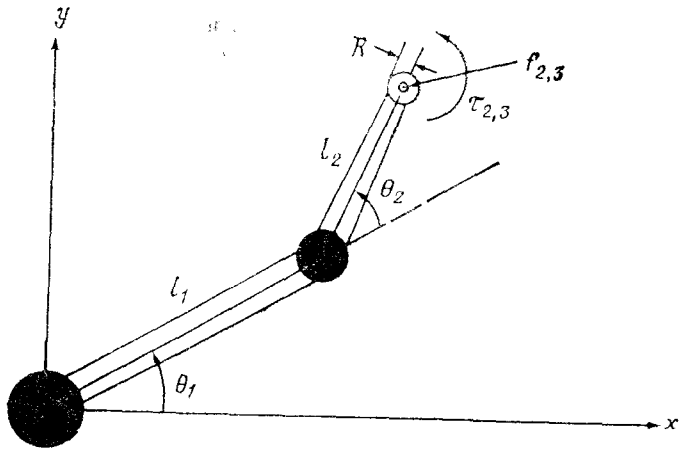


Рис. 7.4.1. Двухзвенный плоский манипуляционный робот с вращательными сочленениями.

Заметим, что обобщенная скорость схвата $V = [\dot{x} \ \dot{y}]^T = J\dot{\theta}$, $\omega = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$ и $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$, так что якобиан преобразования скорости определен полностью. Следовательно, согласно уравнению (7.4.13), вектор моментов сочленений $\tau_{0,1}$ и $\tau_{1,2}$ дается следующим выражением:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{0,1} \\ \tau_{1,2} \end{bmatrix} = J^T F = J^T \begin{bmatrix} f_{2,3x} \\ f_{2,3y} \\ \tau_{2,3} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad (7.4.16)$$

$$\tau_{0,1} = -[l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)] f_{2,3x} + [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)] f_{2,3y} + \tau_{2,3}, \quad (7.4.17)$$

$$\tau_{1,2} = -l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) f_{2,3x} + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) f_{2,3y} + \tau_{2,3}, \quad \text{где} \quad (7.4.18)$$

$$J^T = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) & 1 \\ -l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.4.19)$$

7.5. ВИРТУАЛЬНАЯ РАБОТА И ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА

Принцип виртуальной работы и принцип Д'Аламбера для динамического равновесия являются мощным инструментом для анализа обобщенных сил, движений и деформаций. Полное рассмотрение деформаций роботов выходит за рамки этой главы. Эти деформации могут быть упругими, пластичными, сверхэластичными, вязкими. Здесь мы представим примеры, относящиеся только к движению робота, рассматриваемого как твердое тело.

Пусть в роботе имеется N сочленений, к которым приложены силы. Обозначим эти силы через F_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Соответствующие перемещения обозначим через q_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда, согласно принципу виртуальной работы¹⁾:

$$\sum_{j=1}^N F_j \cdot \delta q_j = U, \quad (7.5.1)$$

где δ обозначает вариацию, а U — энергию, запасенную в роботе²⁾. В случае движения только твердых тел запасенная

¹⁾ В отечественной литературе этот принцип называется *принципом возможных перемещений*. — Прим. ред.

²⁾ В действительности принцип возможных перемещений имеет вид

$$\sum F_j \delta q_j + \sum R_j \delta q_j = 0,$$

$\sum R_j \delta q_j$ — элементарная работа сил реакции на возможных перемещениях, которая обращается в нуль для идеальных связей. — Прим. ред.

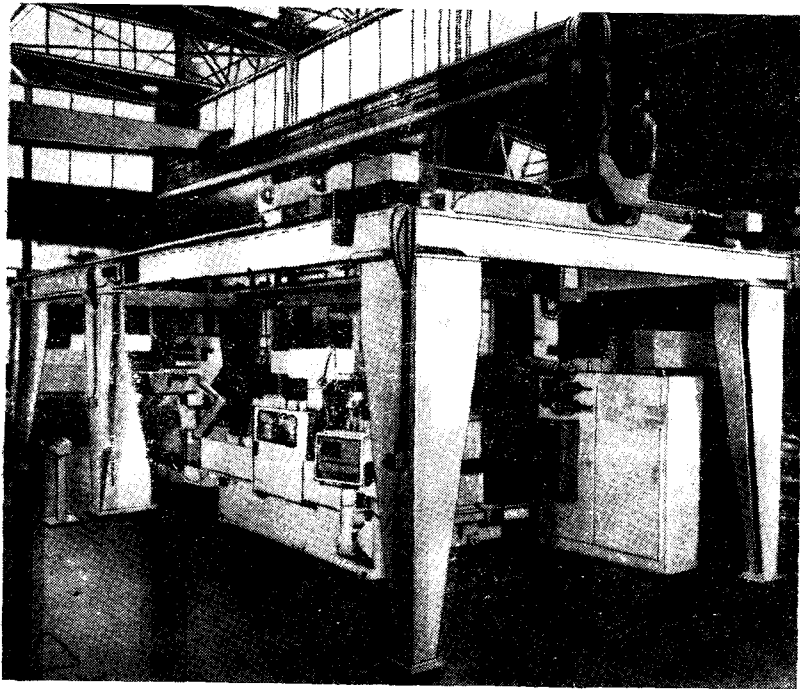


Рис. 7.4.2. Высокие поргальные роботы для перемещения тяжелых грузов. (С разрешения Cincinnati Milacron.)

энергия равна нулю и принцип виртуальной работы записывается как

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \delta \mathbf{q}_j = 0. \quad (7.5.2)$$

Если мы имеем дело с динамическим случаем, то к принципу виртуальной работы можно добавить принцип Д'Аламбера, и уравнение (7.5.1) принимает вид

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{F}_j - \mathbf{I}_j \ddot{\mathbf{q}}_j) \cdot \delta \mathbf{q}_j = U, \quad (7.5.3)$$

где \mathbf{I}_j — тензор инерции, связанный с j -й точкой робота.

Пример 7.5.1 ■

Для маятника, показанного на рис. 7.5.1, определите θ_1 и θ_2 , если известно P .

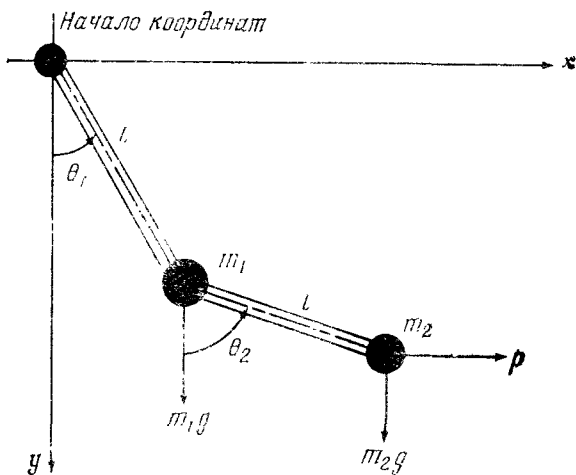


Рис. 7.5.1. Двухзвенный маятник в статическом равновесии.

Решение

$$\delta W = \sum_{j=1}^3 \mathbf{F}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j, \quad (7.5.4)$$

$$\mathbf{r}_1 = l(\sin \theta_1 \mathbf{i} + \cos \theta_1 \mathbf{j}), \quad (7.5.5)$$

$$\mathbf{r}_2 = l(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \mathbf{i} + l(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \mathbf{j}, \quad (7.5.6)$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2, \quad (7.5.7)$$

$$\mathbf{F}_1 = m_1 g \mathbf{j}, \quad (7.5.8)$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2 g \mathbf{j}, \quad (7.5.9)$$

$$\mathbf{F}_3 = P \mathbf{i}, \quad (7.5.10)$$

$$\delta \mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 = l(\cos \theta_1 \mathbf{i} - \sin \theta_1 \mathbf{j}) \delta \theta_1, \quad (7.5.11)$$

$$\delta \mathbf{r}_2 = l(\cos \theta_1 \delta \theta_1 + \cos \theta_2 \delta \theta_2) \mathbf{i} - l(\sin \theta_1 \delta \theta_1 + \sin \theta_2 \delta \theta_2) \mathbf{j}, \quad (7.5.12)$$

$$\delta \mathbf{r}_3 = \delta \mathbf{r}_2. \quad (7.5.13)$$

Следовательно,

$$\delta W = [Pl \cos \theta_1 - (m_1 + m_2) gl \sin \theta_1] \delta \theta_1 + [Pl \cos \theta_2 - m_2 gl \sin \theta_2] \delta \theta_2 = 0. \quad (7.5.14)$$

Поскольку $\delta \theta_1$ и $\delta \theta_2$ произвольные, то

$$Pl \cos \theta_1 - (m_1 + m_2) gl \sin \theta_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{P}{(m_1 + m_2) g}, \quad (7.5.15)$$

$$Pl \cos \theta_2 - m_2 gl \sin \theta_2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{P}{m_2 g}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (7.5.16)$$

Пример 7.5.2 ■

Для однозвенного маятника, показанного на рис. 7.5.2, нужно вывести основные уравнения для динамического равновесия.

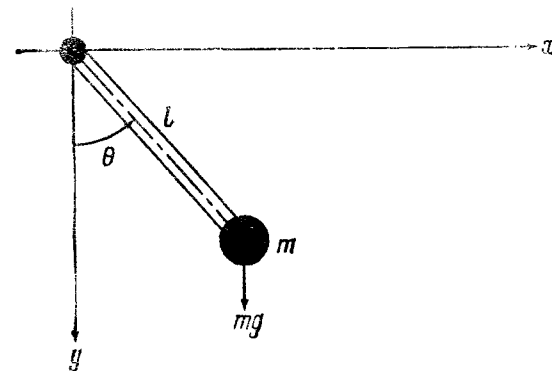


Рис. 7.5.2. Простой маятник.

весия, пользуясь принципом виртуальной работы совместно с принципом Д'Аламбера.

Решение

$$\delta W = \sum_{j=1}^1 (\mathbf{F}_j - m_j \mathbf{r}_j) \cdot \delta \mathbf{r}_j = 0, \quad (7.5.17)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_j = l \sin \theta \mathbf{i} + l \cos \theta \mathbf{j}, \quad (7.5.18)$$

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F} = mg \mathbf{j}, \quad (7.5.19)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = (l \cos \theta) \dot{\theta} \mathbf{i} - (l \sin \theta) \dot{\theta} \mathbf{j}, \quad (7.5.20)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = [(-l \sin \theta) \ddot{\theta}^2 + (l \cos \theta) \ddot{\theta}] \mathbf{i} - [(l \cos \theta) \ddot{\theta}^2 + (l \sin \theta) \ddot{\theta}] \mathbf{j}, \quad (7.5.21)$$

$$\delta \mathbf{r} = [(l \cos \theta) \mathbf{i} - (l \sin \theta) \mathbf{j}] \delta \theta, \quad (7.5.22)$$

$$F - m \ddot{\mathbf{r}} = + m [(l \sin \theta) \ddot{\theta}^2 - (l \cos \theta) \ddot{\theta}] \mathbf{i} + \\ + m [g + (l \cos \theta) \ddot{\theta}^2 + (l \sin \theta) \ddot{\theta}] \mathbf{j}. \quad (7.5.23)$$

Таким образом,

$$\delta W = [(ml^2 \sin \theta \cos \theta) \ddot{\theta}^2 - (ml^2 \cos^2 \theta) \ddot{\theta} - \\ - mgl \sin \theta - (ml^2 \sin \theta \cos \theta) \ddot{\theta}^2 - (ml^2 \sin^2 \theta) \ddot{\theta}] \delta \theta = 0. \quad (7.5.24)$$

Это справедливо для произвольных $\delta \theta$ и, следовательно,

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right) \sin \theta = 0. \quad (7.5.25)$$

Пример 7.5.3 ■

Для двузвенного робота, показанного на рис. 7.5.3 и 7.5.4, требуется определить моменты в сочленениях, необходимые для обеспечения равновесия.

Решение

$$\delta W = \sum_{j=1}^5 \mathbf{F}_j \cdot \delta \mathbf{q}_j, \quad (7.5.26)$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{r}_1 = l_1 (\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{j}), \quad (7.5.27)$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + l_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) \mathbf{i} + \sin (\theta_1 + \theta_2) \mathbf{j}], \quad (7.5.28)$$

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{r}_2, \quad (7.5.29)$$

$$\mathbf{q}_4 = -\theta_1 \mathbf{k}, \quad (7.5.30)$$

$$\mathbf{q}_5 = -\theta_2 \mathbf{k}, \quad (7.5.31)$$

$$\mathbf{F}_1 = -m_1 g \mathbf{j}, \quad (7.5.32)$$

$$\mathbf{F}_2 = -m_2 g \mathbf{j}, \quad (7.5.33)$$

$$\mathbf{F}_3 = \dot{f}_{2,3x} \mathbf{i} + \dot{f}_{2,3y} \mathbf{j}, \quad (7.5.34)$$

$$\mathbf{F}_4 = \tau_{0,1} \mathbf{k}, \quad (7.5.35)$$

$$\mathbf{F}_5 = \tau_{1,2} \mathbf{k}, \quad (7.5.36)$$

$$\delta \mathbf{q}_1 = \delta \mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_1} \delta \theta_2 = l_1 (-\sin \theta_1 \mathbf{i} + \cos \theta_2 \mathbf{j}) \delta \theta_1. \quad (7.5.37)$$

$$\delta \mathbf{q}_2 = \delta \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_2} \delta \theta_2, \quad (7.5.38)$$

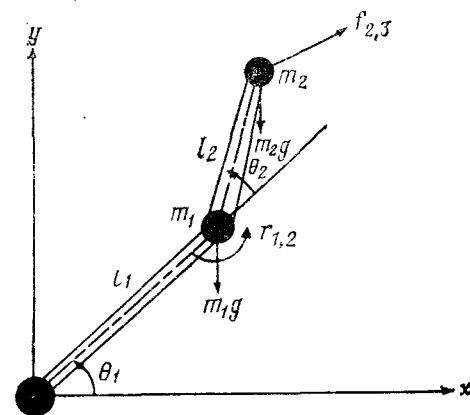


Рис. 7.5.3. Двузвенный манипуляционный робот.

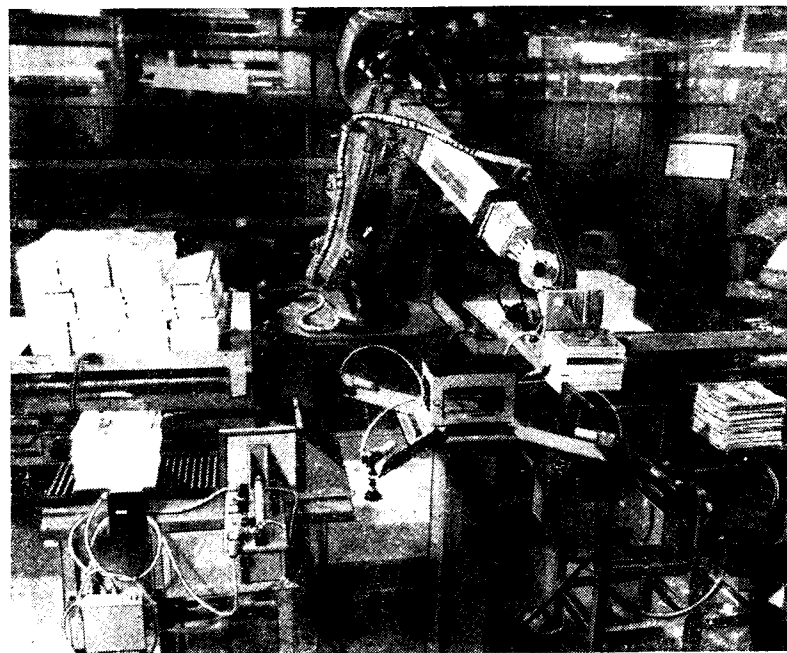


Рис. 7.5.4. Использование робота для работы с тяжелыми грузами. (С разрешения Cincinnati Milacron.)

$$\delta \mathbf{q}_2 = \delta \mathbf{r}_2 = \{[-l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)] \delta \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \delta \theta_2\} \mathbf{i} + \{[l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)] \delta \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \delta \theta_2\} \mathbf{j}, \quad (7.5.39)$$

$$\delta \mathbf{q}_3 = \delta \mathbf{r}_2, \quad (7.5.40)$$

$$\delta \mathbf{q}_4 = -\delta \theta_1 \mathbf{k}, \quad (7.5.41)$$

$$\delta \mathbf{q}_5 = -\delta \theta_2 \mathbf{k}. \quad (7.5.42)$$

Таким образом, принцип виртуальной работы принимает вид $\delta W = \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_3 \cdot \delta \mathbf{r}_3 - \tau_{0,1} \delta \theta_1 - \tau_{1,2} \delta \theta_2$ или $(7.5.43)$

$$\delta W = (-m_1 g l_1 \cos \theta_1) \delta \theta_1 - [m_2 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 g \cos (\theta_1 + \theta_2)] \delta \theta_1 - m_2 l_2 g \cos (\theta_1 + \theta_2) \delta \theta_2 + f_{2,3x} \times \times \{[-l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)] \delta \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \delta \theta_2\} + f_{2,3y} \{[l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)] \delta \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \delta \theta_2\} - \tau_{0,1} \delta \theta_1 - \tau_{1,2} \delta \theta_2 = 0. \quad (7.5.44)$$

Таким образом,

$$\delta \theta_1 \{-(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) + f_{2,3x} [-l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)] + f_{2,3y} [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)] - \tau_{0,1}\} + \delta \theta_2 \{-m_2 l_2 g \cos (\theta_1 + \theta_2) - f_{2,3x} l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) + f_{2,3y} l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) - \tau_{1,2}\} = 0. \quad (7.5.45)$$

Поскольку $\delta \theta_1$ и $\delta \theta_2$ произвольные, то можно заключить, что

$$\tau_{1,2} = -m_2 l_2 g \cos (\theta_1 + \theta_2) - f_{2,3x} l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) + f_{2,3y} l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2), \quad (7.5.46)$$

$$\tau_{0,1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) + f_{2,3x} [-l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)] + f_{2,3y} [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)]. \quad (7.5.47)$$

7.6. АНАЛИЗ ПОДАТЛИВОСТИ И ПОДАТЛИВОЕ ДВИЖЕНИЕ

Податливость — это способность манипуляционного робота реагировать на контактные усилия и тактильные воздействия в процессе движения. Наиболее распространенными приме-

нениями манипуляционных роботов являются сварка, захват и установка деталей и окраска распылением. В общем случае эти задачи не требуют наличия очень сложного силового и тактильного очувствления. Однако поскольку задачи, выполняемые роботами, усложняются, то со временем станет необходимо непрерывно учитывать силовое воздействие при движении манипуляционного робота. Использование податливого движения особенно важно при автоматической сборке и в случае сложных производственных процессов. Одной из основных особенностей движения роботов является то, что оно жесткое и не зависит от состояния внешней среды. Наличие у робота управляемой податливости наделяет его способностью воспринимать и реагировать на внешние контактные усилия, а также изменять свою траекторию в соответствии с выбранной стратегией. Таким образом, податливость позволяет манипуляционному роботу выполнять сложные производственные задачи. В общем случае контактные усилия создаются поверхностями, которые соприкасаются чаще с захваченным объектом, чем с самим схватом, по мере выполнения задачи роботом. В большинстве случаев точное расположение или силовые взаимодействия между захваченными объектами и внешними поверхностями заранее неизвестны. Другими словами, соотношения между силой и перемещением или задающие их уравнения могут меняться, даже если принять, что они линейные. Например, линейный коэффициент жесткости может изменяться от места к месту по мере выполнения операции. Отметим, что движение манипулятора вообще может иметь превосходную повторяемость (высокое разрешение и точность), тогда как движение в каждом цикле может существенно отличаться от движения в других циклах, чтобы скомпенсировать случайно изменяющуюся геометрию внешних контактирующих поверхностей (т. е. допусков).

Пример 7.6.1 ■

Привести несколько примеров робототехнических задач, требующих наличия податливого движения.

Решение. Здесь можно сослаться на множество примеров. Любая типовая операция автоматической сборки требует наличия податливого движения робота. Например, можно сослаться на следующие частные случаи.

1. Установка вала в отверстие.
2. Вытирание стеклянной или оконной панели.
3. Разрезание жареного мяса.
4. Поворот дверной ручки.
5. Установка предмета на поверхность.
6. Настройка гитары или пианино.

7. Игра на музыкальном инструменте.
8. Работа с хрупкими предметами.
9. Определение твердости поверхности контактным путем.

Вообще податливость либо обусловлена пассивной податливостью самого робота (например, эластичностью), либо обеспечивается соответствующим программированием системы управления с тем, чтобы робот мог реагировать на случайные тактильные воздействия. Прежде всего податливость определяется заданием механизмов, ответственных за податливое движение. Это по существу подразумевает математический анализ силовых взаимодействий между роботом и его окружением и полное определение уравнений с ограничениями. Для определения контактных сил, которые должны регулироваться компьютером во время выполнения роботом задачи, важно знать природу податливого движения. Здесь мы предлагаем два основных способа анализа податливого движения.

1. Можно использовать явную обратную связь с помощью линейных уравнений и обобщенных матриц жесткостей:

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\delta, \quad (7.6.1)$$

где \mathbf{f} — обобщенный вектор силы, включающий моменты, \mathbf{k} — обобщенная матрица жесткостей, а δ — обобщенный вектор смещения, который включает вращения и показывает отклонение по положению и ориентации манипулятора относительно заданной траектории. Кстати, матрица, обратная матрице жесткостей, называется *механической податливостью*, так что

$$\delta = \mathbf{C}\mathbf{f}. \quad (7.6.2)$$

Таким образом, зная механическую податливость \mathbf{C} и измерив контактную силу \mathbf{f} с помощью силовых датчиков, можно определить действительное отклонение контактных поверхностей из уравнения (7.6.2) и, используя обратную связь, вычислить соответствующее управляющее воздействие, чтобы скорректировать такие отклонения.

2. Можно также использовать гибридный регулятор, позволяющий управлять силой по некоторым степеням свободы при управлении положением по остальным степеням свободы. Таким образом, в математическом плане уравнения (7.5.1) и (7.5.2) используются одновременно.

Важным понятием, используемым в обоих вышеописанных методах, является *центр податливости*, т. е. точка объекта, где обобщенная сила и обобщенное отклонение коллинеарны и об-

общенная матрица жесткостей полностью диагональна, т. е.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} \quad (7.6.3)$$

Вообще использование явной обратной связи является более простым подходом, который особенно пригоден для специальных податливых движений, тогда как гибридный регулятор больше подходит на уровне планирования задания роботов.

Пример 7.6.2

Сначала схват удерживает предмет горизонтально, как показано на рис. 7.6.1, а. Затем схват поворачивает тело, которое весит W килограммов, по часовой стрелке до тех пор, пока оно

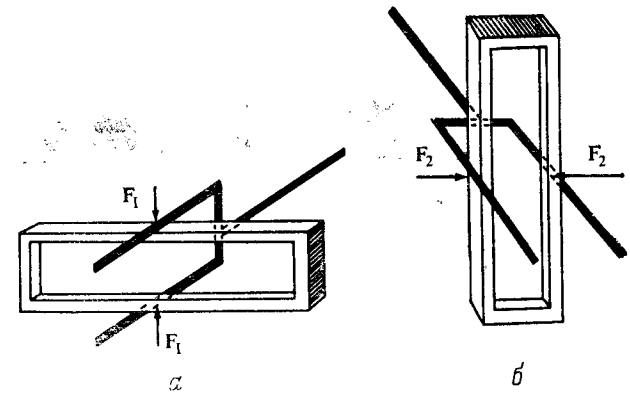


Рис. 7.6.1. Захват и вращение хрупкого предмета схватом.

не примет вертикальное положение (рис. 7.6.1, б). Требуется определить дополнительную силу схвата, необходимую для того, чтобы объект не скользил, если коэффициент трения между объектом и схватом равен f .

Решение. Дополнительная сила схвата $F_2 - F_1 = \delta F$, необходимая для предотвращения проскальзывания детали, равна силе, необходимой для создания силы трения, достаточной для компенсации веса W объекта. Следовательно,

$$W = 2f(F_2 - F_1), \quad \text{или} \quad (7.6.4)$$

$$F_2 - F_1 = \delta F = \frac{W}{2f}. \quad (7.6.5)$$

7.7. ПОНЯТИЕ ОБ УДАЛЕННОМ ЦЕНТРЕ ПОДАТЛИВОСТИ (УЦП)

Как отмечалось выше, центр податливости (ЦП) — это точка, в которой уравнения для отношений сила/момент — отклонение/поворот становятся развязанными. Таким образом, матрица жесткостей, или податливости, в ЦП диагональна. Как хорошо известно из теории структур, это понятие связано с центром масс (инерции), а также основными частотами колебаний конструкций роботов. При сборке деталей необходимо,

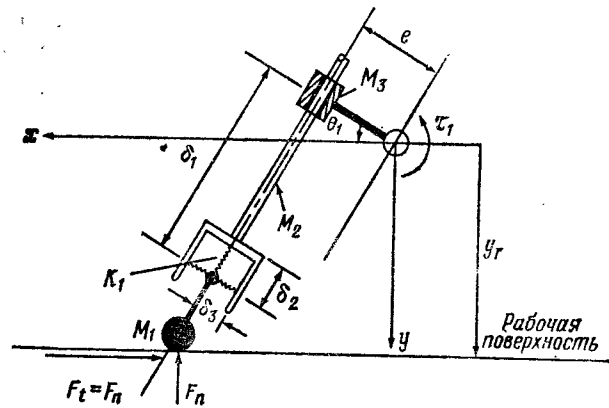


Рис. 7.7.1. Податливое движение цилиндрического полярного робота на рабочей поверхности.

чтобы ЦП был как можно ближе к точкам начального контакта. Понятие удаленного центра податливости (УЦП) вводится в силу того, что сочленения робота, обеспечивающие необходимые движения конечного звена, в общем случае находятся на ощутимом расстоянии от конечного звена при обеспечении податливого движения. Податливое движение обеспечивается регулятором, измеряющим величину и направление контактных сил в точке контакта (где предположительно находится ЦП) и преобразующим их в перемещение от (или к) контактной поверхности в том же направлении (контактной силы).

Пример 7.7.1 ■

Для манипуляционного робота, осуществляющего финишную обработку поверхности (рис. 7.7.1), нормальная сила F_n не должна превышать определенной величины, тогда как тангенциальная сила F_t должна быть равна произведению коэффи-

циента трения μ и нормальной силы F_n . Выведите закон «робот — поверхность» для податливого движения.

Решение. Представление связными графами приводит к следующим основным уравнениям:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{I_1(\delta_1)} [\tau_1 + F_1(\dot{\theta}_1) + \delta_2 k_1 e + k_1 \delta_3 \delta_1], \quad (7.7.1)$$

$$\ddot{\delta}_1 = \frac{1}{(M_1 + M_2)} [F_s + F_2(\dot{\delta}_1) + k_1 \delta_2], \quad (7.7.2)$$

$$\ddot{\delta}_2 = \frac{1}{M_1} [-k_1 \delta_2 - F_n \cos \theta_1 - \mu F_n \sin \theta_1], \quad (7.7.3)$$

$$\ddot{\delta}_3 = \frac{1}{M_1} [k_1 \delta_3 + F_n \sin \theta_1 + \mu F_n \cos \theta_1], \quad (7.7.4)$$

где k_1 — коэффициент жесткости датчика кисти, M_1 , M_2 и M_3 — массы, соответствующие схвату и двум другим звеньям, F_1 и F_2 — силы трения в сочленениях, τ_1 — момент в сочленении, F_s — продольная сила в сочленении, δ_2 и δ_3 — прогиб пружин кисти, δ_1 — поступательное смещение сочленения, θ_1 — угол поворота сочленения и I_1 — момент инерции робота относительно

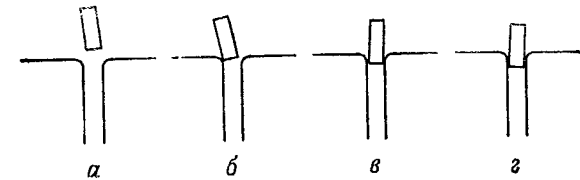


Рис. 7.7.2. Плоское податливое движение вала, устанавливаемого в отверстии.

вращательного сочленения. Сила реакции F_n может быть представлена линейно через коэффициент жесткости поверхности k_s , а именно:

$$F_n = k_s (y - y_r), \quad (7.7.5)$$

где y_r — положение рабочей поверхности. ■ ■

Пример 7.7.2 ■

Рассмотрите плоское податливое движение стержня, вставляемого в отверстие (рис. 7.7.2). Определите этапы податливого движения и получите основные уравнения.

Решение. Как показано на рис. 7.7.2, имеется четыре отдельных этапа податливого движения:

- стержень приближается к отверстию;
- стержень пересекает круговую границу отверстия;

- (в) стержень касается стенки отверстия в одной точке;
- (г) стержень касается стенки отверстия в двух точках.

Для каждого из этих этапов имеется множество геометрических уравнений и уравнений равновесия, которые должны удовлетворяться. В части (а), пока стержень движется к отверстию (рис. 7.7.3), основные уравнения равновесия (Д'Аламбера) опи-

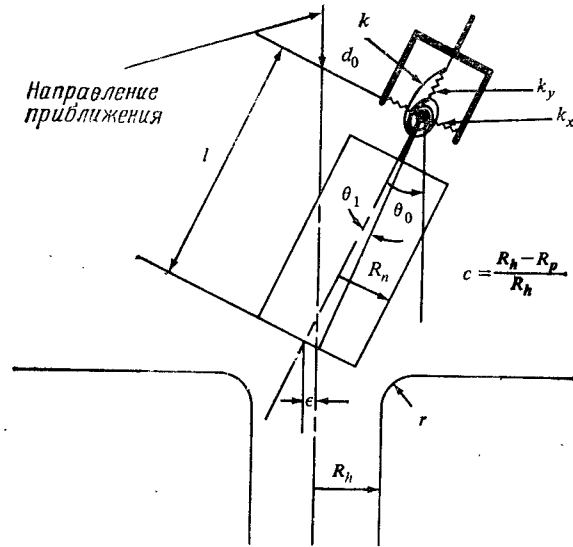


Рис. 7.7.3. Вал податливо присоединен к запястью за счет действия пружин k_x , k_y и k_θ .

сывают малые колебания стержня около центра податливости в кисти, так что

$$M\ddot{\delta}_x - k_x\delta_x - b_x\dot{\delta}_x = 0, \quad (7.7.6)$$

$$M\ddot{\delta}_y + k_y\delta_y - b_y\dot{\delta}_y = 0, \quad (7.7.7)$$

$$I\ddot{\theta} + k_\theta\theta - b_\theta\dot{\theta} = 0, \quad (7.7.8)$$

где k_x , k_y и k_θ — коэффициенты жесткости кисти, b_x , b_y и b_θ — линейные коэффициенты демпфирования податливой кисти. Основное геометрическое уравнение имеет вид

$$d_0 = \varepsilon_0 + l\theta_0. \quad (7.7.9)$$

Когда стержень начинает касаться круговой границы в одной точке (рис. 7.7.4), можно допустить наличие квазистатической

ситуации и записать основные уравнения для баланса сил и моментов, а также геометрических условий.

Основное геометрическое соотношение имеет вид

$$d = l\theta + \varepsilon. \quad (7.7.10)$$

Как показано на рис. 7.7.4, б, к круговой границе приложены нормальная сила F_n и сила трения $F_\mu = \mu F_n$. Эти силы должны

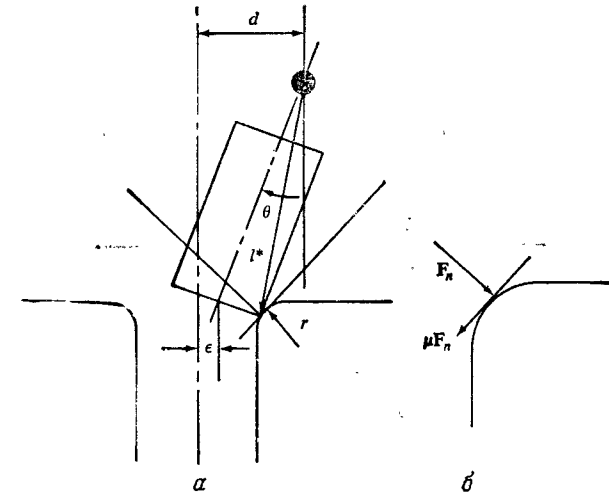


Рис. 7.7.4. Вал податливо взаимодействует со скругленным углом.

уравновешивать силы и моменты ЦП кисти. Следовательно,

$$|\mathbf{I}^* \times (\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_\mu)| + k_\theta(\theta - \theta_0) = 0, \quad (7.7.11)$$

$$\mathbf{F}_n + \mathbf{F}_\mu + k_x\delta_x + k_y\delta_y = 0, \quad (7.7.12)$$

где \mathbf{I}^* — вектор положения, направленный от ЦП к точке контакта. Подобные соотношения применимы для случая, когда имеется односточечный контакт со стенкой отверстия. Изменяется только вектор положения контакта \mathbf{I}^* .

Как показано на рис. 7.7.5, для двухточечного контакта ситуация становится немного сложнее; уравнения равновесия сил и моментов в этом случае принимают вид

$$|\mathbf{I}_1^* \times (\mathbf{F}_{n1} - \mathbf{F}_{\mu1})| + |\mathbf{I}_2^* (\mathbf{F}_{n2} - \mathbf{F}_{\mu2})| + k_\theta(\theta - \theta_0) = 0, \quad (7.7.13)$$

$$\mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{\mu1} + \mathbf{F}_{n2} + \mathbf{F}_{\mu2} + k_x\delta_x + k_y\delta_y = 0. \quad (7.7.14)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть задачи, связанные с заклиниванием и зажимом при сборке гибких деталей.

Анализ геометрии и сил/моментов — деформаций/поворотов, относящийся к сборке деталей манипуляционными роботами, играет важную роль в проектировании манипуляционных роботов и управлении ими. Существуют стандартные приспособления, которые обеспечивают эффективное податливое движение и позволяют избежать заклинивания и зажима собираемых де-

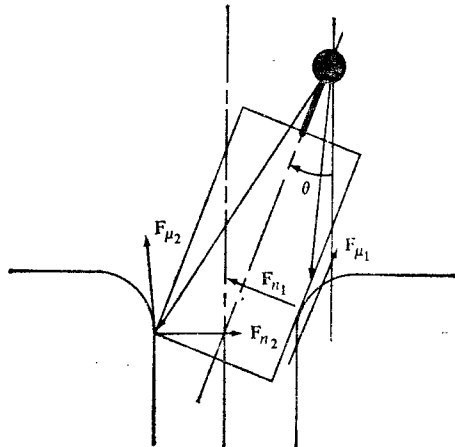


Рис. 7.7.5. Вал податливо касается стенок отверстия в двух точках.

талей. Одним из хорошо известных приспособлений является устройство с удаленным центром податливости (УЦП), который обладает способностью уменьшать парные силы и предотвращать зажимы.

7.8. КРИТЕРИЙ ЗАКЛИНИВАНИЯ СИМУНОВИЧА

Установка вала в отверстие достаточно широко рассмотрена в литературе. В основном это связано с тем, что почти 35% сборочных процессов включают какие-либо операции установки стержней и круглых валов в отверстия. Здесь мы представим простой анализ двумерной установки вала в отверстие, следуя подходу Симуновича [8]. Двумерная ситуация выбрана из-за простой геометрии и несложных математических и геометрических выкладок. Разумеется, общая геометрия может быть проанализирована аналогичным, но более сложным способом. Здесь же целью является изучение эффектов трения и геометрических параметров вала и отверстия в процессе установки и сопутствующего явления заклинивания. Кроме того, одной из целей является получение множества критериев для создания

мгновенного импеданса в системе, чтобы заставить развиваемые силы корректировать ошибку относительного расположения деталей. В последующем анализе мы считаем все процессы квазистатическими, т. е. пренебрегаем инерционными силами. Далее мы полагаем, что взаимодействующие детали твердые, а статические и кинематические коэффициенты трения равны.

Рассмотрим рис. 7.8.1. Пусть $\mathbf{F} = [F_x F_y 0]$ и $\mathbf{M} = [0 0 M_0]$ — компоненты векторов силы и момента в декартовой прямоуголь-

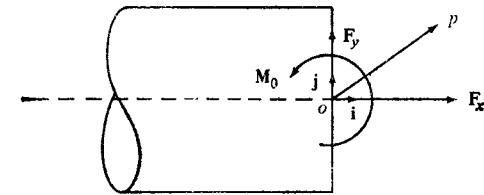


Рис. 7.8.1. Структура сил, приложенных к валу.

ной системе координат XYZ . Отметим, что момент \mathbf{M}_0 создается системой сил $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y$ относительно оси Z , так как центр действия системы F_x, F_y не обязательно совпадает с началом системы XYZ . Момент \mathbf{F} относительно любой точки P равен \mathbf{M}_P , так что

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M} - \mathbf{OP} \times \mathbf{F}. \quad (7.8.1)$$

Если \mathbf{M}_P положить равным нулю, то уравнение (7.8.1) позволяет найти фокус для всех точек, относительно которых система приложенных сил не создает моментов, т. е.

$$X_P F_y - Y_P F_x = M_0, \quad (7.8.2)$$

где X_P и Y_P — координаты X и Y всех таких точек P соответственно. Можно сделать все переменные безразмерными, введя следующие величины:

$$x = \frac{X_P}{r}, \quad y = \frac{Y_P}{r}, \quad f_x = \frac{R F_x}{M_0} \quad \text{и} \quad f_y = \frac{z F_y}{M_0}, \quad (7.8.3)$$

где r — радиус отверстия. Уравнение (7.8.2) принимает теперь вид

$$f_y x - f_x y = 1. \quad (7.8.4)$$

Без потери общности можно заменить \mathbf{F} на $\mathbf{f} = [f_x f_y 0]$ в последующем анализе.

Рассмотрим теперь рис. 7.8.2. Пусть A и B — точки контакта между стержнем и стенкой отверстия, \mathbf{N}_A и \mathbf{N}_B — нормальные

силы реакции, T_A и T_B — силы трения в этих точках. Пусть угол между осью стержня и осью отверстия равен θ .

Из рис. 7.8.2 видно, что

$$N_A \geq 0, \quad N_B \geq 0, \quad (7.8.5)$$

$$\frac{T_A}{N_A} \leq \mu_A = \operatorname{tg} \varphi_A, \quad (7.8.6)$$

$$\frac{T_B}{N_B} \leq \mu_B = \operatorname{tg} \varphi_B, \quad (7.8.7)$$

где μ_A и μ_B — коэффициенты трения в точках A и B соответственно. Линия действия силы в точке A имеет наклон s_A , так

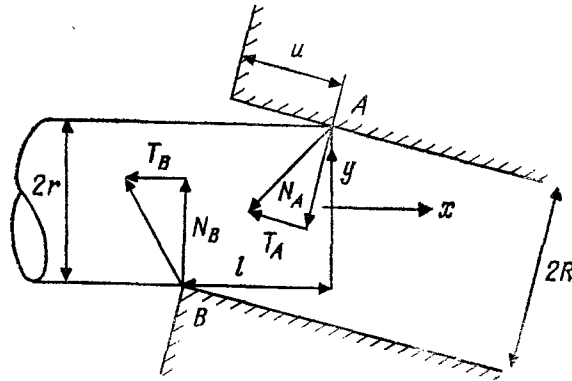


Рис. 7.8.2. Структура сил реакции.

что ее уравнение имеет вид

$$y_A = s_A x_A + r \quad (7.8.8)$$

или в безразмерной форме

$$y = s_A x + 1. \quad (7.8.9)$$

Ясно, что наклон s_A ограничен $\operatorname{ctg}(\varphi_A - \theta)$ и $\operatorname{ctg}(\varphi_A + \theta)$, так что

$$\operatorname{ctg}(\varphi_A + \theta) < s_A < \operatorname{ctg}(\varphi_A - \theta). \quad (7.8.10)$$

Аналогично для точки B

$$y + 1 = s_B \left(X + \frac{1}{r} \right), \quad (7.8.11)$$

где s_B — наклон линии действия силы F_B , так что

$$|s_B| \geq \mu_B^{-1}. \quad (7.8.12)$$

Отметим, что из рис. 7.8.2 следует

$$l^2 + (2r)^2 = U^2 + (2R)^2. \quad (7.8.13)$$

Заклинивание может произойти, если любая из точек контакта находится вне конуса трения другой точки контакта. Ясно, что это может произойти, если

$$\frac{1}{2r} \geq \mu + C \left(\frac{1 + \mu^2}{\mu} \right), \quad (7.8.14)$$

где $C = (R - r)/R$ — отношение зазора к диаметру. Условие (7.8.14) известно как *критерий заклинивания Симуновича*. (См. домашнее задание 11.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Arai T., Kinoshita N., The Part Mating Forces that Arise When Using a Worktable with Compliance, *Assembly Autom.*, VI(4), 204—210, 1981.
2. Drake S. H., The Use of Compliance in a Robot Assembly System, in IFAC Symposium, Tokyo, Oct. 1977; Using Compliance in Lieu of Sensory Feedback for Automatic Assembly, Ph. D. thesis, M. I. T., Mechanical Engineering Department, 1977.
3. Nevins J. L., and Associates, Exploratory Research in Industrial Modular Assembly, C. S. Draper Lab. Rept. No. R-764 (1973), R-800 (1974), R-850 (1975), R-996 (1976), R-1111 (1977), R-1218 (1978).
4. Nevins J. L., Whitney D. E., Computer-Controlled Assembly, *Sci. Am.*, 238(2), 62—74, 1978.
5. Nevins J. L., Whitney D. E., Assembly Research, *Indus. Robot*, 7(1), 27—43, 1980.
6. Ohwovoriole M. S., An Extension of Screw Theory and Its Applications to the Automation of Industrial Assemblies, Ph. D. thesis, Stanford University, Department of Computer Science, 1980.
7. Simunovic S., Force Information in Assembly Processor, in Proceedings of the 5th International Symposium on Industrial Robots, Vol. 7, No. 1, pp. 415—431, 1975.
8. Simunovic S., An Information Approach to Paths Mating, Sc. D. thesis, M. I. T., Mechanical Engineering Department and C. S. Draper Lab. Rept. T-690, 1979.
9. Whitney D. E., Quasi-static Assembly of Compliantly Supported Rigid Parts, *Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 104(3), 65—77, 1982.

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. На основании манипуляционного робота, находящегося в статическом равновесии, действуют следующие силы f и моменты τ :

$$f = 8i + 16j + 9k \quad \text{и} \quad \tau = 8i + 3j + 41k.$$

Какова эквивалентная система сил и моментов в схвате, если он находится в системе координат G , задаваемой относительно

базовой системы координат следующим образом:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Сила ${}^G f$ и момент ${}^G \tau$ в схвате манипуляционного робота в статическом равновесии имеют вид

$${}^G f = 100i + 17j + 18k \quad \text{и} \quad {}^G \tau = 20i + 150j - 80k.$$

Система координат схвата G относительно системы T_0^6 , а также система T_0^6 задаются как

$${}^{T_0^6} G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad T_0^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдите силу f и момент τ в основании робота.

3. Для манипуляционного робота PUMA 560 определите общие выражения для векторов силы и момента, действующих в основании, если к схвату приложена сила общего вида $F = [f_x f_y f_z \tau_x \tau_y \tau_z]^T$.

4. Сила ${}^G f$ и момент ${}^G \tau$ схвата робота при статическом равновесии имеют вид

$${}^G f = 10i + 7j + 8k \quad \text{и} \quad {}^G \tau = 200i + 100j - 100k.$$

Расположение системы координат схвата G относительно системы T_0^6 , а также система T_0^6 задаются как

$${}^{T_0^6} G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad T_0^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдите силу f и момент τ , действующие в основании робота.

5. Выразите момент $\tau_{0,1}$ для однозвенного робота (рис. 37.5) через силы $f_{1,2}$ и моменты $\tau_{1,2}$ схвата, а также другие необходимые параметры.

6. К основанию робота, находящегося в статическом равновесии, приложены следующие силы F и моменты τ :

$$F = 5i + 6j + 7k \quad \text{и} \quad \tau = 10i + 20j + 30k.$$

Рис. 37.5.

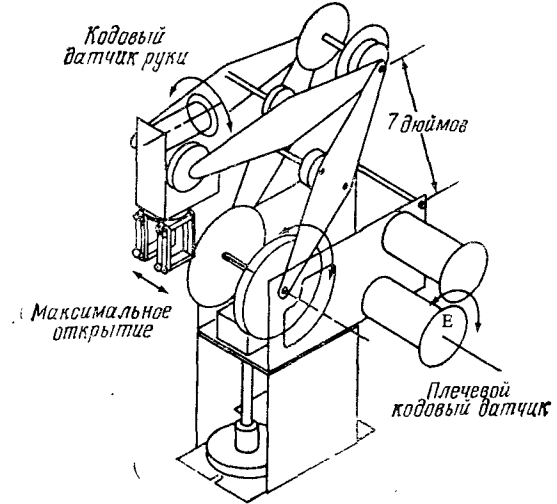
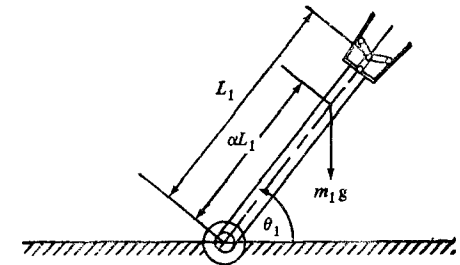


Рис. 37.7. Робот Rhino XR-2.

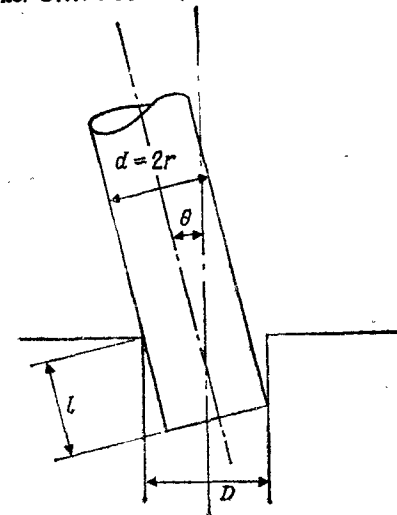


Рис. 37.8. Процесс жесткой установки вала в отверстие.

Каковы эквивалентная сила и момент в схвате, если он расположен в системе координат A , такой, что

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Найдите якобиан преобразований J_1 и J_2 для робота Rhino XR-2. J_1 и J_2 определены формулами (7.3.6) и (7.4.3) соответственно (рис. 37.7).

8. Для процесса установки роботом вала в отверстие (рис. 37.8) покажите, что заклинивание произойдет, если

$$2 \left(\frac{1}{d} \right) + \frac{C(1-\mu^2)}{\mu} = 0,$$

где $C = (D - d)/d$ и μ — коэффициент трения.

9. Решите задачу 8 для стержня с модулем упругости Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига G .

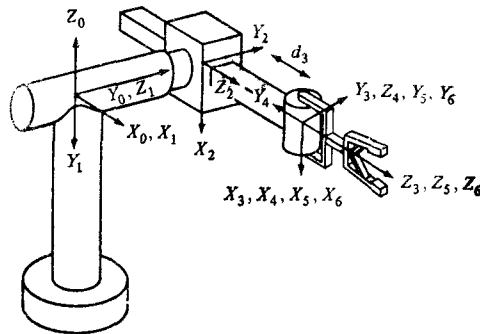


Рис. 37.10. Манипуляционный робот, работающий в цилиндрической системе координат.

10. Найдите якобианы преобразований J_1 и J_2 для робота (Stanford arm), работающего в цилиндрической системе координат (рис. 37.10). Определения J_1 и J_2 даны выше

11. Выведите выражение (7.8.14) для критерия заклинивания Симуновича.

Очувствление и зрение роботов

8.1. ВВЕДЕНИЕ

Главная цель информационного очувствления манипуляционных роботов — сделать их способными работать в неупорядоченной и случайной обстановке. Если роботы не снабжены информационными датчиками, то они будут не способны воспринимать какие-либо изменения в своей рабочей обстановке и реагировать на них. Схват робота все время будет стремиться захватить предмет в определенной точке, которой он был запрограммирован, даже если этого предмета там нет. Более того, он будет двигаться по траектории к предмету, даже если в это время появляется препятствие на его пути. Таким образом, он скорее столкнется с препятствием, чем «почувствует» наличие препятствия и станет двигаться вокруг него для достижения того предмета, который нужно захватить. Следовательно, чтобы манипуляционные роботы могли работать эффективно, они должны снабжаться группой датчиков, и кроме того необходимо соответствующее программное обеспечение, с тем чтобы компьютер, управляющий роботом, мог получать данные от датчиков и выработать в реальном времени необходимые команды и информацию для принятия решения. Роботы, способные выполнять такие операции, называются *интеллектуальными роботами*.

Общая схема интеллектуального робота, управляемого от компьютера, показана на рис. 8.1.1.

Как видно из рис. 8.1.1, система представляет собой многоуровневую иерархическую замкнутую систему управления. На нижних уровнях положение, скорость и, возможно, ускорение включаются в обратную связь с помощью оптических датчиков, тахометров и акселерометров соответственно. На верхних уровнях иерархического управления система обладает рядом более

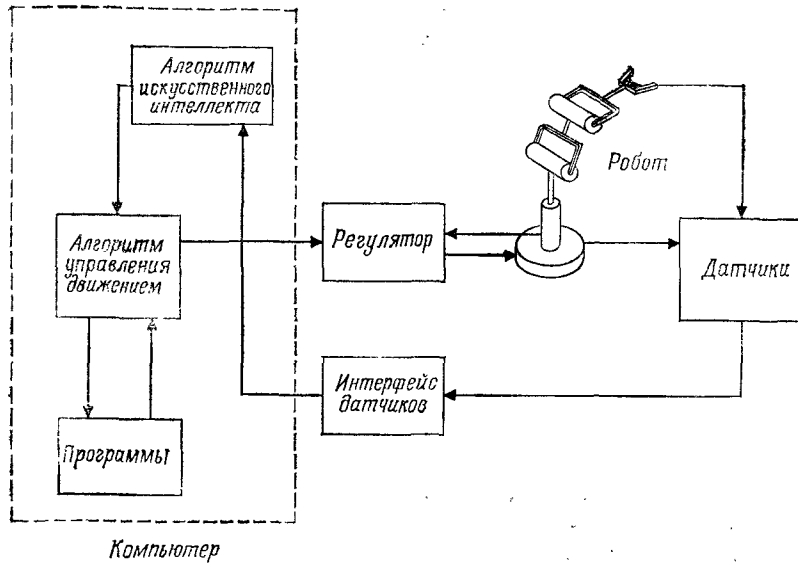


Рис. 8.1.1. Общая блок-схема очувствленного манипуляционного робота, управляемого от ЭВМ.

сложных датчиков внешней информации, которая используется в цепи обратной связи.

Вообще датчики предназначены для регулярного выполнения следующих функций.

1. Получение априорной информации о положении и (или) ориентации объектов манипулирования и о рабочих деталях, а также о самом роботе.

2. Коррекция ошибок положения и (или) ориентации как схвата робота, так и деталей.

3. Получение апостериорной информации для обнаружения дефектов и брака готовых изделий с помощью визуальной проверки, т. е. с помощью системы технического зрения либо с помощью ультразвуковых или звуковых средств.

4. Непрерывное получение информации о силах, возникающих между схватом и деталями, а также определение профиля поверхностей деталей с помощью средств тактильного очувствления.

5. Получение непрерывной информации о других аспектах окружения робота, таких, как наличие температурных градиентов, химических веществ и волн.

Далее мы представим широкую классификацию робототехнических датчиков.

8.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ДАТЧИКОВ РОБОТОВ

Принято классифицировать датчики роботов на две различные, но широкие группы, а именно внутренние и внешние, как показано на рис. 8.2.1. Заметим, что внешние датчики далее подразделяются на контактные и бесконтактные. Это деление является в некоторой мере произвольным, так как, например, тактильные датчики на деле оказываются *внутренними*, т. е. датчики расположены в схвате манипулятора. Однако их задача — получить примерный контур внешней захватываемой детали или ее структуры (поверхности). Простым тактильным датчиком является микровыключатель, который улавливает наличие барьера, препятствий либо поверхностей, за пределы которых роботу не разрешается двигаться. Таким образом, им можно пользоваться для того, чтобы избежать столкновения или сообщить роботу, что цель достигнута, или же измерять размеры деталей или предметов, которые нужно перемещать или собирать. С другой стороны, датчики сил и моментов, которые обычно расположены где-либо между запястьем и схватом, измеряют силы и моменты реакции. Они могут состоять из

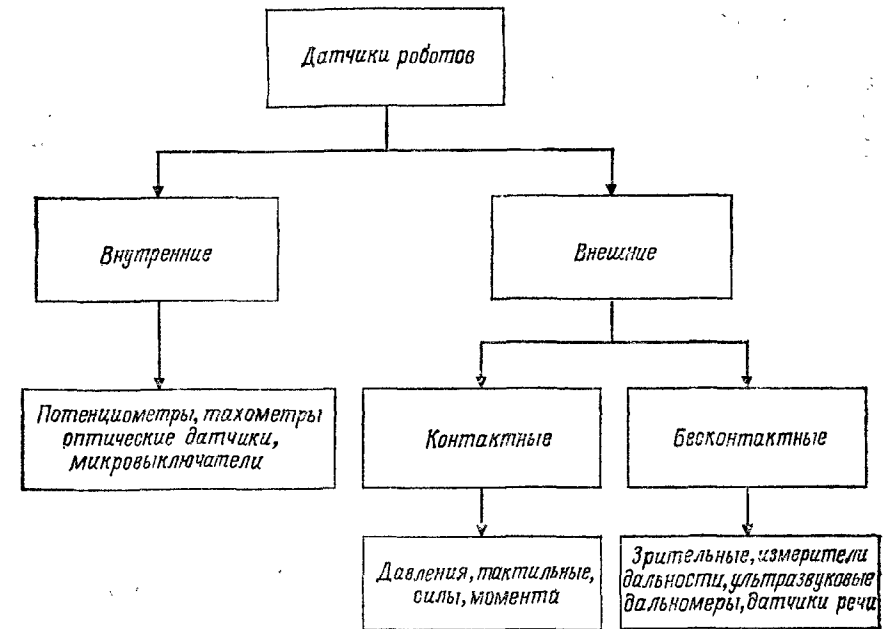


Рис. 8.2.1. Классификация датчиков роботов.

простых измерителей деформации, расположенных в схвате или руке робота, либо это могут быть пьезоэлектрические преобразователи, расположенные в схвате робота.

Другой важной группой датчиков роботов являются бесконтактные датчики; к ним относятся визуальные, локационные и акустические датчики, измерители дальности, датчики температуры и химические датчики.

Пример 8.2.1 ■

Требуется дать краткое описание некоторых бесконтактных датчиков, указать их преимущества и недостатки.

Решение. Начнем с визуальных датчиков; заметим, что они в основном базируются на цифровых ТВ-камерах или сканирующих устройствах с лазерным лучом. Оцифрованные сигналы из камер с частотой примерно 50 кадров в секунду поступают в центральную ЭВМ, которая в свою очередь анализирует данные и извлекает необходимую и полезную информацию. Этот процесс более подробно рассматривается ниже в этой главе. Здесь же мы остановимся на другом классе бесконтактных датчиков, а именно на классе локационных датчиков. Датчики этого типа обнаруживают наличие предмета в пределах ограниченного рабочего пространства около самих датчиков. Хорошим примером локационных датчиков является индуктивный датчик, с помощью которого можно обеспечивать постоянное расстояние между роботом и стальной пластиной, и поэтому он полезен для целей сварки или финишной обработки поверхностей. Другим примером простого локационного датчика является светодиод и соответствующий светоприемный диод (фотодиод), который может принимать отраженный от поверхности световой луч и таким образом сигнализировать о ее близости. Интенсивность принимаемого сигнала в большой степени зависит от отражающей способности поверхностей, расстояние до которых нужно измерить, что является недостатком таких датчиков. Акустические датчики включают такие устройства, как специальные микрофоны, способные воспринимать отдельные слова либо определять наличие изъянов и трещин в материалах.

Другим способом бесконтактного измерения является определение расстояния до объекта, на основании которого можно получить информацию о форме предметов или распределении объектов в пространстве такими методами, как триангуляция. Более подробно это рассматривается ниже в этой главе. ■ ■

Существует два основных способа использования датчиков роботов: включение датчика в цепь обратной связи при подвижном роботе и использование датчиков при неподвижном роботе. При использовании первого способа манипуляционный робот

управляется датчиком во время самого движения. Например, большинство зрительных систем работает в режиме обратной связи, так что камера следит за ошибкой между реальным и желаемым положениями схвата. Компьютер пользуется этой информацией для того, чтобы эффективно перемещать манипулятор для достижения требуемого положения схвата. Главной трудностью этого метода является большое время вычислений для анализа полученных изображений и соответственно управления роботом для коррекции его кинематического положения.

При втором способе использования датчика робот остается неподвижным, тогда как датчики воспринимают окружающую обстановку и осуществляют обратную связь. После этого процесса робот перемещается вслепую (рис. 8.2.2).

Пример 8.2.2 ■

Предлагается рассмотреть систему технического зрения (СТЗ), включенную в цепь обратной связи (рис. 8.2.3). Камера наблюдает за движением предмета, будучи прикрепленной к звену 5 манипулятора. Матрица преобразований 5C , описывающая положение системы координат камеры относительно системы T_5 , и матрица преобразований, описывающая положение системы координат схвата относительно системы T_5 , т. е. A_5^6 , имеют вид

$${}^5C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.2.1)$$

$$A_5^6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.2.2)$$

Система координат предмета связана с системой координат камеры преобразованием 6O . Система координат предмета связана с системой координат схвата преобразованием 6O . Нужно определить обобщенный дифференциальный вектор, связывающий системы координат схвата и предмета, если обобщенный дифференциальный вектор, связывающий системы координат предмета и камеры, имеет вид

$${}^6D = [-0.2 \ 0.2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.2]^T. \quad (8.2.3)$$

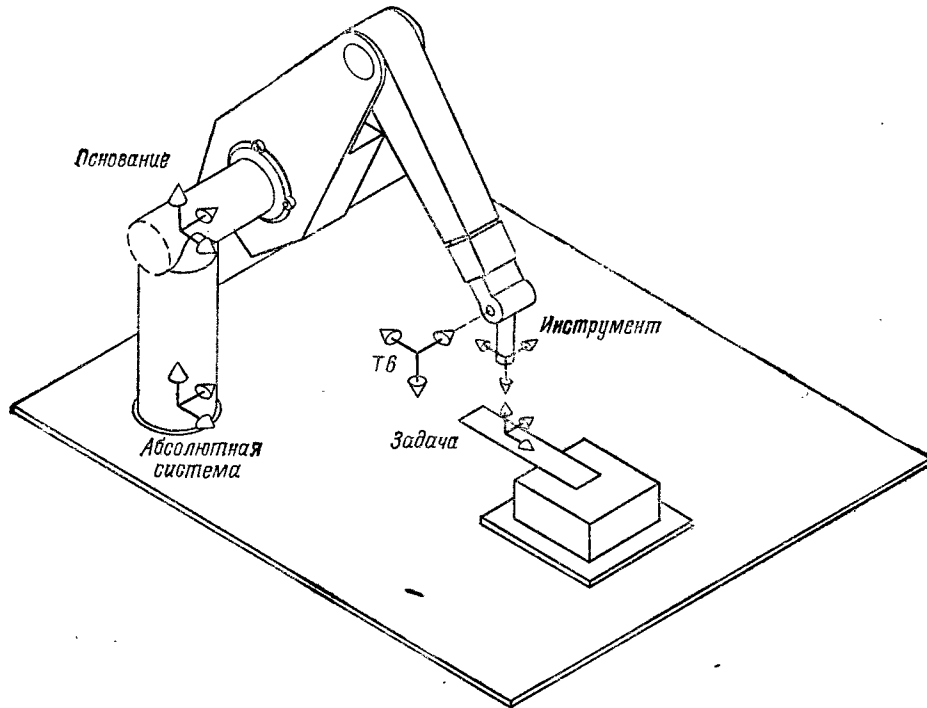


Рис. 8.2.2. Статическое очувствление движения робота.

Решение. Обратимся к рис. 8.2.3. Заметим, что система координат схвата связана с системой координат камеры cG следующим образом:

$${}^cG = {}^5C^{-1}A_6^6 \quad (8.2.4)$$

Заметим, что

$${}^5C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.2.5)$$

Следовательно, cG имеет вид

$${}^cG = CAM^{-1}A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.2.6)$$

или

$${}^cG = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.2.7)$$

Таким образом, $n = 0i - 0j + 0k$, $o = 0i + 0j + k$, $a = i + 0j + 0k$ и $p = 5i + 0j + 8k$. Заметим также, что

$${}^c d = -0.2i + 0.2j + 0k, \quad (8.2.8)$$

$${}^c \delta = 0i + 0j + 0.2k. \quad (8.2.9)$$

Следовательно,

$${}^T d_x = \delta \cdot (p \times n) + d \cdot n = n \cdot (\delta \times p + d), \quad (8.2.10)$$

$${}^T d_y = \delta \cdot (p \times o) + d \cdot o = o \cdot (\delta \times p + d), \quad (8.2.11)$$

$${}^T d_z = \delta \cdot (p \times a) + d \cdot a = a \cdot (\delta \times p + d), \quad (8.2.12)$$

$${}^T \delta_x = n \cdot \delta, \quad (8.2.13)$$

$${}^T \delta_y = o \cdot \delta \quad \text{и} \quad (8.2.14)$$

$${}^T \delta_z = a \cdot \delta, \quad (8.2.15)$$

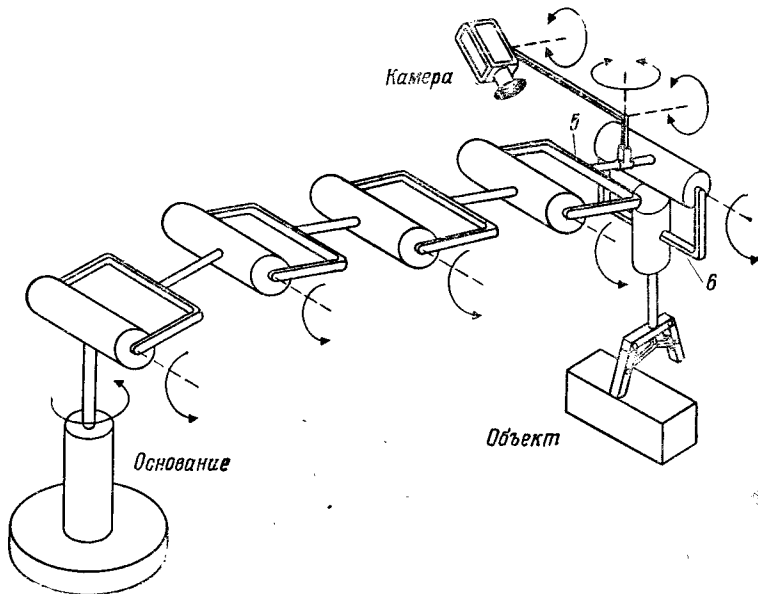


Рис. 8.2.3. Замкнутая зрительная система, установленная на манипуляционном роботе.

так что $\delta \times p = 0i + 1j + 0k$. Следовательно,

$${}^6d = -1.2i + 0j + 0k \quad \text{и} \quad (8.2.16)$$

$$\delta = 0i + 0.2j + 0k. \quad (8.2.17)$$

Наконец,

$${}^6D = [-1.2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (8.2.18)$$

8.3. СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКОГО ЗРЕНИЯ РОБОТОВ

Системы технического зрения роботов обычно снабжаются несколькими ТВ-камерами, способными оцифровывать получаемую информацию и обрабатывать ее. Центральный процессор анализирует эту информацию и распознает объект, визуальную ситуацию или сцену для любых манипуляций робота. Основные приложения систем технического зрения относятся к сборочным процессам, управлению качеством и классификации деталей.

Типичная система технического зрения состоит из ТВ-камеры, связанной с компьютером через буферную память и пре-процессор видеoinформации. Буферная память играет роль видеобуфера. Видеосигнал может направляться на ТВ-монитор для непрерывного отображения анализируемой сцены. Обработка зрительной информации о сцене в общем случае происходит очень медленно, и поэтому обычно используется препроцессор для того, чтобы сохранять только полезную информацию и сокращать время обработки. Образы должны быть контрастными относительно фона, и для установки интенсивностей различных частей сцены в белый или черный тон используется некоторый порог. На рис. 8.3.1 показана общая схема типичной системы технического зрения роботов.

ТВ-камеры могут быть расположены как на роботе (рис. 8.2.3), так и отдельно. Как было показано в примере 8.2.2, движение робота определяется разностным сигналом ошибки между расположением объекта и расположением схвата или камеры. Недостатком этой системы является то, что требуется наличие прочной камеры, потому что она подвергается грубым перемещениям. Кроме того, дополнительный вес камеры на руке робота нежелателен и требует дополнительных алгоритмов управления и времени вычисления управления. С другой стороны, можно расположить зрительную систему вне робототехнической системы (рис. 8.3.1); однако это требует наличия полного трехмерного восприятия сцены робота, что может создать проблемы в управлении и вычислениях. Преимуществом первой схемы (рис. 8.2.3) является то, что робот способен перемещать

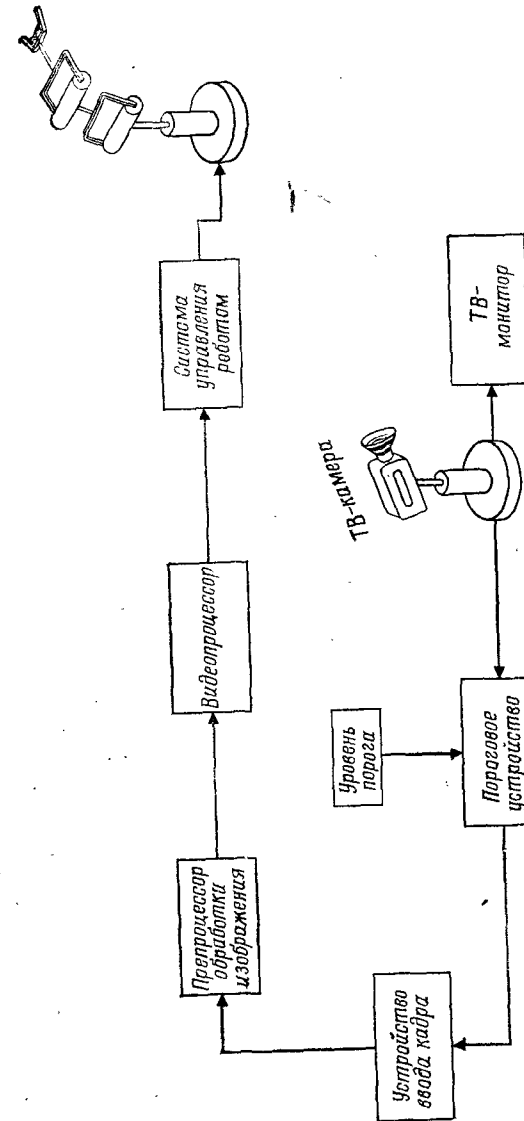


Рис. 8.3.1. Типичная система технического зрения.

камеру вокруг объекта и получать гораздо лучшую визуальную информацию, тогда как схема на рис. 8.3.1, например, дает нам только фиксированный обзор трехмерной сцены.

8.3.1. ТВ-КАМЕРЫ — ГЛАЗА РОБОТОВ

Датчики систем технического зрения в основном принадлежат к типу ТВ-камер. В этих камерах, которые играют роль глаз роботов, образы передаются в реальном времени и уже в цифровом виде. Электроника камеры способна осуществлять развертку целого изображения на более чем 500 строк (525 строк в США), что называется *кадром*. Каждый кадр изображения передается двумя полукадрами, каждый из которых образован разными строками развертки в кадре. Электроника камеры генерирует и передает полукадры последовательно. Например, передаваемое изображение состоит из выводимых на экран нечетных строк развертки, чередующихся с четными строками. В настоящее время существует семь различных типов передающих камер роботов, используемых для получения ТВ-изображений сцен.

Ортиконовая трубка. Это трубка запоминающего типа, поскольку она основана на нейтрализации положительных зарядов сканирующим электронным лучом. Ортиконовая трубка состоит из зрительной и считывающей секций. В зрительной секции свет сцены фокусируется на полупрозрачный фотокатод. Фотокатод эмиттирует электроны, которые фокусируются магнитным полем катушки и далее ускоряются по направлению к положительно заряженной мишени. Эта мишень сделана из тонкого стеклянного диска с тонкопроволочным сетчатым экраном со стороны катода. Когда электроны ударяются об экран, со стеклянного диска эмиттируются вторичные электроны и сторона развертки стеклянного диска становится положительно заряженной. Структура этих положительно заряженных областей соответствует структуре интенсивности света изучаемой сцены. Обратная сторона стеклянного диска затем сканируется электронным лучом из электронной пушки (рис. 8.3.2) на задней стенке трубки. Окончательное изображение представляется лучом с амплитудно-модулированной интенсивностью.

Видиконная трубка. Эта трубка в общем случае гораздо прочнее, меньше, легче и портативнее по сравнению с ортиконовой трубкой. Мишень в видиконной трубке покрыта прозрачной проводящей пленкой, которая действует как электрод для видеосигналов. Пленка находится на тонком фоточувствительном слое, состоящем из большого числа крошечных резистивных элементов. Эти элементы таковы, что их сопротивление умень-

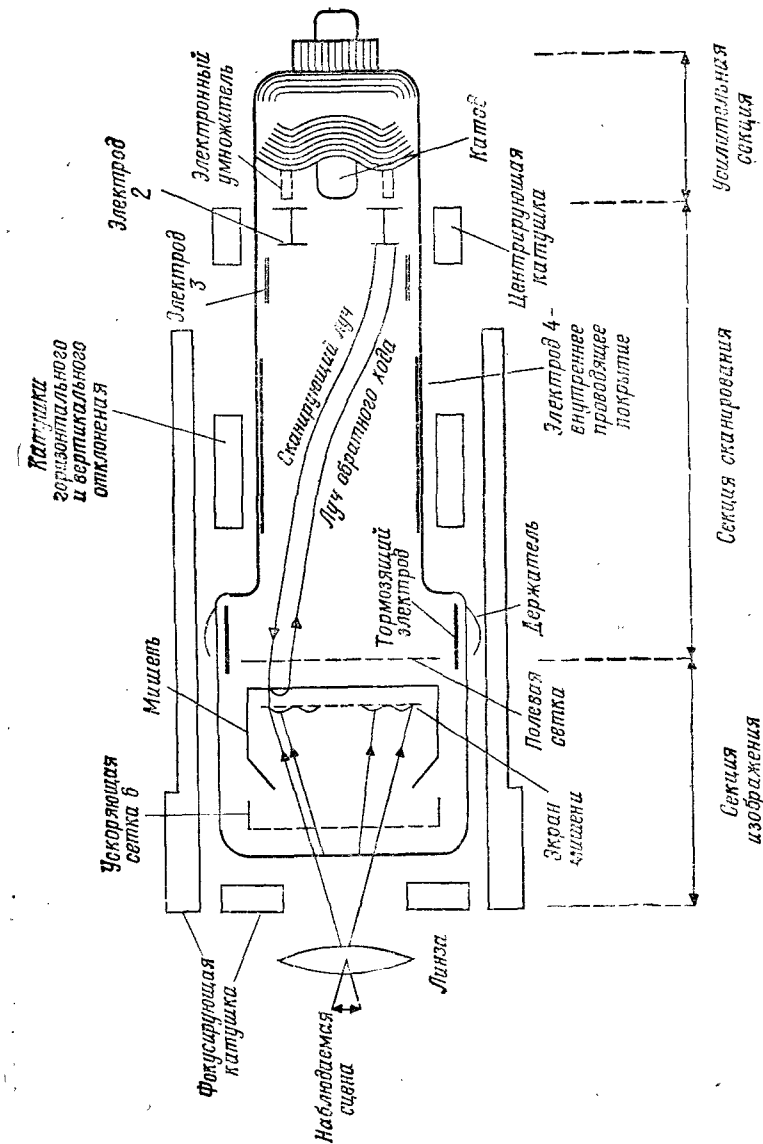


Рис. 8.3.2. Ортиконовая трубка.

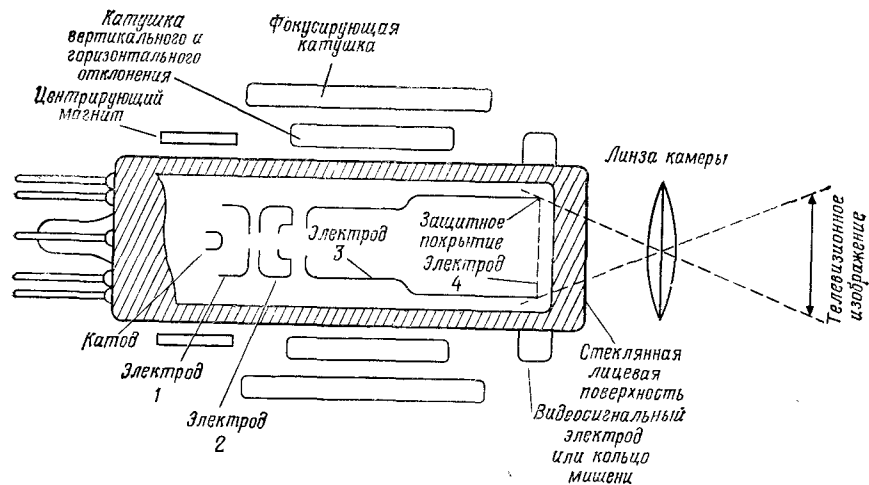


Рис. 8.3.3. Видиконовая трубка.

шается при освещении. Именно этот слой сканируется растровым способом электронным лучом из электронной пушки на задней стенке трубки. Электроны попадают на этот слой и уменьшают его потенциал. По существу две поверхности мишени образуют конденсатор, а сканирование луча порождает емкостный ток в видеосигнальном электроде, который в действительности является видеосигналом (рис. 8.3.3).

Плюмбиконовая трубка. Эта трубка в основном такая же, как и видиконовая, за исключением того, что фоточувствительный слой сделан из окисла свинца. Это дает некоторые преимущества перед видиконовой трубкой: малый ток, более высокая чувствительность и малая задержка.

Иконоскоп. В иконоскопе мишень сканируется электронным лучом. Мишень состоит из тонкой слюдяной мозаичной пластинки, которая покрыта фоточувствительным слоем. В иконоскопе электронный и световой лучи попадают на одну и ту же сторону поверхности мишени в отличие от ортиконовой, видиконовой и плюмбиконовой трубок. Обратная сторона тонкой слюдяной пластинки покрыта проводящей пленкой, которая связана с выходной нагрузкой. Эта электронная система похожа на матрицу из маленьких конденсаторов, которые разряжаются через общую нагрузку. В современных системах технического зрения эта трубка не используется.

Диссекторная видеотрубка. В диссекторной видеотрубке свет с исследуемой сцены фокусируется на катоде, покрытом фоточувствительным слоем. В таком случае катод испускает элек-

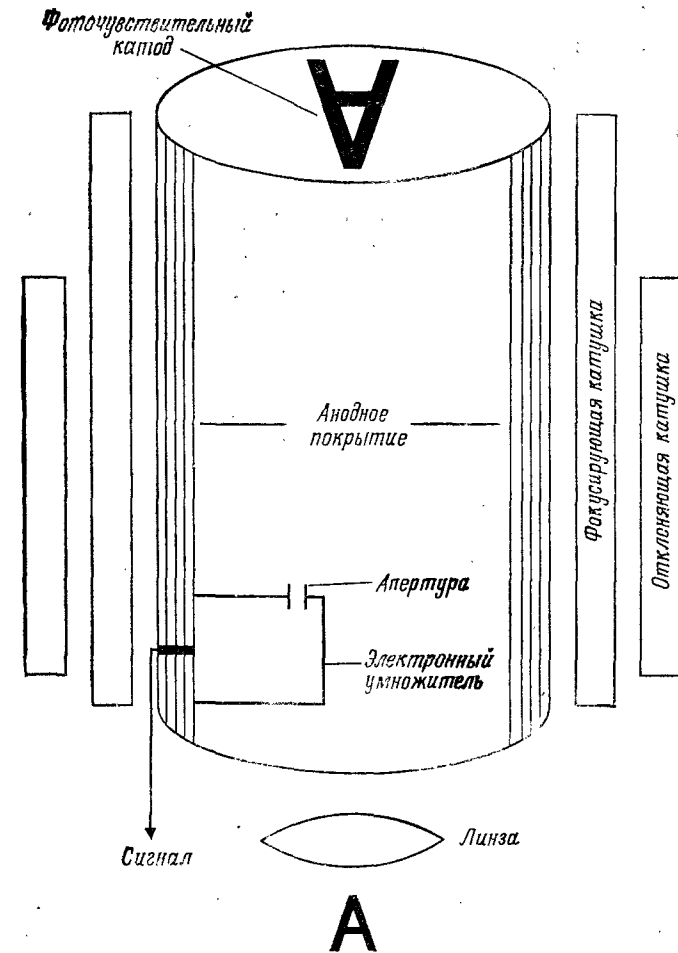


Рис. 8.3.4. Изображающая диссекторная трубка.

троны, количество которых пропорционально количеству света, падающего на катод. Эти электроны ускоряются к мишени с помощью анода. Небольшое отверстие перед мишенью позволяет только небольшой части эмиттируемых катодом электронов достичь мишени. Следовательно, в некотором смысле это электронный умножитель, и весь прибор работает за счет мгновенного сканирования, а не за счет вторичной нейтрализации положительных зарядов (рис. 8.3.4).

Для фокусировки электронного изображения и получения осевого магнитного поля используется фокусирующая катушка. Электронное изображение сканируется после прохождения отверстия мишени с помощью отклоняющих катушек. Электронный умножитель создает переменное напряжение, которое представляет собой видеосигнал. Следовательно, изображение «рассекается» при сканировании мишени.

Прибор с зарядовой связью (ПЗС). Камеры типа ПЗС попадают в общую категорию приборов с передачей заряда

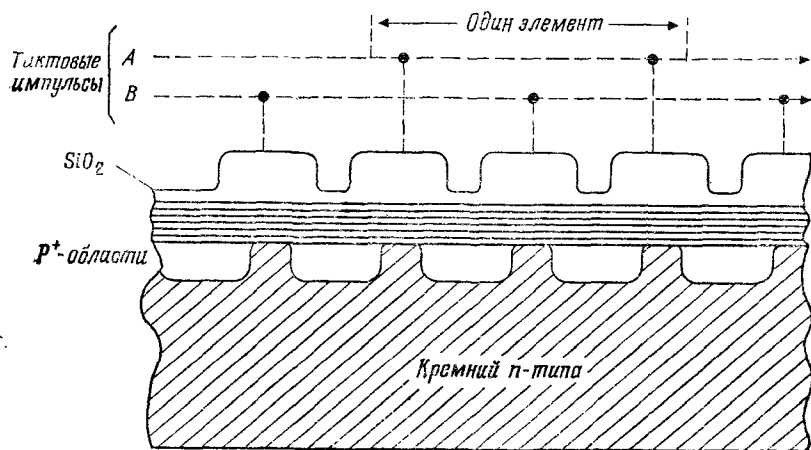


Рис. 8.3.5. Прибор с зарядовой связью (ПЗС).

(ППЗ). ПЗС-камера робота работает примерно так же, как и полевой транзистор типа металл — окисел — полупроводник, потому что ПЗС-камера имеет область истока и область стока, соединенные каналом из обедненной области (рис. 8.3.5). По способу обработки изображения ПЗС-камеру можно рассматривать как монолитную матрицу из близко расположенных емкостей типа металл — окисел — полупроводник (МОП), которые формируют сдвиговый регистр. На ряд электродов между истоком и стоком подается серия тактирующих импульсов. Это заставляет заряды в обедненной области двигаться к выходу. Попадающие на МОП фотоны порождают заряды ПЗС-матрицы (рис. 8.3.6). Порожденные заряды переносятся к выходному регистру одновременно либо одной строкой, либо массивом. Это называется соответственно *передачей строки* и *передачей кадра*.

Приборы с зарядовой инжекцией (ПЗИ). Камеры роботов типа ПЗИ также попадают в общую категорию приборов с передачей заряда (ППЗ). ПЗИ в общих чертах напоминают ПЗС,

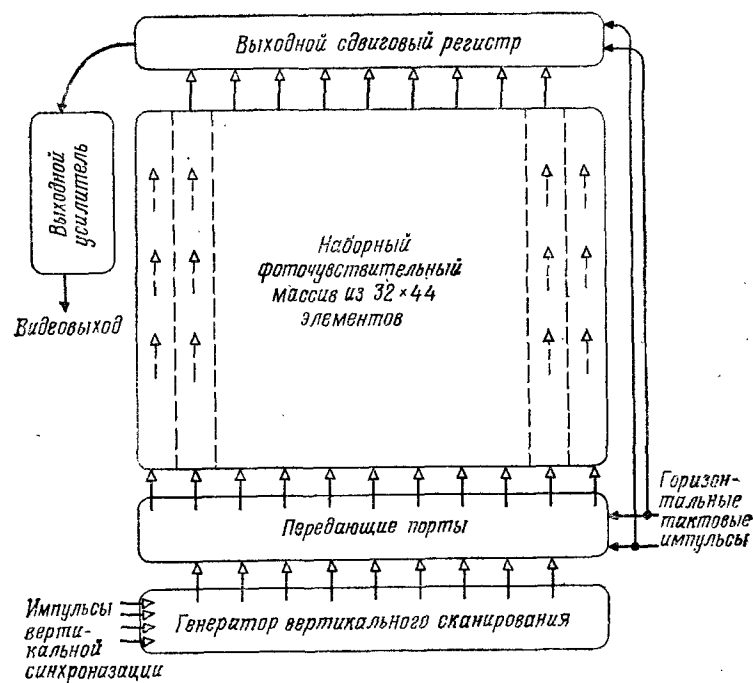


Рис. 8.3.6. Линейный передающий массив ПЗС.

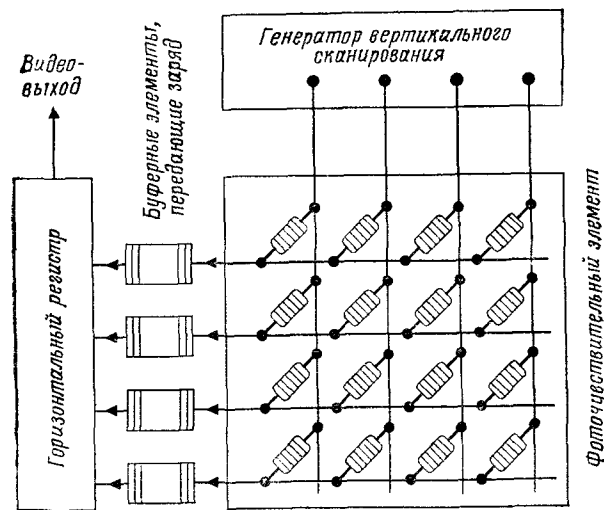


Рис. 8.3.7. Массив устройств с зарядовой инжекцией.

за тем исключением, что во время получения изображения заряд удерживается на том месте изображения, где он был образован. Заряды считываются с помощью метода, похожего на метод $(X - Y)$ -адресации, используемый в памяти ЭВМ. По существу хранимый заряд инжектируется в подложку, что приводит к току смещения, который затем воспринимается как видеосигнал (рис. 8.3.7).

ПЗИ обладают рядом преимуществ по сравнению с ПЗС, а именно у них меньше дефектов, проще механизация, меньшие потери при передаче зарядов и минимальная засветка.

8.3.2. ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Представление изображения в виде аналогового электрического сигнала обычно неизбежно при обработке изображения. Таким образом, на первом этапе нужно оцифровать видеoinформацию, которая обычно имеет форму аналогового напряже-

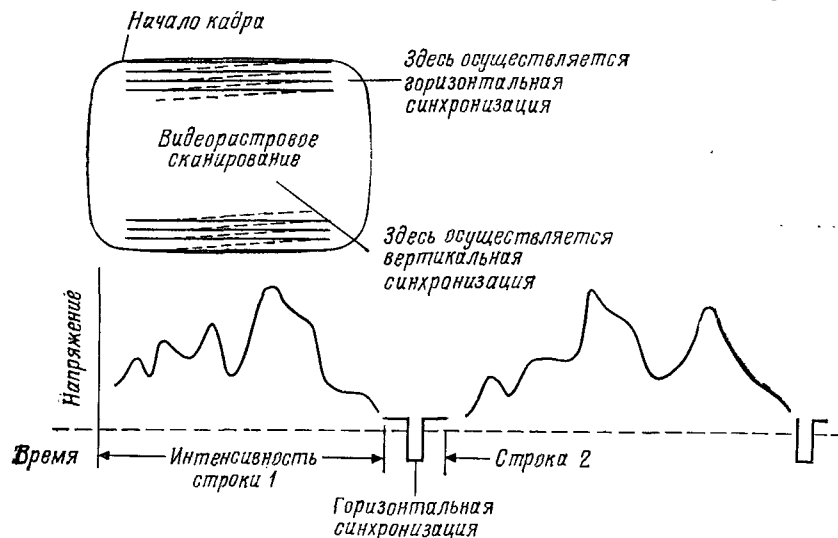


Рис. 8.3.8. Стандартный аналоговый видеосигнал. Каждая строка растрового сканирования пропорциональна яркости вдоль строки.

ния, как рассматривалось выше (рис. 8.3.8). Здесь функцией аналого-цифрового (А/Ц) преобразователя является преобразование входного напряжения, а именно видеосигнала, и получение двоичного выходного сигнала, который пригоден для считывания цифровой ЭВМ через подходящий интерфейс (рис. 8.3.9). Качество А/Ц-преобразователя оценивается через его времен-

ное разрешение или скорость, с которой он может осуществлять соответствующие преобразования, а также точность его цифрового выходного сигнала. В настоящее время эти А/Ц-преобразователи выпускаются с разрешением 8—16 разрядов.

Вполне возможно оцифровать растровое изображение (кадр), которое состоит почти из 525 строк, с помощью 300 тактов вдоль каждой строки за один кадровый интервал, т. е. за $1/30$ с. Такая быстрая оцифровка изображений возможна с помощью существующих коммерческих систем. Они осуществляют запись информации в буферную память и последующую обработку цифровых данных со скоростью видеосигнала.

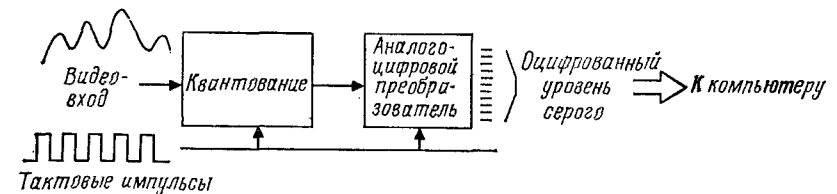


Рис. 8.3.9. Преобразование из аналогового видеосигнала в оцифрованный многоуровневый сигнал.

Оцифрованное изображение кадра хранится в памяти видео-процессора и последовательно обрабатывается. Компьютер может тогда определять типы объектов и их ориентацию и передавать эту информацию в ЭВМ робота. Существует две формы, в которых такая информация может обрабатываться: бинарное изображение и полутоновое изображение.

Оцифрованное изображение состоит из элементов изображения, или элементов картинка. Яркость каждого элемента представляется числом. В бинарных видеосистемах яркость представляется 0 для фона и 1 для силуэта объекта либо 0 для черного и 1 для белого. В полутоновой системе затемненность изображения может представляться множеством значений. Например, если используются 8-битовые контроллеры, то каждый элемент изображения может иметь значение уровня яркости от 0 (черный) до 255 (белый). Ясно, что системы с бинарной обработкой изображения дешевле, но они налагают ограничения на изучаемую сцену. Например, глубина объектов в общем случае не может быть измерена с использованием бинарной обработки изображения, тогда как градационная обработка позволяет производить обнаружение криволинейных поверхностей, глубины и наличие перекрывающихся частей. Однако градационные системы также требуют больше аппаратных и программных затрат и вычислительных мощностей.

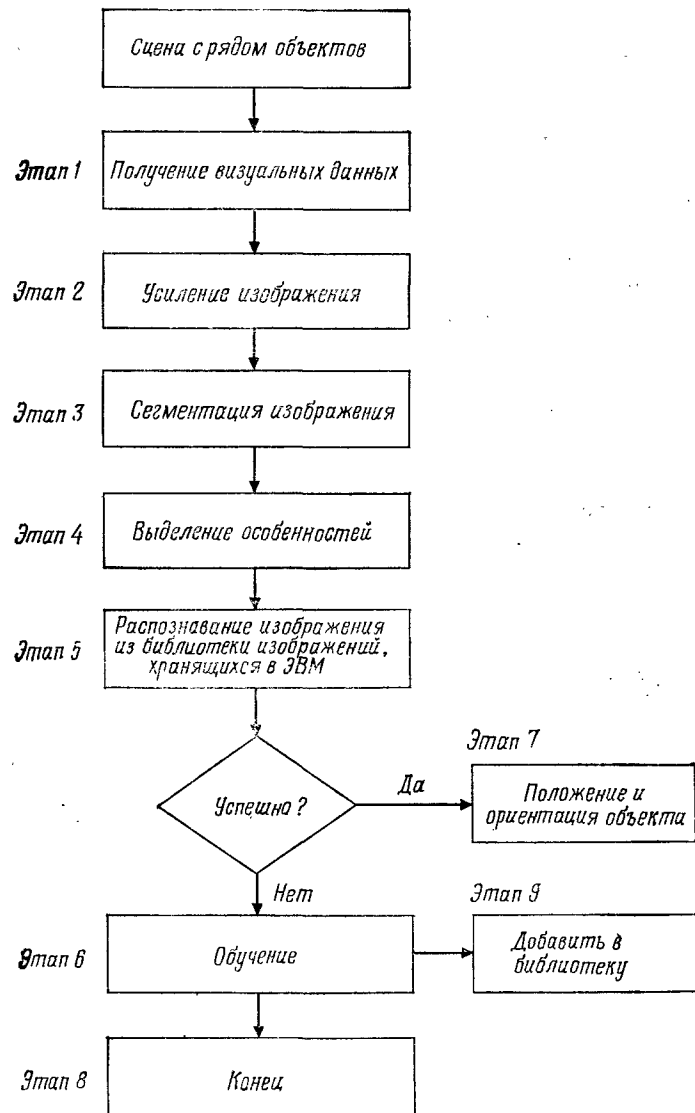


Рис. 8.3.10. Основные этапы визуальной инспекции.

Некоторыми важными областями применения являются обнаружение случайным образом расположенных деталей на движущихся конвейерных лентах, задача разбора навала, визуаль-

ный контроль собранных деталей, преследование движущихся объектов, которые робот должен захватить, и проблемы избегания столкновений.

Основные этапы визуальной обработки изображений с помощью ЭВМ приведены на рис. 8.3.10.

Далее мы подробно опишем отмеченные здесь основные этапы визуальной обработки данных.

8.3.3. ЗРИТЕЛЬНОЕ ВОСПРИЯТИЕ ДАННЫХ

Под зрительным восприятием данных подразумевается чтение либо горизонтальных строк развертки сверху донизу и от края до края либо выходного сигнала твердотельной ПЗС-матрицы. В любом случае необработанное изображение принимает форму двумерного массива уровней яркости, причем каждый элемент массива, соответствующий элементу изображения (элементу картинке), имеет вид, показанный на рис. 8.3.11.

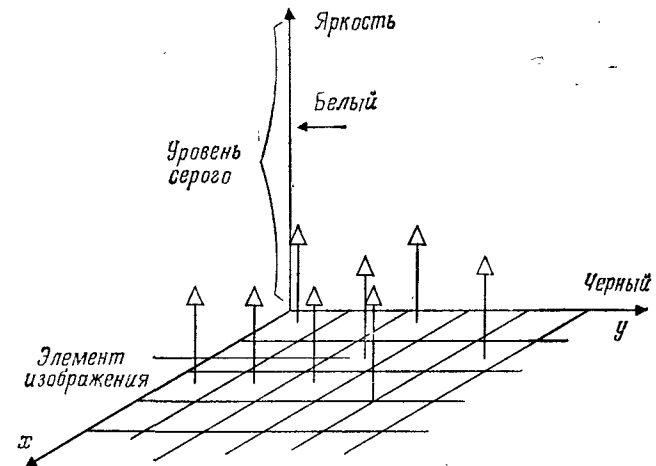


Рис. 8.3.11. Оцифровка изображения.

Здесь среднее значение интенсивности света каждого элемента изображения — это уровень серого, связанный с этим отдельным элементом. Очевидно, что размер элемента является мерой, разрешающей способности рассматриваемой ТВ-камеры.

Зрительное восприятие данных используется для решения двух задач: (1) измерение пространственных параметров объектов, которые нужно изучить визуально и (2) распознавание рассматриваемых объектов. Операции обработки сигнала основаны на усредняющем (интегральном) методе, применяемом

к видеосигналу. Однако для создания контраста и распознавания контуров изображения также необходимы дифференциальные операции.

Путем применения интегральной операции к данным может быть получено много полезной информации. Некоторыми важными характеристиками являются:

- 1) величина;
- 2) центр площади (тяжести);
- 3) наклон (ориентация);
- 4) округлость, тонкость и т. д.;
- 5) подобие (сходство).

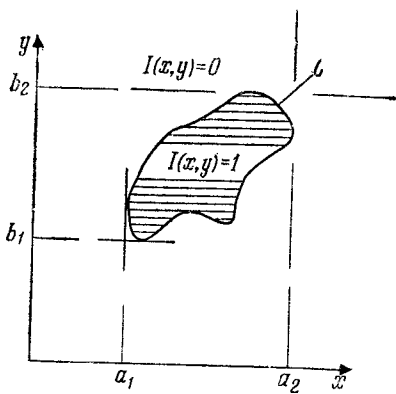


Рис. 8.3.12. Двоичная функция интенсивности $I(x, y)$.

Для описания этих характеристик рассмотрим рис. 8.3.12. Для случая обработки бинарных изображений введем функцию

$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{для всех } x, y \in C, \\ 0 & \text{для всех } x, y \notin C. \end{cases} \quad (8.3.1)$$

Это функциональное определение показывает, что фигура имеет везде одинаковую яркость и может быть легко отличима от фона. Если проинтегрировать функцию $I(x, y)$ по всему полю зрения, то получится величина A , которая представляет площадь яркой области плоского изображения

$$A = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} I(x, y) dx dy. \quad (8.3.2)$$

Чтобы получить центр площади (или центр тяжести) изображения, предлагаются два следующих интегральных представления.

Центр площади (x_A, y_A) . Он представляется как

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \text{sgn}(x - x_A) I(x, y) dx dy = 0 \quad (8.3.3)$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \text{sgn}(y - y_A) I(x, y) dx dy = 0. \quad (8.3.4)$$

Центр тяжести (x_g, y_g) . Он представляется как

$$x_g = A^{-1} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} x I(x, y) dx dy \quad (8.3.5)$$

$$y_g = A^{-1} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} y I(x, y) dx dy. \quad (8.3.6)$$

Для того чтобы определить ориентацию или наклон объекта, рассмотрим произвольное направление в теле, представленное

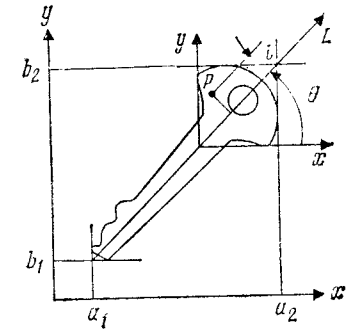


Рис. 8.3.13. Ориентация бинарного изображения.

линией L на рис. 8.3.13. Интегрируя квадрат расстояния l от точки $P(x, y)$, принадлежащей изображению, до прямой линии, которая проходит через центр тяжести бинарного изображения под углом θ к оси x , можно получить число M_2 относительно линии L , так что

$$M_2 = A^{-1} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{[(y - y_g) - (x - x_g) \text{tg} \theta]^2 I(x, y)}{1 + \text{tg}^2 \theta} dx dy. \quad (8.3.7)$$

Величина θ , которая обеспечивает минимум M_2 , определяется как наклон бинарного изображения относительно оси x .

Для получения информации относительно других характеристик бинарного изображения, таких, как округлость и тонкость,

можно использовать моменты более высокого порядка.

$$\bar{x}^2 = A^{-1} \int_{a_1, b_1}^{a_2, b_2} (x - x_g)^2 I(x, y) dx dy, \quad (8.3.8)$$

$$\bar{y}^2 = A^{-1} \int_{a_1, b_1}^{a_2, b_2} (y - y_g)^2 I(x, y) dx dy, \quad (8.3.9)$$

$$\bar{xy} = A^{-1} \int_{a_1, b_1}^{a_2, b_2} (x - x_g)(y - y_g) I(x, y) dx dy. \quad (8.3.10)$$

Это та дополнительная информация, которую можно ввести в память видеопроцессора.

Сходство между двумя бинарными изображениями достигается процедурой, называемой *подгонкой по шаблону*, которая рассматривается ниже. По существу различная информация, получаемая относительно бинарного изображения, сравнивается с такой же информацией относительно другого бинарного изображения, и видеопроцессор выдает различия.

Пример 8.3.1 ■

Требуется вывести уравнение (8.3.7) и графически определить величину θ , которая обеспечивает минимум M_2 .

Решение. Заметим, что

$$M_2 = A^{-1} \int_{a_1, b_1}^{a_2, b_2} l^2 I(x, y) dx dy. \quad (8.3.11)$$

Из рис. 8.3.14 видно, что

$$a^* = (y - y_g) - b^*, \quad (8.3.12)$$

$$b^* = (x - x_g) \operatorname{tg} \theta, \quad (8.3.13)$$

$$l = a^* \cos \theta = a^* \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \right)^{1/2}. \quad (8.3.14)$$

Таким образом,

$$l^2 = \frac{[(y - y_g) - (x - x_g) \operatorname{tg} \theta]^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}, \quad (8.3.15)$$

$$M_2 = A^{-1} \int_{a_1, b_1}^{a_2, b_2} \frac{[(y - y_g) - (x - x_g) \operatorname{tg} \theta]^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} I(x, y) dx dy. \quad (8.3.16)$$

На рис. 8.3.14 показано решение задачи нахождения минимума.

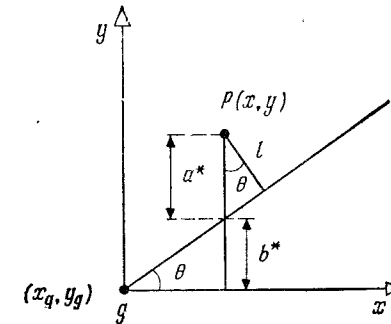


Рис. 8.3.14.

Основываясь на знании x , y и xy , можно определить следующие меры *округлости* и *тонкости*:

$$\text{Округлость } R: R = A^{-1} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2). \quad (8.3.17)$$

$$\text{Тонкость } S: S = \frac{[(\bar{y}^2 - \bar{x}^2)^2 + 4(\bar{xy})^2]^{1/2}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}. \quad (8.3.18)$$

8.3.4. УСИЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

На этой стадии обработки данных обрабатывается первичное бинарное, или полутоновое, изображение для получения вторичного изображения существенно улучшенного качества и разрешения за счет удаления явного шума или других побочных явлений. В основном видеопрепроцессор используется для улучшения отношения сигнал/шум изображения, что в свою очередь уменьшает количество информации, посылаемой ЭВМ, и улучшает качество анализируемой картинки. Одной из наиболее важных черт препроцессора является то, что он четко выделяет края изображения за счет усиления разности в световой интенсивности, которая наблюдается на краю изображения, и фона. Этот процесс иногда называется *выделением края*.

8.3.5. СЕГМЕНТАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Следующий важный шаг в обработке изображений заключается в том, чтобы локализовать области изображения, которые соответствуют конкретным геометрическим объектам. На рис. 8.3.15 общее число точек на единицу площади может рассматриваться как яркость сцены изображения. Этот процесс отделения объектов от фона называется *сегментацией изображения*. Ясно, что тщательно продуманное освещение в промыш-

ленной среде может существенно упростить процесс сегментации изображения и, следовательно, увеличить его надежность. Например, детали могут размещаться на полупрозрачных столах с рассеянной подсветкой для получения острых контрастов. В случае прямого освещения объект может располагаться таким образом, что получается минимум теней в изображении.

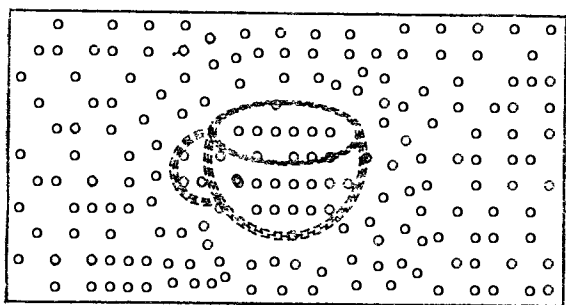


Рис. 8.3.15. Сегментация изображения.

Использование задней подсветки, которая резко контрастирует с передней подсветкой объектов, также улучшает контраст изображения. В процессе сегментации используется полутоновое изображение для получения бинарного изображения. Например, логический 0 может представлять объект, тогда как логи-

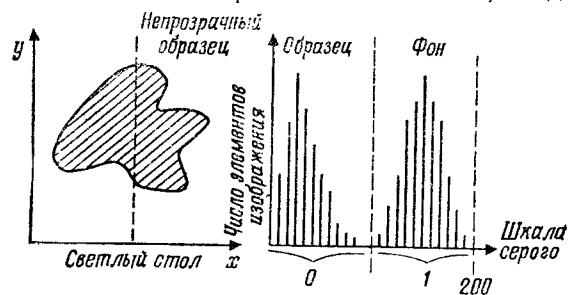


Рис. 8.3.16 Пороговая сегментация изображения.

ческая 1 может представлять фон. Наиболее широко используемый метод сегментации полутонового изображения — это метод *пороговой сегментации изображения*.

Вообще для выбора оптимальной величины порога, который отделяет объект от фона, используется гистограмма интенсивности. Например, с помощью светонепроницаемого диска, помещенного на светлый стол, можно получить гистограмму интенсивности, показанную на рис. 8.3.16, с использованием которой

порог может быть выбран способом, похожим на разделение учащихся по потокам исходя из успеваемости на основе гистограммы распределения оценок учащихся.

8.3.6. ВЫДЕЛЕНИЕ И РАСПОЗНАВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

После завершения процесса сегментации бинарного изображения образ, который оно представляет, должен быть классифицирован. Наиболее широко распространенным и прямым методом классификации образов является сравнение образа с хранимыми моделями известных образов для нахождения подходящего. Такие модели известны как *шаблоны*. Здесь мы определим шаблон как геометрический объект или образ, полученный или созданный путем «обучения» зрительной системы с использованием типичного представителя класса объектов. Рассмотрим объект в форме гаечного ключа и другую пару объектов, таких, как монета и штифт. Расположим эти три предмета в центре поля изображения. Теперь сегментированные изображения этих предметов можно занести в *предметную библиотеку* как представляющие шаблоны таких классов объектов. Когда неизвестный объект помещается в поле зрения, мы получаем его сегментированное изображение в виде функции $I(i, j)$, представляющей собой интенсивность элементов изображения в точках (i, j) . Затем k -й хранимый шаблон $T_k(i, j)$ извлекается из библиотеки и накладывается на изображение до тех пор, пока не будет получено наилучшее соответствие. Если $T_k(i - x, j - y)$ представляет собой шаблон $T_k(i, j)$, сдвинутый на (x, y) , то задача заключается в том, чтобы найти (x, y) , минимизирующие ошибку $E_k(x, y)$, где по определению имеем

$$E_k(x, y) = \sum_i \sum_j [I(i, j) - T_k(i - x, j - y)]^2, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (8.3.19)$$

Здесь суммирование по i и j осуществляется для перекрывающихся частей изображений $I(i, j)$ и $T_k(i, j)$. Минимальное значение $E_k(x, y)$ вычисляется для k от 1 до n , где n — число шаблонов в библиотеке. Например, предположим, что найдены \hat{x} , \hat{y} и l , такие, что

$$E_l(\hat{x}, \hat{y}) < E_k(x, y) \quad (8.3.20)$$

для всех k в библиотеке и для всех x и y в поле зрения. Если ошибка $E_l(\hat{x}, \hat{y})$ достаточно мала, т. е. $E_l(\hat{x}, \hat{y}) \approx 0$, то это отличное совпадение, и изображение $I(i, j)$ соответствует предмету. Кроме того, объект $I(i, j)$ сдвинут на (\hat{x}, \hat{y}) относительно шаблона k . Если оптимальная ошибка $E_l(\hat{x}, \hat{y})$ слишком велика,

то соответствия не будет обнаружено. Следовательно, при таких обстоятельствах предмет, породивший изображение $I(i, j)$, будет классифицироваться как неизвестный.

Лучшая мера, известная как *нормированная взаимно-корреляционная мера*, определяется как

$$m_k(x, y) = \frac{\sum_i \sum_l I(i, l) T_k(i-x, l-y)}{((\sum_i \sum_l I^2(i, l)) (\sum_i \sum_l T_k^2(i-x, l-y)))^{1/2}}. \quad (8.3.21)$$

Эта мера нечувствительна к абсолютной интенсивности и контрасту, и если она достигает максимального значения, равного 1, то это указывает на точное соответствие.

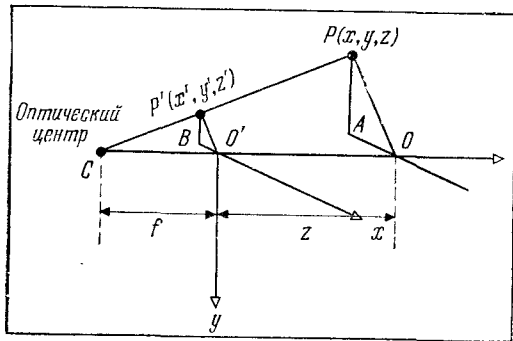


Рис. 8.3.17. Плоская сцена, полученная при помощи ТВ-камеры.

Иногда удобно представлять шаблоны набором подшаблонов с некоторыми специфическими пространственными соотношениями. Тогда становится легче сравнивать подшаблоны. Метод сравнения по шаблону в соответствии с формулой (8.3.19) инвариантен относительно сдвига предмета, пока предмет целиком находится в поле зрения. Однако мера (8.3.19) не является инвариантной относительно вращения, масштабирования или перспективных преобразований. Эти дополнительные преобразования можно было бы включить в процедуру сравнения по шаблону простым применением их либо к шаблону, либо к изображению в видеопроцессоре, поскольку мы имеем дело только с двумерными изображениями.

Типовая камера состоит из линз и плоскости, на которой формируется изображение. Как правило, процесс получения изображения таков, как на рис. 8.3.17, где показаны оптический центр C , плоскость изображения I и расстояние f , которое представляет собой фокусное расстояние изображающей системы.

Пример 8.3.2 ■

Требуется показать, что точки x' , y' и z' определяются следующим образом:

$$x' = \frac{fx}{f+z}, \quad y' = \frac{fy}{f+z}, \quad z' = 0. \quad (8.3.22)$$

Решение. Из подобия треугольников PAO и $P'BO'$ следует, что

$$\frac{P'B}{PA} = \frac{x'}{x} = \frac{P'O'}{PO} = \frac{BO'}{AO} = \frac{y'}{y}. \quad (8.3.23)$$

Из подобия треугольников $P'O'C'$ и POC следует, что

$$\frac{P'O'}{PO} = \frac{f}{f+z}, \quad (8.3.24)$$

и тогда из формул (8.3.23) и (8.3.24) можно легко вывести соотношения (8.3.22). ■ ■

Преобразования (8.3.22) называются *перспективными* и могут выполняться видеопроцессором. Однако они нелинейны и их нужно линеаризовать для алгебраических операций матричного типа. Как отмечалось в гл. 2, эти преобразования могут быть линеаризованы с помощью однородных координат и преобразований. Рассмотрим, например, следующее однородное преобразование:

$$\begin{bmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \\ \bar{w}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w_h \end{bmatrix}, \quad (8.3.25)$$

где однородные координаты определены как

$$x_h w_h^{-1} = x, \quad x'_n w_n^{-1} = x' \text{ и т. д.} \quad (8.3.26)$$

Очевидно, что соотношения между первичными и вторичными координатами принимают вид

$$x'_h = x_h, \quad y'_h = y_h, \quad z'_h = 0, \quad w'_h = f^{-1} z_h + w_h. \quad (8.3.27)$$

Деля (8.3.27) на w_h , получим

$$x' = w_h^{-1} x'_h = \frac{fx}{f+z}, \quad (8.3.28)$$

$$y' = y'_h w_h^{-1} = \frac{fy}{f+z}, \quad (8.3.29)$$

$$z' = 0. \quad (8.3.30)$$

Таким образом, мы получили идентичные перспективные преобразования. Приведенные выше преобразования не дают какой-либо информации о дальности объекта. Преобразование T_A вида

$$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (8.3.31)$$

приведет к такому z' , что

$$z' = \frac{fz}{f+z}. \quad (8.3.32)$$

Это может быть использовано для получения дополнительной информации об объекте, такой, как скрытые линии или тени.

Как отмечалось выше, для улучшения процесса распознавания образов могут быть использованы другие виды преобразований. Эти преобразования включают вращения R , перенос T и масштабирование S ; они были рассмотрены в гл. 2. Например, вращательное преобразование имеет вид

$$R = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & R & \\ & (3 \times 3) & \\ & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } R^T = R^{-1}. \quad (8.3.33)$$

Преобразование сдвига T имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.3.34)$$

и масштабирующее преобразование S имеет вид

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}. \quad (8.3.35)$$

8.3.7. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛИ С ОБЪЕКТОМ

Получив изображение объекта в библиотеке видеопроцессора, мы начинаем выбирать такую модель m , чтобы изображение, преобразованное с помощью T_m , имело минимальное от-

личие от наблюдаемого изображения объекта. Следовательно, нужно выбрать преобразование T_m для минимизации ошибки e'_m между множеством точек v_k изображения объекта и точек v'_k изображения модели из множества точек модели v_m . Они определяются как вершины, такне, что

$$V_p = \{v_{ip}, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (8.3.36)$$

$$V'_p = \{v'_{ip}, i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (8.3.37)$$

$$V_m = \{v_{im}, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (8.3.38)$$

где v'_k — вершины модели с n вершинами, подвергающимися преобразованию T_m . Вообще, хотелось бы минимизировать ошибку e_m

$$e_m = \sum_{i=1}^n |v_{ip} - v'_{ip}|. \quad (8.3.39)$$

Пусть теперь точка модели v_{im} представляется однородным вектором, т. е.

$$v_{im} \equiv [x_{im} \ y_{im} \ z_{im} \ w_{im}]^T. \quad (8.3.40)$$

Аналогично точка изображения объекта v_{ip} может представляться как

$$v_{ip} \equiv [X_{ip} \ Y_{ip} \ W_{ip}]^T. \quad (8.3.41)$$

Эти две системы координат различаются в том смысле, что точки модели находятся в эталонной трехмерной системе координат, тогда как точки изображения находятся в двумерной системе координат в плоскости изображения. Пусть теперь V_k , V'_k и V_m представляют матрицы, соответствующие точкам картинки, точкам изображения и точкам модели соответственно. Таким образом, V_k и V'_k — матрицы размера $3 \times n$, тогда как V_m — матрица размера $4 \times n$. Предположим, что существует преобразование H размера 3×4 , такое, что, будучи примененным к V_m , оно преобразует модель V_m в изображение V_k , которое далее будет корректироваться путем масштабирования каждой точки. Если $e_m = 0$, имеем

$$HV_m = V_p \lambda, \quad (8.3.42)$$

где λ — диагональная матрица размера $n \times n$ с n неизвестными, т. е. $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$.

Пример 8.3.3 ■

Требуется найти решение для H , если $\lambda = I$, где I — единичная матрица.

Решение. Из уравнения (8.3.42) видно, что

$$\mathbf{H} \mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T = \mathbf{V}_p \lambda \mathbf{V}_m^T. \quad (8.3.43)$$

Теперь матрица $\mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T$ является матрицей размера 4×4 и может быть легко преобразована так, что

$$\mathbf{H} (\mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T) (\mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T)^{-1} = \mathbf{V}_p \lambda \mathbf{V}_m^T (\mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T)^{-1} \quad \text{или} \quad (8.3.44)$$

$$\mathbf{H} \mathbf{I} = \mathbf{H} = \mathbf{V}_p \mathbf{V}_m^T (\mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^T)^{-1}. \quad \blacksquare \blacksquare \quad (8.3.45)$$

8.3.8. ОЦЕНКА ПОВОРОТА ИЗОБРАЖЕНИЯ

Определение угла поворота изображения объекта является одной из фундаментальных робототехнических задач. Это особенно важно, когда роботы выполняют задачу сбора деталей, расположенных случайным образом, при помощи схвата, например схвата с параллельными губками, который должен иметь правильную ориентацию относительно детали. Здесь мы определим ряд интегральных мер, а именно моментов, для оценки угла поворота изображения.

Предположим, что функция интенсивности сцены $I(x, y)$ задана для бинарного или полутонового изображения следующим образом:

$$I_b(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } I(x, y) \geq T_b, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (8.3.46)$$

или

$$I_g(x, y) = \begin{cases} I(x, y) & \text{при } I(x, y) \geq T_g, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (8.3.48)$$

где T_b и T_g — пороги (подавляющие или отделяющие фон).

Смешанные (декартовы) моменты изображения M_{mn} определяются так, что

$$M_{mn} = \iint x^m y^n I(x + x_g, y + y_g) dx dy, \quad (8.3.50)$$

где (x_g, y_g) — координаты центра площади изображения. Полярные моменты изображения определяются как

$$S_{mn} = \iint r^{n+1} (\cos m\theta) I(r \cos m\theta + y_c r \sin m\theta + y_0) dr d\theta, \quad (8.3.51)$$

$$R(i, j) = \mathbf{V} \mathbf{I}(i, j) \mathbf{F}. \quad (8.3.52)$$

Вектор полярного момента \mathbf{P}_{mn} определяется как

$$\mathbf{P}_{mn} = \begin{bmatrix} C_{mn} \\ S_{mn} \end{bmatrix} \quad (8.3.53)$$

и сохраняет длину: если изображение поворачивается на угол θ^* , то \mathbf{P}_{mn} поворачивается на $m\theta^*$.

8.3.9. КАЛИБРОВКА ТЕЛЕВИЗИОННОЙ КАМЕРЫ

Преобразования, которые связывают координаты объекта в абсолютной системе координат с координатами изображения, известны как *преобразования камеры*. Чаще всего камера жестко установлена в системе координат, и поэтому полезно измерить или откалибровать параметры, которые влияют на преобразование камеры. Процедура заключается в том, чтобы рассмотреть определенный трехмерный объект в данной позиции и ориентации и измерить точки в изображении, соответствующие заданным точкам объекта. Затем можно найти необходимое преобразование, основанное на уравнениях, приведенных в разд. 8.3.6.

Калибровка камеры дает величины параметров модели, которые нужны для вычисления линии визирования в пространстве, соответствующей точке в плоскости изображения. При заданных трехмерных координатах точки в поле зрения преобразования камеры позволяют вычислить координаты изображения. В обратном преобразовании камеры через координаты изображения определяется линия визирования в пространстве. В робототехнике используется именно обратное преобразование, когда нужно рассчитать расположение объекта на основе изображения, чтобы сделать возможным операцию захвата объекта.

Для визуального стереоанализа используются две камеры, и становится важной калибровка двух камер, выдвигающая дополнительные проблемы. В соответствующей литературе (см. список литературы в конце главы) описываются два метода калибровки камер, которые главным образом основываются на модели вал — отверстие и модели, включающей несколько плоскостей.

8.3.10. ВЫДЕЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Выделение изображения является важной частью зрения роботов. Например, выделение линий, которые соответствуют краям объекта, особо важно по очевидным соображениям. Обычно выделение основывается на предположении, что интен-

сивность света постоянна либо плавно меняется на грани объекта и может терпеть разрыв только на линии пересечения граней.

В плоскости непрерывного изображения градиент функции интенсивности в общем случае конечен и задается функцией градиента Робертса $R(i, j)$, такой, что

$$R(i, j) = \nabla I(i, j)_F \quad (8.3.54)$$

или

$$R(i, j) = \{ [I(i+1, j+1) - I(i, j)]^2 + [I(i, j+1) - I(i+1, j)]^2 \}^{1/2} \quad (8.3.55)$$

где $I(i, j)$ — интенсивность изображения в точке элемента (i, j) . Направление градиента определяется через α , также, что

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \arctg \left(\frac{I(i, j+1) - I(i+1, j)}{I(i+1, j+1) - I(i, j)} \right). \quad (8.3.56)$$

Считается, что край оказывается в точке (i, j) , если оператор Робертса $R(i, j) > r^*$, где r^* — выбранный порог. Этот метод позволяет выделить все неоднородности на поверхности либо узнать текстуру граней изображения.

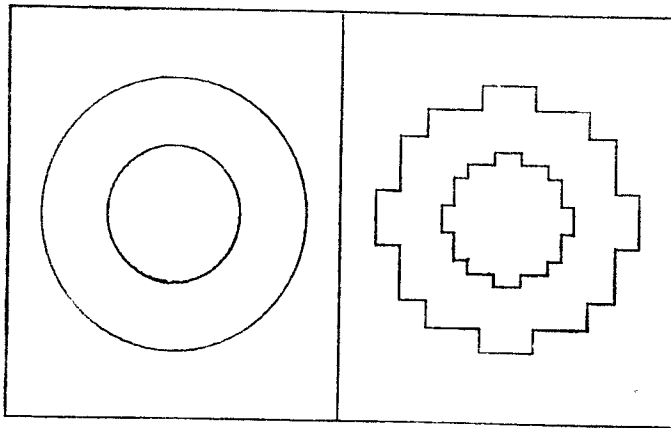


Рис. 8.3.18. Предмет и его оцифрованное бинарное изображение.

Для выделения контура и записи всей информации, полученной для внешних и внутренних контуров, можно использовать рекурсивные алгоритмы. Иногда перед выделением изображения необходимо ликвидировать погрешности, которые возникают из-за оцифровки изображений. Рассмотрим, например, кольцо и его оцифрованное бинарное изображение на рис. 8.3.18. Можно выбрать ряд параметров для их сравнения и выделения

правильной формы объекта на основе его оцифрованного изображения, а именно такие, как:

- 1) полная площадь,
- 2) моменты,
- 3) максимальный и минимальный радиусы,
- 4) расположение центра фигуры,
- 5) периметр,
- 6) число отверстий

или любая другая измеряемая характеристика.

8.3.11. НЕКОТОРЫЕ ТИПОВЫЕ СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКОГО ЗРЕНИЯ

В этом разделе кратко описываются три случайным образом выбранные коммерчески доступные зрительные системы: система технического зрения роботов SRI, GE optimization II и Unimation Univision II.

Система SRI (Stanford Research Institute). Эта система была разработана как часть программы промышленной автоматизации SRI. Видеомодуль SRI разработан как исследовательский инструмент зрения машин и роботов, чтобы идентифицировать, устанавливать и ориентировать детали машин для сборочных процессов и бесконтактной инспекции и контроля качества. Он также используется для видеоуправляемых операций со стационарными или движущимися объектами. В действительности все три представленные здесь зрительные системы способны в той или иной мере выполнять указанные функции.

Видеомодуль SRI Mark II состоит из трех компонент.

1. Модифицированная твердотельная камера GE TN2200 из 128×128 элементов, с 10-метровым кабелем.

2. Препроцессор в качестве интерфейса между камерой и микрокомпьютером, выполняющий аппаратно функции общего назначения.

3. Микрокомпьютер DEC LSI-11/2 с оперативной памятью в 30К слов, в которой хранится библиотека основных машинных видеопрограмм SRI и некоторые полезные прикладные программы обучения для определения идентичности, положения и ориентации детали.

Описанная выше система может сопрягаться с периферийными устройствами. Эти периферийные устройства включают осциллограф Tektronix 475, способный показывать грационные или бинарные изображения детали, воспринимаемой ТВ-камерой, графический терминал Tektronix 4012 для связи с ЭВМ LSI-11/2 и для отображения машинного образа детали, а также внешний микрокомпьютер.

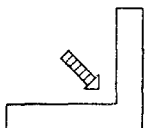

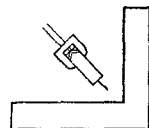
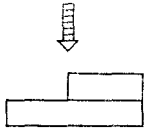
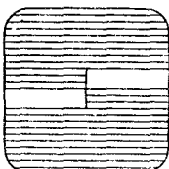
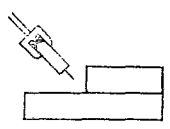
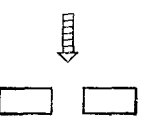
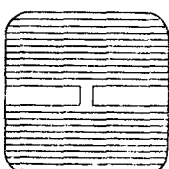

Тип шва	Направление измерения	Проектируемое изображение	Положение сварочного инструмента
Со скруглением			
Внахлест			
Встык			

Рис. 8.3.19. Способ отслеживания шва.

Система технического зрения GE Optimation II. Эта система оснащена камерой TN2500 ПЗИ с высоким разрешением (244 × 248 элементов), а также процессором PN23304 принятия решений. Она может выполнять бесконтактный контроль качества с производительностью до 900 деталей в минуту, а ее программное обеспечение способно осуществлять анализ сложных изображений с использованием геометрических измерений. Многопроцессорная система оснащена микропроцессорами 8086, 2901 и 8748. Она может работать с четырьмя камерами и использует VPL (язык видеопрограммирования), который похож на Бейсик.

Система технического зрения Unimation Univision II. Эта система сначала использовалась как система отслеживания шва при автоматической дуговой сварке. Однако она также обладает дополнительными возможностями бесконтактного оптиче-

ского восприятия и обработки изображений в реальном времени Система Univision II состоит из видеопроцессора на основе микропроцессора, ручного механизма для сварочной горелки, оптоволоконной чувствительной головки, твердотельной ТВ-камеры, а также программного и аппаратного интерфейса для роботов PUMA. Система может регулировать траекторию, отслеживая отклонения шва с точностью до 10 мм в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Принцип действия показан на рис. 8.3.19.

8.4. РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ ДАТЧИКИ ДЛЯ СБОРКИ

Сборка является чрезвычайно сложной задачей для человека, что часто считается само собой разумеющимся. Когда начинают думать над тем, как манипуляционным роботам выполнять различные сборочные операции, то начинают осознавать всю сложность этого процесса. Более того, сразу приходят к выводу, что только интеллектуальные роботы могут выполнять сборочные процессы. Большинство сборочных процессов требует высокой точности, потому что они включают состыковку деталей со сложной геометрией. Наличие допусков у деталей существенно усложняет процесс. Высокоточные роботы с большой разрешающей способностью обычно очень дорогие и пригодны только для ограниченного круга приложений. Следовательно, сборочные роботы должны снабжаться подходящими датчиками для интеллектуальных операций. Вообще датчики для сборки подразделяются на две категории: *пассивные сборочные датчики* и *активные сборочные датчики*.

Пассивными сборочными датчиками являются устройства типа удаленного центра податливости (УЦП), а активными сборочными датчиками — устройства типа шестикомпонентного обобщенного силового датчика, измеряющего контактные силы и моменты, которые вводятся обратно в контроллер робота для выполнения корректирующих команд. Оба устройства компенсируют неточности расположения (позиции и ориентации) схвата (руки робота). Однако пассивные устройства не вносят каких-либо изменений в положение руки, а только инструмента, тогда как в активных устройствах применяется поисковая стратегия, с помощью которой меняется положение руки робота.

Сборочный процесс можно рассматривать как задачу позиционирования, и тогда можно схематично показать информационный поток в сборочной системе общего вида. Обратившись к рис. 8.4.1, можно увидеть, что входным сигналом для манипуляционного робота является относительное положение деталей.

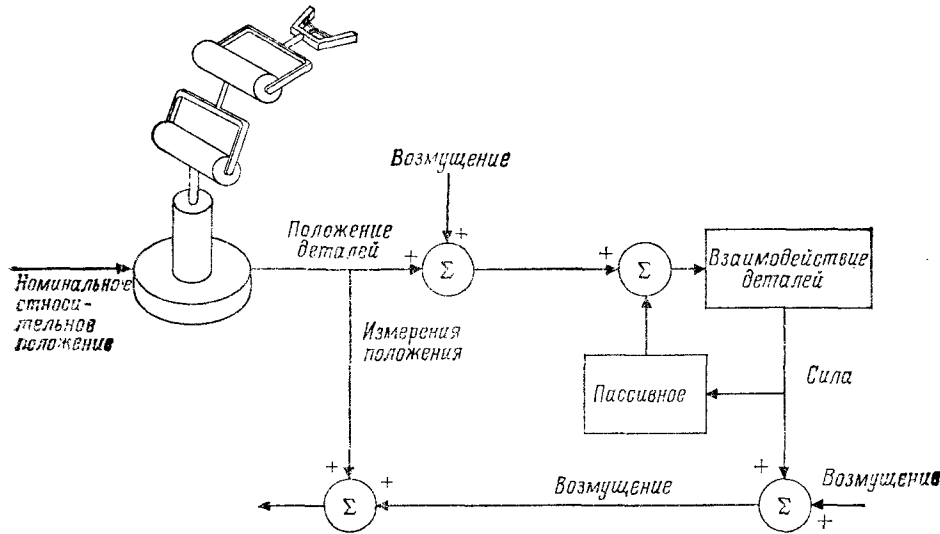


Рис. 8.4.1. Информационный поток при сборке.

Возмущения номинальной позиции, связанные с ошибками, которые вызваны резкими движениями, захватом деталей, механическими неточностями робота, ограниченной разрешающей способностью, а также другими возмущениями типа наличия допусков у деталей еще больше изменяют номинальное положение. Силы и моменты, возникающие из-за взаимодействия деталей, также изменяют это номинальное положение за счет физической податливости робота и частей системы. В гл. 6 и 7 были рассмотрены различные варианты возмущений и условия заклинивания, относящиеся к сборочным процессам вал — отверстие. Сборочные процессы типа вал — отверстие и установки винта составляют около 35 % всех сборочных задач. Кроме того, в сборочных процессах почти 70 % деталей подаются в определенном направлении, что дает возможность использовать при сборке устройства с числом степеней свободы, меньшим шести, такие, как трехкомпонентный датчик сил или устройства УЦП.

8.4.1. УСТРОЙСТВО УЦП КАК ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ЗВЕНО ПРИ СБОРКЕ

Устройство УЦП используется в процессах установки вала или винта в отверстие с фаской, которое может иметь резьбу. Хорошим примером такого процесса является установка передней платы часового механизма со всеми приводными валиками

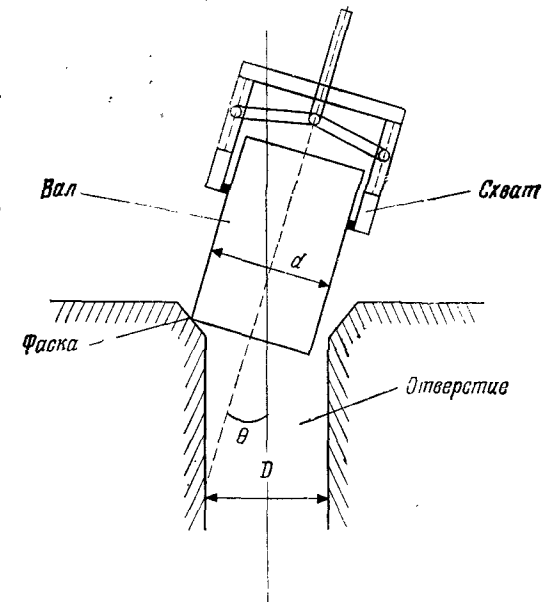


Рис. 8.4.2. Установка вала в отверстие.

и осями в соответствующие отверстия; это требует некоторого мастерства механического манипулирования для достижения правильной ориентации и установки детали. Другим примером является установка тонкого винта в отверстие с резьбой, что требует определенной степени усложнения зрения и высокой силовой чувствительности. Установка простого вала в отверстие является, по-видимому, простейшим сборочным процессом; установка винта в нарезанное отверстие требует гораздо большей точности выравнивания для правильного зацепления резьбы. Следовательно, робот должен обеспечить вертикальное положение вала при условии, что отверстие тоже вертикальное. Рука человека способна вставить винт в нарезанное отверстие почти под любым отклонением от вертикали. Конечно, это обеспечивается благодаря нашему зрению и осязанию, которые позволяют гарантировать выравнивание и правильную ориентацию. Таким образом, в типичном сборочном процессе вал должен опускаться вдоль оси и иметь возможность касаться краев (фаски) отверстия, как показано на рис. 8.4.2. Фаска на верхней части отверстия или на конце вала должна быть несколько больше, чем максимальная ошибка установки, с тем чтобы конец вала мог достичь фаски и соскользнуть прямо в отверстие.

Чтобы продолжить процесс установки, вал нужно слегка поворачивать во все стороны и двигать вбок во всех возможных направлениях. Эта операция может выполняться автоматически пассивным способом с помощью устройства УЦП, первоначально разработанного в М. I. T. Charles Draper Laboratory Нэвином и Уитни в 1977 г. Базовая структура устройства УЦП показана на рис. 8.4.3.

Обычно устройство УЦП установлено на конце последнего звена манипулятора и действует как схват, удерживая вставляемый вал. Как видно из рис. 8.4.3, оно состоит из двух наборов звеньев — одно для легких поворотов, а другое для небольших перемещений вала (без нежелательного вращения). Следовательно, устройство УЦП облегчает контактную сборку и улучшает сопряжение деталей и инструмента. Функцией устройства УЦП главным образом является обеспечение необходимой податливости для того, чтобы избежать заклинивания, зажима, вмятин, задиров, выбоин и общего повреждения поверхности во время прикладывания необходимой силы для сборки или механической обработки.

Теперь опишем принцип действия устройства УЦП с помощью рисунков, показывающих, как происходит сборка или установка с использованием устройства УЦП. В основном сила на ведущем конце вала обусловлена несоответствием осей отверстия и вала, вызванным наличием фаски. Эта сила имеет две составляющие — горизонтальную и вертикальную (рис. 8.4.4, а). Горизонтальная составляющая вынуждает вал двигаться вбок и обеспечивает установку, если ось отверстия параллельна оси вала (рис. 8.4.4, б). Если это не так (рис. 8.4.4, в), то возникает крутящий момент, который заставляет звенья устройства УЦП вращаться, обеспечивая таким образом пассивное выравнивание вала и последующую установку (рис. 8.4.4, г). На основе комбинации этих двух эффектов разработано функциональное устройство (рис. 8.4.3). Таким образом, устройство УЦП обладает двумя свойствами: (1) управляемое положение центра упругости (или удаленного центра податливости) и (2) управляемая упругость, или жесткость.

Управляемая упругость реализуется с помощью пластинчатых эластичных подкладок и металлических клиньев. Эти детали гораздо тверже на сжатие, чем на боковой сдвиг, и обеспечивают управляемое положение центра упругости и собственно упругость. Меняя число пластинок, эластичный материал и геометрию, можно перекрыть большой диапазон упругости для сборочных операций, включающих процессы установки и закрепления. На рис. 8.4.5 показана схема устройства УЦП, называемого согласователем, который можно приобрести в ASTEK

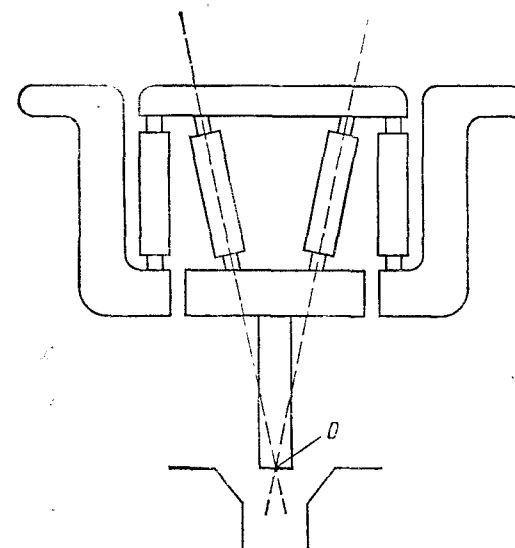


Рис. 8.4.3. Базовая структура УЦП-захвата.

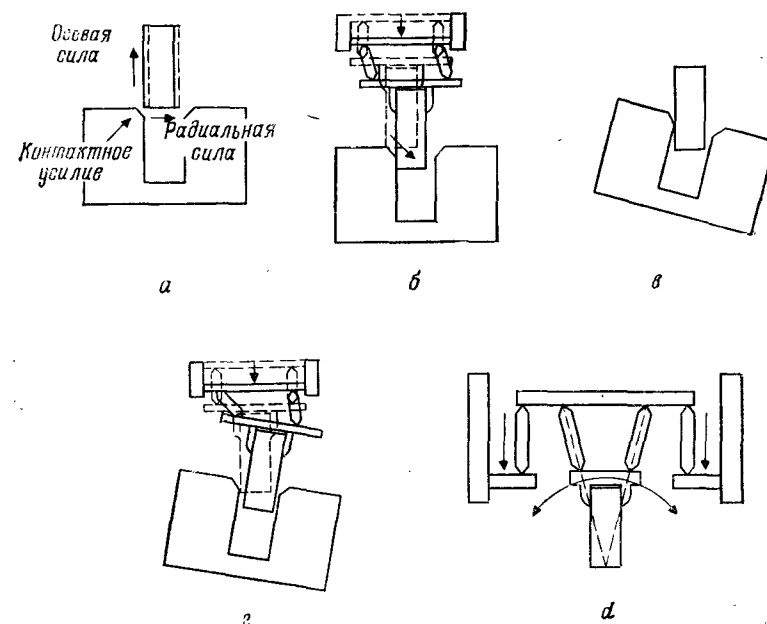


Рис. 8.4.4. Операционные этапы установки для УЦП.

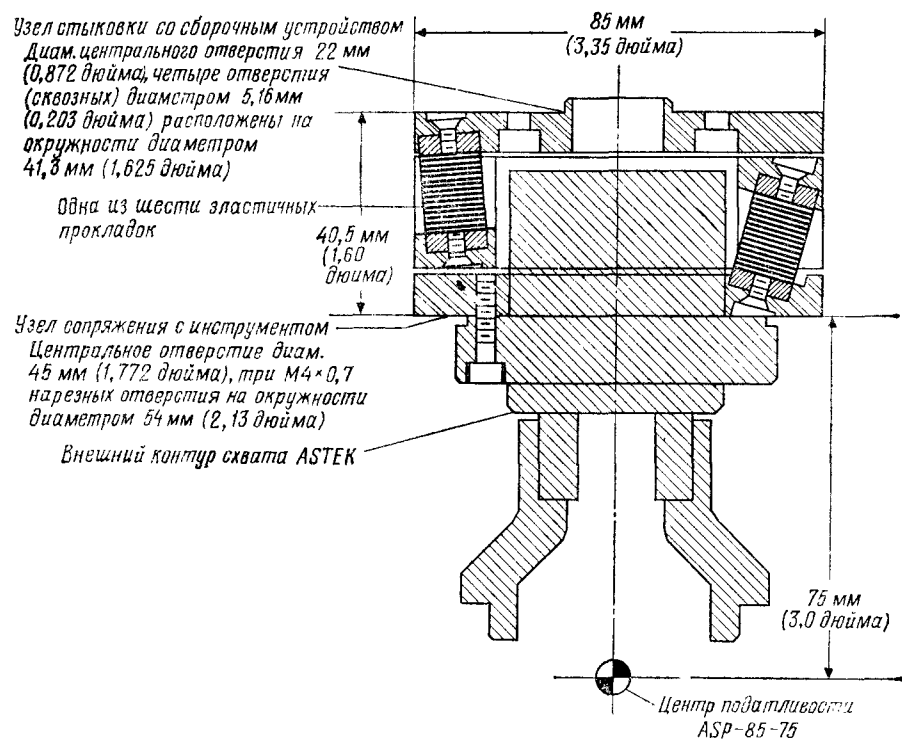


Рис. 8.4.5. Изображение УЦП на ASTEK Engineering.

Engineering, Inc. (недавно влившуюся в Barry Wright Corporation).

Устройства УЦП имеют ряд недостатков: набор операций ограничен, сборка горизонтальных валов затруднена, не могут эффективно функционировать при отсутствии фасок, не позволяют осуществлять высокоскоростные операции из-за динамических эффектов.

Чтобы преодолеть эти трудности, можно прибегнуть к датчикам сил и моментов, которые проводят сборочные процессы даже при отсутствии устройств УЦП. Это рассматривается в следующем разделе.

8.4.2. ДАТЧИКИ СИЛ И МОМЕНТОВ РОБОТОВ

Как указывалось в гл. 7, обобщенная сила, действующая на хват робота, представляется шестимерным вектором, состоящим из трех компонент вектора силы и трех компонент

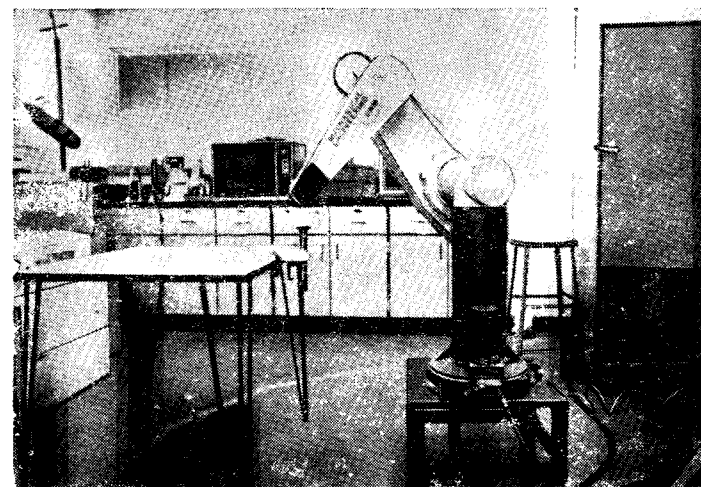


Рис. 8.4.6. Шестикомпонентный датчик силы (ASTEK) на руке PUMA 560 в исследовательской лаборатории роботов Университета шт. Нью-Мексико.

вектора момента, приложенных к началу системы координат схвата. Для измерения этих шести компонент сил и моментов между сочленением последнего звена робота и хватом робота, или рукой, устанавливаются подходящие преобразователи. Эти преобразователи называют *запястными датчиками силы*, потому что они измеряют компоненты силы и момента, воспринимаемая отклонения упругих частей, связанных с этими датчиками.

Алгоритм обратной связи по силе обычно позволяет воспринимать не только усилия, которые необходимо развить, и команды на перемещение, но и измеряемые силы и текущее положение, а также выдавать команды движения. Силовые датчики, которые используются для измерения сил и моментов, сделаны на базе пьезоэлектрических преобразователей или измерителей деформации, которые прикрепляются к чувствительным элементам упругих конструкций. Датчики для измерения сил и моментов на руке робота можно установить в трех местах:

- 1) в сочленениях, с тем чтобы измерять силы и моменты, развиваемые приводами сочленений;
- 2) между последним сочленением и кистью робота;
- 3) на кончиках пальцев руки робота для обеспечения ловкости пальцев и артикуляции руки.

На рис. 8.4.6 показан шестикомпонентный силовой датчик робота PUMA 560 в Лаборатории исследования роботов отделения инженеров-механиков Университета шт. Нью-Мексико.

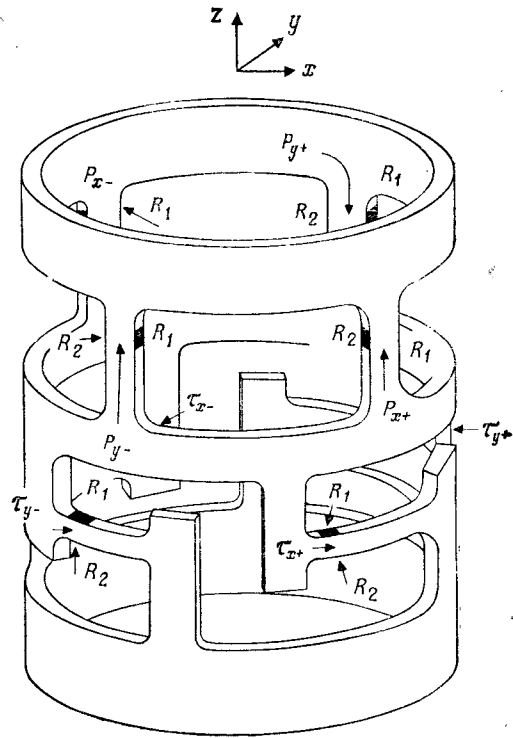


Рис. 8.4.7. Шестикомпонентный датчик силы (на базе сконструированного в SRI.)

Первый запястный силовой датчик был разработан в SRI и состоял из датчиков деформации, прикрепленных к эластичным балкам, как показано на рис. 8.4.7.

Датчики деформации должны иметь большое отношение сигнал/шум и малый гистерезис, чтобы быть достаточно точными для измерения силы. Структура датчика такова, что он может измерять силы и моменты независимо. Глядя на структуру шестикомпонентного силового датчика SRI, мы видим, что там есть восемь балок — четыре из них параллельны оси подхода z , а четыре расположены в плоскости, перпендикулярной z . Ясно, что, когда обобщенная сила $F = [f_x f_y f_z T_x T_y T_z]^T$ прикладывается к центру податливости запястья робота, напряжения, возникающие на выходе датчиков деформации, а именно v_{x-} , v_{x+} , v_{y-} , v_{y+} , q_{x-} , q_{x+} , q_{y-} , q_{y+} , связаны с компонентами F с помощью

следующих соотношений:

$$f_x = a_x (v_{y+} + v_{y-}), \quad (8.4.1)$$

$$f_y = a_y (v_{x+} + v_{x-}), \quad (8.4.2)$$

$$f_z = a_z (q_{x+} + q_{x-} + q_{y+} + q_{y-}), \quad (8.4.3)$$

$$\tau_x = b_x (q_{y+} - q_{y-}), \quad (8.4.4)$$

$$\tau_y = b_y (q_{x-} - q_{x+}), \quad (8.4.5)$$

$$\tau_z = b_z (v_{x+} - v_{x-} - v_{y+} + v_{y-}). \quad (8.4.6)$$

Следует заметить, что аналогичные типы шестикомпонентных датчиков силы разработаны в Charles Draper Laboratory и других исследовательских робототехнических лабораториях. Последнее время применяются трехкомпонентные датчики, которые имеют преимущество по сравнению с шестикомпонентными силовыми датчиками в силу своей простоты.

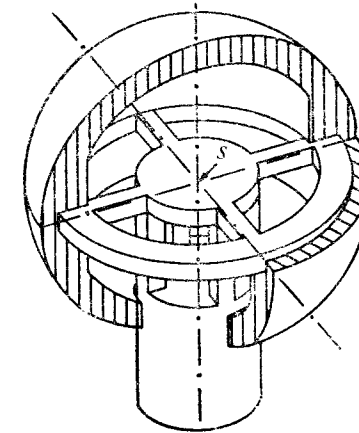


Рис. 8.4.8. Измерительный шар, разработанный в DFVLR (ФРГ).

Робот можно научить воспринимать силы и моменты с помощью так называемого чувствительного шара, разработанного в ФРГ фирмой DFVLR. Такой шар изображен на рис. 8.4.8.

8.5. ДРУГИЕ ВИДЫ ДАТЧИКОВ ДЛЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ РОБОТОВ

В этом разделе мы рассмотрим другие типы датчиков интеллектуальных роботов, которые в настоящее время используются при исследованиях роботов и проведении операций

автоматического/гибкого производства. Эти датчики в общем случае подразделяются на три самостоятельные категории:

1. Локационные датчики.
2. Дальномеры.
3. Тактильные датчики.

Каждый из этих видов мы рассмотрим отдельно.

8.5.1. ЛОКАЦИОННЫЕ ДАТЧИКИ

Локационные датчики достаточно широко используются для роботов в качестве устройств, которые улавливают момент, когда схват, рука робота или любая другая часть робота оказывается вблизи других предметов в рабочей зоне. Расстояния могут варьироваться примерно от нескольких сантиметров до нескольких миллиметров. Для измерения больших расстояний можно воспользоваться дальномерами, которые рассматриваются ниже. Большинство локационных датчиков показывают только наличие или отсутствие предмета в пределах их рабочей зоны (области измерения). Не многие локационные датчики могут давать информацию, относящуюся к расстоянию между датчиком и воспринимаемым предметом. Ниже дается краткое описание этих датчиков.

1. Оптические локационные датчики измеряют количество отраженного от предмета света. Широко распространены датчики с лампами накаливания в качестве источника. Вполне надежными являются светодиоды, поскольку они, будучи твердотельными устройствами, практически нечувствительны к ударам и вибрации. В качестве локационных датчиков используются также лазерные диоды; однако они дорогие по сравнению со светодиодами.

2. Датчики на основе магнитного поля в основном обнаруживают наличие предмета, который может изменить магнитный поток и создать такие эффекты, как эффект Холла и магниторезистивные эффекты.

3. Индукционные локационные датчики создают переменное магнитное поле на конце схвата робота или щупа. Это переменное поле порождает вихревой ток в любом токопроводящем теле, попадающем в поле. Такие локационные датчики особенно полезны для очень малых расстояний в диапазоне 1 мм.

4. Локационные датчики, основанные на электростатическом эффекте, могут быть построены точно так же, как и локационные датчики, основанные на электромагнитном эффекте. Трудность работы с электростатическими датчиками состоит в том, что они чрезмерно чувствительны к побочным полям, излучаемым

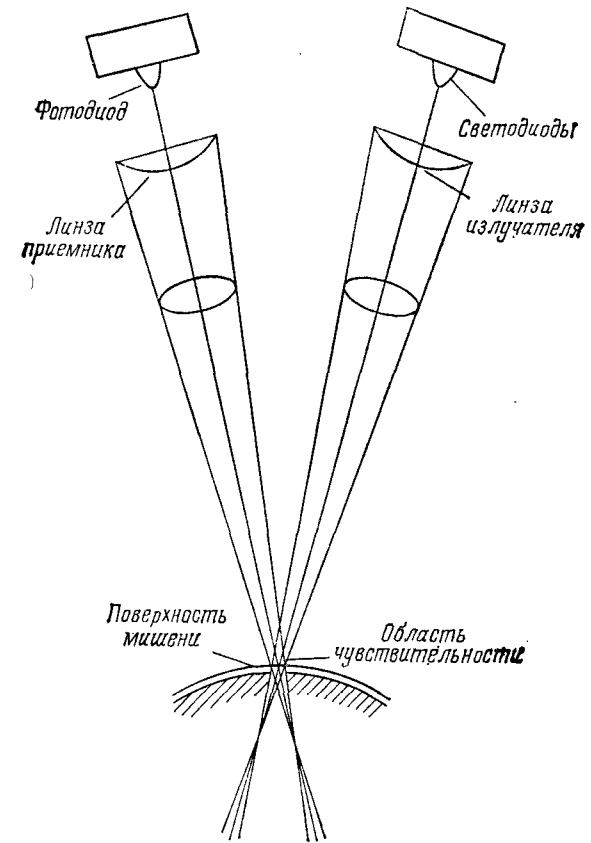


Рис. 8.5.1. Принцип действия типичного локационного датчика.

мым электронным оборудованием, и к полям статических зарядов, создаваемых трением или распылением.

5. Локационные датчики контактного и переключательного типа фактически являются детекторами очень малых расстояний и касания. Эти устройства обычно реагируют на контакт с большим проводящим телом, таким, как человек. Однако если заземлить проводящее тело, то эти устройства могут реагировать на предметы на расстоянии за счет собственной емкости.

6. Акустические локационные датчики недавно успешно использовались в робототехнических приложениях. В сущности присутствие предмета изменяет звуковое давление, принимаемое в таких устройствах микрофоном.

Принцип действия типичного локационного датчика показан на рис. 8.5.1. Кроме того, существуют локационные датчики, основанные на механических и химических свойствах газовой среды, но мы не будем их здесь рассматривать.

8.5.2. ДАЛЬНОМЕРЫ

Дальномер — это устройство, которое может обеспечить точное измерение расстояния между самим датчиком и предметом. Они обычно требуют существования единственной линии визирования, чтобы смотреть вдоль оптической оси линз камеры или слышать вдоль звуковой оси ультразвукового устройства, такого, как сонар. Особенностью акустических измерителей дальности является то, что их пространственное разрешение в целом уступает оптическим датчикам. Обычно трудно получить узкий пучок звука.

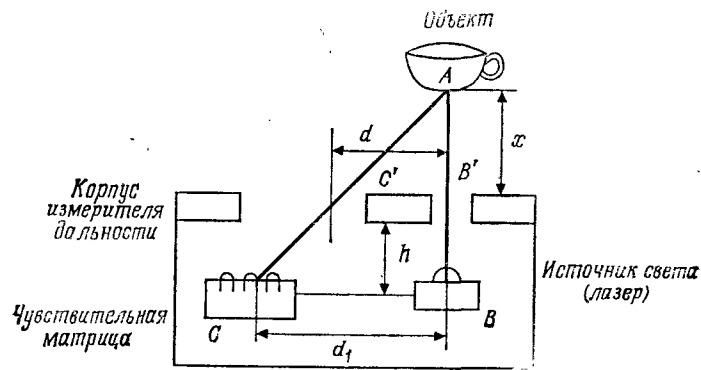


Рис. 8.5.2. Использование триангуляционного метода в измерителях дальности.

В основном дальномеры измеряют время прохождения лазерного или акустического луча от источника до объекта и обратно, с тем чтобы определить расстояние от источника луча до объекта. Таким образом, они работают по принципу триангуляции (рис. 8.5.2).

Из рис. 8.5.2 видно, что d_i — это удаление i -го светового детектора, а x — расстояние от датчика до предмета. Можно показать, что

$$x = \frac{dh}{d_i - d}. \quad (8.5.1)$$

Пример 8.5.1 ■

Требуется показать, что расстояние между предметом и дальномером на рис. 8.5.2 дается уравнением (8.5.1).

Решение. Обратившись к рис. 8.5.2, рассмотрим два подобных треугольника ABC и $AB'C'$. Отметим, что в этом случае

$$\frac{x}{x+h} = \frac{d}{d_i}. \quad (8.5.2)$$

Отсюда легко получается уравнение (8.5.1). ■ ■

На автономных и мобильных манипуляционных роботах также применяются сканирующие лазеры для определения положения робота в рабочем пространстве с препятствиями. Для определения положения робота относительно всех предметов используется принцип триангуляции.

Упрощенная блок-схема дальномера показана на рис. 8.5.3.

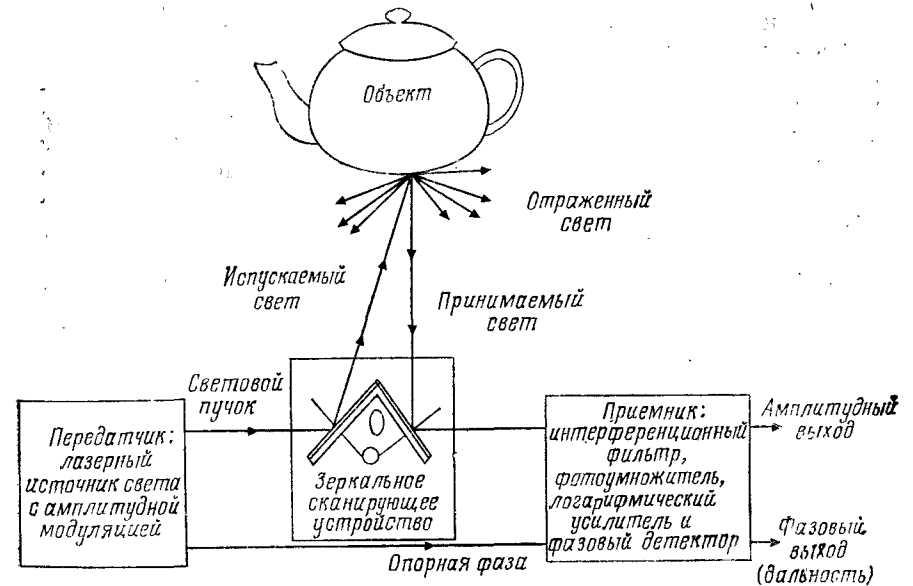


Рис. 8.5.3. Упрощенная блок-схема измерителя дальности.

8.5.3. ТАКТИЛЬНЫЕ ДАТЧИКИ В ПРИЛОЖЕНИЯХ РОБОТОТЕХНИКИ

В робототехнике была проделана большая работа по получению эквивалентов осязательных и мышечных рецепторов силы, шероховатости, влажности, нагрева, текстуры поверхности и т. д. Тактильные датчики предназначены для того, чтобы реагировать на контактные силы, которые возникают между самими датчиками и поверхностью твердых предметов. Они бывают либо типа единичного касания, либо матричного типа, давая информацию о топографии и текстуре контактируемых поверхностей.

Тактильные датчики состоят либо из массива отдельных точек, *тактилей*, либо из некоторого множества импульсных устройств, которые используют процессы, протекающие во времени, для определения состояния любой отдельной точки контакта и построения карты давления на поверхность.

В отличие от локационных датчиков тактильные датчики не реагируют на наличие предмета, пока он не придет в соприкосновение с датчиком. Следовательно, полезной комбинацией датчиков в схвате робота является локационный датчик, работающий в совокупности с контактным датчиком, потому что локационный датчик определяет близость предмета, который подлежит исследованию тактильным датчиком, и может помочь безопасно перемещать хват по направлению к этому предмету. Сигнал от локационного датчика может использоваться для быстрого перемещения хвата по направлению к предмету и последующего замедления, когда хват подойдет близко к предмету, с тем чтобы избежать столкновения. Тактильные датчики также могут быть подразделены на датчики *контакта* и датчики *давления*.

Датчики контакта выдают бинарный выходной сигнал, зависящий от того, соприкасаются ли они с предметом или нет, тогда как датчики давления выдают сигнал, показывающий величину и распределение контактных усилий. С помощью подходящего геометрического расположения тактильных чувствительных матриц можно измерять силы и моменты в двух или трех направлениях. Для приложений робототехники в настоящее время используются следующие типы тактильных датчиков.

1. Микровыключатели, которые являются простейшими и наименее дорогими тактильными сенсорными устройствами с бинарным типом выхода.

2. Резиновые подкладки с серебряной пастой, которые становятся проводящими при сжатии, потому что проводящие зер-

на, внедренные в подкладку, контактируют друг с другом в силу высокой эластичности резиновой подкладки.

3. Датчики деформации, которые также используются в качестве датчиков сил и моментов (см. разд. 8.4.2). Они реагируют на контактные силы и моменты, действующие на хват робота. Эти датчики ставятся в запястье (рис. 8.5.4). Датчики деформации прикреплены к основаниям консольных балок, заделанных в металлические конструкции. Ориентация балок и соединений между ними такова, что можно измерить шесть компонент обобщенной силы, т. е. F_x , F_y , F_z , M_x , M_y и M_z , как показано на рис. 8.5.4, б, и связать с контактными силами, действующими на хват. Например, шероховатость поверхности

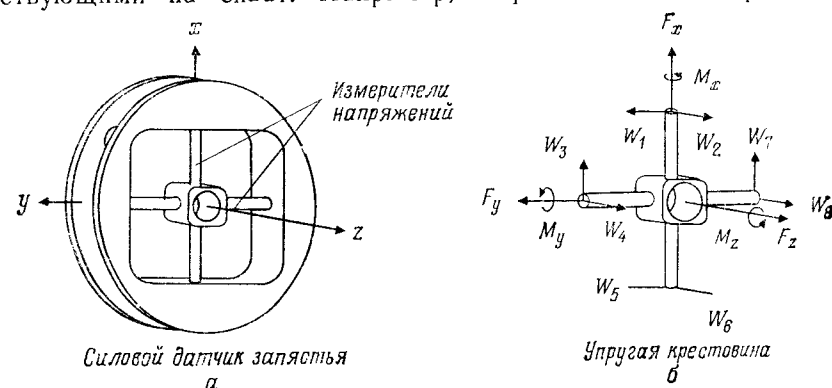


Рис. 8.5.4. Датчик в запястье, используемый как тактильный.

или трение могут быть преобразованы в различные компоненты силы и момента, и тогда запястный датчик может использоваться как тактильный датчик.

4. Тактильные датчики из резисторных и емкостных матриц, которые реагируют на приложенные контактные усилия изменением своего сопротивления или емкости по мере того, как все больше точек соприкасаются друг с другом.

5. Магнитоэластичные тактильные датчики, которые измеряют величину контактных усилий за счет изменений магнетострикционной проницаемости вследствие эластичной деформации и возникающей благодаря этому вторичной индукции.

6. Пьезоэлектрические тактильные датчики, реагирующие на контактные усилия созданием зарядов, которые можно преобразовать в ток или напряжение. Двумя широко применяемыми с этой целью кристаллами являются PZT (свинец — цирконат — титанат) пьезокерамики и ниобат лития (LiNbO_3) в силу их линейных характеристик.

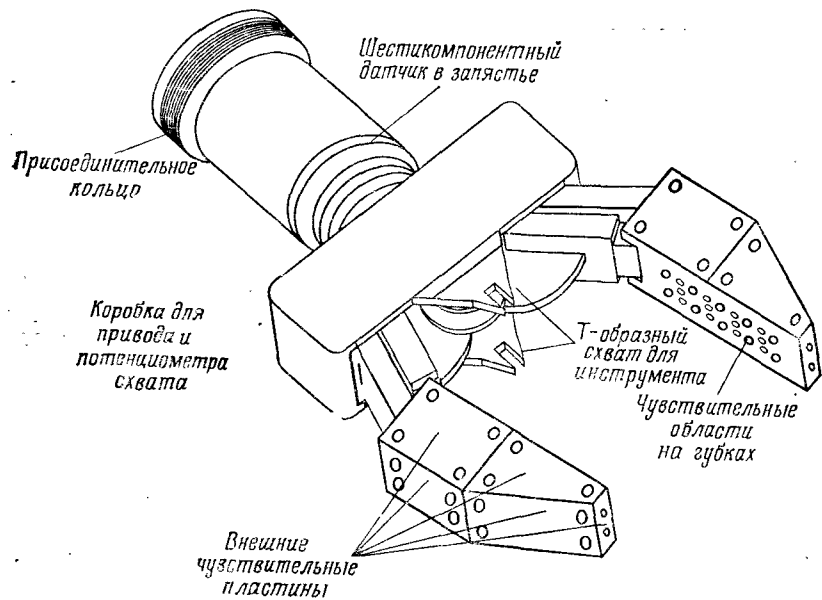


Рис. 8.5.5. Рука с запястным датчиком силы и аналоговыми датчиками касания.

7. Электрооптические тактильные датчики, в которых величина контактных усилий преобразуется в оптический сигнал. На рис. 8.5.5 показана конфигурация схвата робота с парой тактильных измерительных матриц, а также шестикомпонентным запястным датчиком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Birk J., Kelley R., Barron T., Crouch J., Duncan D., Hall J., Kolanko F., Mak A., Martins H., Mehta R., Spirito A., Tella R., Vinci A., General Methods to Enable Robots with Vision to Acquire, Orient and Transport Work Pieces, University of Rhode Island, National Technical Information Services (Aug), 1980.
2. Nevins J. L., Whitney D. E., Computer-Controlled Assembly, *Sci. Am.*, 238(2), 62—73, 1978.
3. Nevins J. L., Whitney D. E., Assembly Research, *Indus. Robot*, 7(1), 27—43, 1980.
4. Roberts L. G., Machine Perception of Three-Dimensional Solids, Optical and Electro-Optical Information Processing, J. T. Tippet et al. (Ed.), M. I. T. Press, Cambridge, MA, pp. 159—197, 1968.
5. Simunovic S., Force Information on Assembly Processes, 5th International Symposium on Industrial Robots, Chicago, IL, pp. 415—431 (Sept), 1975.

6. Toepperwein L. L., Blackman M. T., Park W. T., Tanner W. R., Adolfsen W. F., *Robotics Applications for Industry. A Practical Guide*, Neyes Data Corp., Dark Ridge, NJ, 1983.

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Дайте краткое описание локационных датчиков, которые базируются на индуктивных или емкостных свойствах материалов.
2. Дайте краткое описание нескольких акустических датчиков.
3. Используя пример 8.2.2, найдите обобщенный дифференциальный вектор системы координат объекта относительно системы координат схвата, если обобщенный дифференциальный

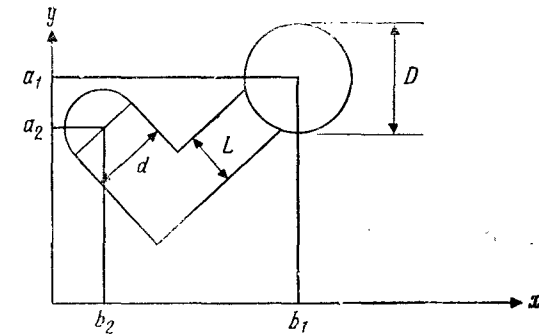


Рис. 38.4. Наклонное бинарное изображение.

вектор системы координат схвата относительно системы координат камеры имеет вид

$${}^cD_g = [-0.1 \ 0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0 \ 1]^T,$$

а положения систем координат схвата и камеры относительно системы координат звена 5 задаются как

$${}^5G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 12 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } {}^5C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Найдите ориентацию бинарного изображения, показанного на рис. 38.4.
5. Используя пример 8.3.3 и уравнение (8.3.42), найдите множество решений для \mathbf{H} и λ , когда $\lambda \neq 1$.

6. Используя рис. 8.4.4, объясните работу устройства УЦП на различных стадиях (а), (б), (в) и (г) на основе сил и моментов, приложенных к концу вала.

7. Опишите локационный датчик, который мог бы работать на основе измерения изменений скорости или давления потока.

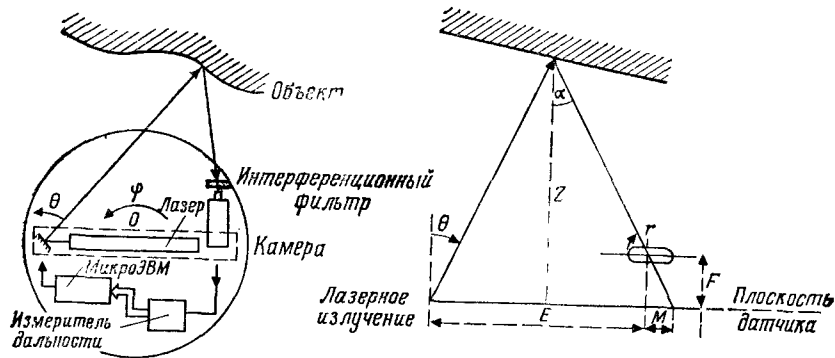


Рис. 38.8.

8. Рассмотрите лазерный дальномер, показанный на рис. 38.8. Покажите, что расстояние до цели Z определяется выражением

$$Z = \frac{(E + M)F}{M + F}.$$

Программирование движения роботов

9.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе мы обратимся к некоторым важным вопросам программирования движения роботов. Программирование многостепенных манипуляционных роботов является гораздо более сложным, чем программирование станков с числовым программным управлением. Во многих робототехнических системах применяется так называемое программирование «он-лайн», при котором сам робот используется на различных стадиях программирования. Это известно также как программирование робота методом обучения, при котором оператор перемещает манипулятор через множество требуемых точек траектории в трехмерном рабочем пространстве с помощью кнопок, рукояток, «мыши», рычагов управления или клавиатуры ЭВМ. Компьютер запоминает все точки и детали траектории движения, так что он может управлять роботом с тем, чтобы точно воспроизводить движение в дальнейшем. С другой стороны, программирование «офф-лайн» осуществляется без использования робота. В этом случае программное обеспечение должно быть способно решать обратную задачу кинематики общего вида и перемещать сочленения робота так, чтобы достигать любого желаемого кинематического положения схвата. Следовательно, в робототехнике используются три метода программирования:

1. *Ручное обучение, или показ-и-обучение.*
2. *Обучение ведением, или сопровождение.*
3. *Языки программирования.*

Два первых метода относятся к программированию «он-лайн», потому что они требуют наличия самого робота для осуществления программирования.

9.2. РУЧНОЕ ОБУЧЕНИЕ, ИЛИ ПОКАЗ-И-ОБУЧЕНИЕ

Обучение с помощью этого метода обычно осуществляется посредством пульта, множество кнопок и рычагов которого позволяет программисту перемещать робот из одного кинематического положения (т. е. позиции и ориентации) в другое кинематическое положение и, следовательно, сохранять каждое движение в памяти компьютера и в конце создать файл движения, который может быть воспроизведен роботом.

В разделе этой главы, связанном с программированием, представлена обучающая программа, которая преобразует всю клавиатуру компьютера, совместимого с IBM PC, в специальный пульт обучения, с тем чтобы проиллюстрировать метод ручного обучения (рис. 9.2.1). В этой программе содержатся такие операторы, как закрытие схвата и активация сварочной головки.

9.3. ОБУЧЕНИЕ ВЕДЕНИЕМ, ИЛИ СОПРОВОЖДЕНИЕ

Этот метод состоит в том, что оператор берет схват робота и ведет его вдоль любой желаемой траектории с требуемой скоростью и, возможно, ускорением; одновременно непрерывно осуществляются запоминание и запись позиций и ориентаций. Этот метод можно применять только к определенному классу роботов, для которых приводы можно перемещать вручную, записывая при этом траекторию движения. При другом подходе должен быть второй манипулятор, или имитатор (обучающая рука). В этом случае имитатор ведется оператором вручную вдоль желаемой траектории движения, и это движение записывается компьютером с определенной частотой. В силу ряда недостатков этого метода он не применяется широко. Однако он по-прежнему используется для обучения очень сложным движениям, таким, как специальная сварка, окраска сложных автомобильных частей распылением.

9.4. ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Некоторые робототехнические системы оснащены языками программирования, позволяющими иметь доступ к информации от датчиков, расположенных на руке робота, а также задавать движение робота. Эти языки называются *явными* или *робото-ориентированными* языками программирования. Самым важным преимуществом явных языков программирования для роботов является то, что они позволяют использовать данные от внеш-

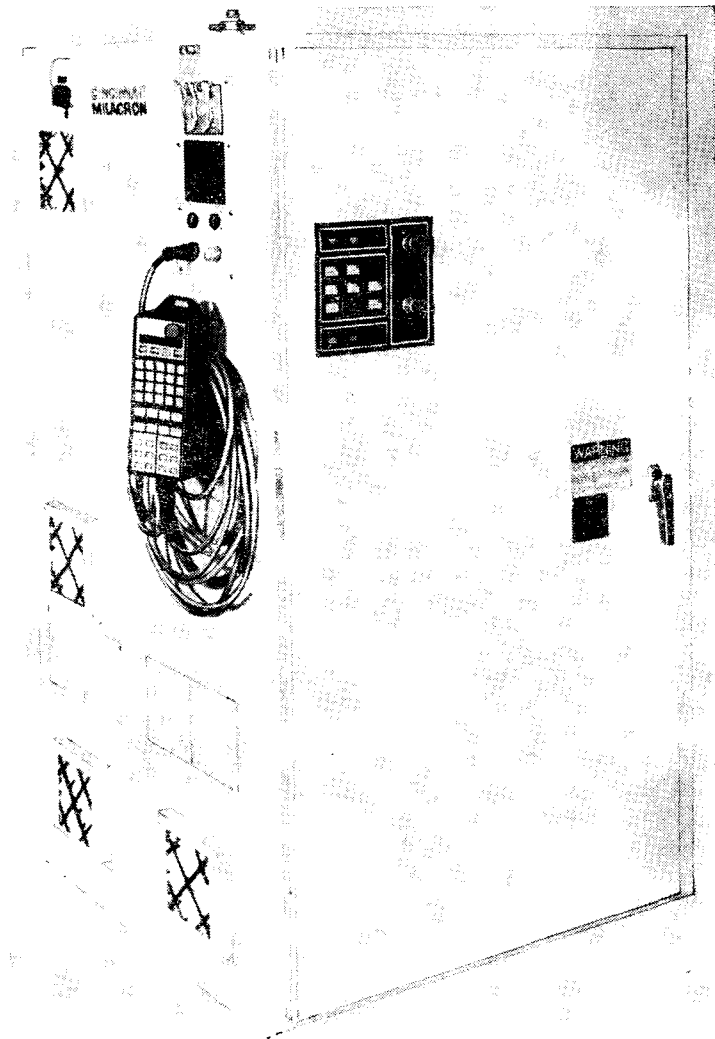


Рис. 9.2.1. Типичный пульт управления и обучения робота. (С разрешения Cincinnati Milacron.)

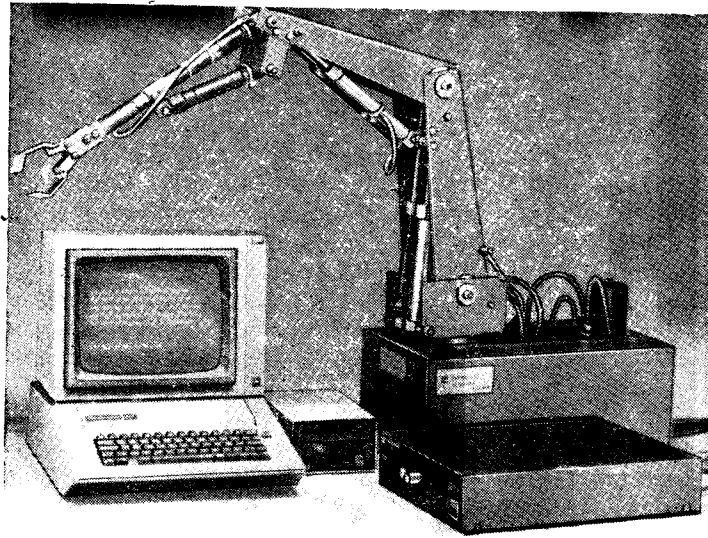


Рис. 9.4.1. Типичный комплекс: робот + ЭВМ + контроллер. (С разрешения Feedback Corp., США.)

них систем очувствления, таких, как силовые и зрительные, а также данные от внутренних систем очувствления для модификации различных робототехнических задач и действий (рис. 9.4.1). Очевидно, что в таких случаях робот может справиться в бóльшей степени со случайностями и неопределенностями в своей рабочей зоне и, таким образом, расширить сферу своего применения. Основным недостатком использования роботоориентированного языка программирования по сравнению с обучением показом и ведением является то, что требуется, чтобы программист по роботам являлся экспертом по программированию и проектированию стратегий очувствленного движения. Обычный заводской рабочий не имеет такой подготовки. Один из путей обхода этой трудности — это обращение к *задачноориентированному* программированию. В этом случае программист не должен заботиться о деталях каждого действия, которое должен выполнить робот, он скорее формулирует команды, которые обеспечивают достижение желаемых подцелей задачи. Например, если отдается команда «поставить чашку кофе на стол», то система автоматически планирует оптимальную траекторию для манипулятора, который избегает столкновения с любыми препятствиями на своем пути и ставит чашку

на стол подходящим образом. Задачноориентированное программирование сейчас развивается и, вероятно, скоро станет доступным.

9.5. ОБЗОР РОБОТООРИЕНТИРОВАННЫХ ЯЗЫКОВ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В последнее время появились две хорошие обзорные статьи по языкам программирования роботов: «Программирование роботов», написанная Т. Лозано-Перезом [18], и «Языки программирования промышленных роботов: сравнительная оценка», написанная В. А. Грувером и др. [14]. Мы также сделаем краткий обзор соответствующей литературы и представим несколько типичных программ для установки вала в отверстие.

Первый роботоориентированный язык программирования был разработан в М. И. Т. Эрнстом [3]. Он был назван *интерпретатором механической руки* (МНИ). Программная структура МНИ создается на основе *охраняемых движений*, т. е. рука движется до тех пор, пока датчик не зафиксирует определенное положение. Типичная программа включает такие команды, как *move* (двигаться) — для обозначения направления и скорости, *until* (до тех пор пока) — для проверки датчика, *ifgoto* (если — то идти) — для обозначения логического ветвления и *ifcontinue* (если — то продолжить) — для продолжения программы, если достигаются желаемые условия.

Другой язык был разработан в М. И. Т. Сильвером [28]. Он был назван *MINI* и в основе своей являлся расширением ЛИСП-системы. Серьезным ограничением *MINI* являлось то, что он не мог независимо управлять сочленениями робота. Он использовался для робота, работающего в декартовой системе координат и оснащенного шестикомпонентным датчиком в запястье с чувствительностью около 400 г. Основная часть программы установки вала в отверстие имеет вид

```

PEG-IN-HOLE INSERTION PROGRAM IN MINI
(DEFUN MOVE-ABOVE(P OFFSET))
;set x, y, z goals and wait until they are reached
(X = (X-LOCATION P))
(Y = (Y-LOCATION P))
(Z = (PLUS(Z-LOCATION P)OFFSET))
(WAIT'(AND(?X)(?Y)(?Z)))
(DEFUN INSERT(HOLE))
(MOVE-ABOVE HOLE 0.25)
;define a target 1 inch below current position
(SET Q ZTARGET (DIFFERENCE(GETM ZPOS) 1.0))
;move down until a contact force is met or until
;the position target is met
(FZ=LANDING-FORCE)
(WAIT'(OR(?FZ)(SEQ(GETM ZPOS) ZTARGET)))
(COND((SEQ(GETM ZPOS) ZTARGET)))
;if the position goal was met, i.e., no surface
encountered
;comply with lateral forces
(FX=0)(FY=0)
;and push down until enough resistance is met.
(FZ=INSERTION-FORCE)
(WAIT'(FZ)))
(T;if a surface was encountered
(ERROR INSERT)

```

Следующее поколение программного обеспечения роботов было разработано в Станфордской лаборатории искусственного интеллекта Полом [23]. Оно представляло собой экспериментальный исследовательский язык программирования роботов общего назначения (WAVE). Синтаксис WAVE был создан на основе ассемблерного языка PDP-10, и поэтому WAVE был языком низкого уровня. Несмотря на это, программное обеспечение поддерживало много функций высокого уровня, позволяющих программисту описывать положение и ориентацию схвата робота и координировать движения сочленений, обеспечивая непрерывность скоростей и ускорений. Важнее всего оказалась способность WAVE учитывать податливость сочленения робота. Программное обеспечение WAVE также оказалось вполне успешным при его использовании для планирования траекторий движения робота. Ниже приведена типичная программа для установки вала в отверстие, представленная Полом [23].

PEG-IN-HOLE INSERTION PROGRAM IN WAVE

NOTE: USE OF GUARDED MOVES

NOTE: USE OF COMPLIANCE

```

TRANSPIN... ;Location of pin
TRANSHOLE... ;Location of hole
ASSIGN TRIES 2 ;Number of pickup attempts
MOVE PIN ;Move to PIN, MOVE first
; moves in + Z
; then to a point above PIN,
; then -Z

PICKUP:
CLOSE 1 ;Pickup pin
SKIPE 2 ;Skip next instruction if
; Error 2 occurs
; (Error 2: fingers closed
; beyond argument
; to CLOSE)
JUMP OK ;Error did not occur, go to
; OK
OPEN 5 ;Error did occur, open the
; fingers
CHANGE Z,-1.NIL,0,0 ;Move down 1 inch
SOJG TRIES, PICKUP ;Decrement TRIES, if not
; negative
; jump to PICKUP
WAIT NO PIN ;Print "NO PIN" and wait
; for the operator
JUMP PICKUP ;Try again when operator
; types
; PROCEED

OK:
MOVE HOLE ;Move above hole
STOP FV.NIL ;Stop on 50 oz.
CHANGE Z,-1.NIL,0,0 ;Try to go down one inch
SKIPE 23 ;Error 23, failed to stop
JUMP NOHOLE ;Error did not occur (pin
; hit surface)

FREE 2,X,Y ;Proceed with insertion by
; complying
; with forces along x and y
SPIN 2,X,Y ;Also comply with torques
; about x and y
STOP FV.NIL ;Stop on 50 oz.
CHANGE Z,-2,NIL.0,0 ;Make the insertion

NOHOLE:
WAIT NO HOLE ;Failed

```

Впоследствии в лаборатории SAIL был разработан более совершенный язык программирования AL, основанный на Алголе (см. [6 и 20]). На этом языке можно было программировать сборочные операции с использованием силомоментных датчиков. AL пригоден как для роботориентированного, так и для задачноориентированного программирования. Языковые конструкции включают инструкции движения, такие, как Move Arm To — двигать руку к (положению) и Open Hand To — раскрыть руку на (величину), а также условные команды, такие, как On Force (value) Do (operation) — при достижении усилия (величина) сделать (операцию). Типичная программа установки вала в отверстие на языке AL имеет вид

```
PEG-IN-HOLE INSERTION PROGRAM IN AL
BEGIN "insert peg into hole"
  FRAME peg_bottom,peg_grasp,hole_bottom,hole_top;
  {The coordinate frames represent actual positions
  of object features, not hand positions}
  peg_bottom←FRAME(nilrot,VECTOR(20,30,0)*inches);
  hole_bottom←FRAME(nilrot,VECTOR(25,35,0)*inches);
  {Grasping position relative to peg_bottom}
  peg_grasp←FRAME(ROT(xhat,180*degrees).3*zhat*inches);
  tries←2;
  grasped←FALSE;
  [the top of the hole is defined to have a fixed
  relation to the bottom]
  AFFIX hole_top to hole_bottom RIGIDLY
    AT TRANS(nilrot,3*zhat*inches);
  OPEN bhand TO peg_diameter + 1*inches;
  {Initiate the motion to the peg, note the
  destination frame}
  MOVE barm TO peg_bottom*peg_grasp;
  WHILE NOT grasped AND i<tries DO
    BEGIN "Attempt grasp"
      CLOSE bhand<TO 0*inches;
      IF bhand<peg_diameter/2
        THEN BEGIN "No object in grasp"
          OPEN bhand TO peg_diameter+1*inches;
          MOVE barm TO ⊗ -1*inches; {⊗indicates
          current location}
        END
```

```
ELSE grasped ← TRUE
  i←i+1;
END
IF NOT grasped THEN ABORT ("Failed to grasp the
peg");
{Establish a fixed relation between arm and peg.}
AFFIX peg_bottom TO barm RIGIDLY;
{Note that we move the peg_bottom, not barm}
MOVE peg_bottom TO hole_top;

{Test if a hole is below us}
MOVE barm TO ⊗ -1*inches
ON FORCE(zhat)>10*inches DO ABORT("No Hole");

{Exert downward force, while complying to side
forces}
MOVE peg_bottom to hole_bottom DIRECTLY
WITH FORCE_FRAME = station IN WORLD
WITH FORCE(zhat) = -10*ounces
WITH FORCE(xhat) = 0*ounces
WITH FORCE(yhat) = 0*ounces
SLOWLY;
END "insert peg in hole"
```

Одним из наиболее известных языков для программирования движения роботов и управления является VAL, разработанный Шимано [27] и фирмой Unimation Inc [31, 32]. Этот язык, реализованный на ЭВМ LSI-11 фирмы DEC для управления роботом, позволяет задавать как координаты, так и траектории движения. VAL похож на BASIC по основным командам, но не поддерживает операции над числами с плавающей точкой, работу с символьными строками и арифметические операции над точками позиционирования. С помощью языка VAL также нельзя запрограммировать подающее движение, и, следовательно, в типичной программе установки вала в отверстие на VAL предполагается, что зазор между валом и отверстием больше, чем точность робота. Чтобы обойти эту сложность, можно разместить многокомпонентный датчик силы или подающее устройство на схвате робота. Типичная программа на VAL для установки вала в отверстие имеет вид:

```
PEG-IN-HOLE INSERTION PROGRAM IN VAL
SET1      TRIES=2

REMARK    If the hand closes to less than 100 mm,
          go to statement labeled 20.
10 GRASP  100,20
REMARK    Otherwise continue at statement 30.
20 GOTO   30
```

```

REMARK  Open the fingers, displace down along
20  OPEN1  500
    DRAW  0.0,-200
    SET1  TRIES=TRIES-1
    IF    TRIES GE 0 THEN 10
    TYPE  NO PIN
    STOP
REMARK  Move 300 mm above HOLE following a
    straight line.
30  APPROX HOLE,300
REMARK  Monitor signal line 3 and call procedure
    ENDIT to STOP the program.
REMARK  if the signal is activated during the
    next motion.
REACT1  3,ENDIT
APPROX  HOLE,200
REMARK  Did not feel force, so continue to HOLE.
MOVES   HOLE

```

Следующая программа на VAL-II заставляет манипуляционный робот PUMA 560 двигаться случайным образом в зависимости от сгенерированного случайного числа. Эта программа может использоваться для размахивания флагом.

```

PROGRAM random
1  HERE #ref
2  DECOMPOSE h[] = #ref
3  FOR number = 1 TO count
4  FOR i = 0 TO 5
5  j[i] = (RANDOM*2-1)*mag+h[i]
6  END
7  MOVE #PPOINT(j[0], j[1], j[2], j[3], j[4],
    j[5])
8  END
9  RETURN

```

Фирма IBM разработала гораздо более совершенное программное обеспечение для роботов, такое, как EMILY (Эванс и др. [47]), ML (Уилл [33]) и, наконец, AML — язык промышленного назначения (Тейлор и др. [30]), IBM [15]. AML по-прежнему является языком программирования ЭВМ общего назначения, который может использоваться и для робототехнических приложений. Он поддерживает арифметические и булевы операции, работу со структурами данных, используемых для выпол-

нения операций с векторами и матрицами и, следовательно, позволяет выполнять преобразования координат и планирование траектории движения (по положению, скорости и ускорению), а также обеспечивает слежение за датчиками. Недавно была разработана версия AML, называемая AML/E, для AML/Entry, которая реализуется на IBM PC или совместимых микрокомпьютерах, таких, как Zenith 151. Однако базовый AML реализуется на известных компьютерах серии RS-1. Типичная программа на AML для установки вала в отверстие имеет вид:

```

PEG-IN-HOLE INSERTION PROGRAM IN AML
PICKUP:SUBR(PART_DATA,TRIES);
    MOVE(GRIPPER,DIAMETER(PART_DATA)+0.2);
    MOVE(<1,2,3>,XYZ_POSITION(PART_DATA)+<0,0,1>);
    TRY_PICKUP(PART_DATA,TRIES);
    END;

TRY_PICKUP:SUBR(PART_DATA,TRIES);
    IF TRIES LT 1 THEN RETURN('NO PART');
    DMOVE(3,-1.0);
    IF GRASP(DIAMETER(PART_DATA)='NO PART'
        THEN TRY_PICKUP(PART_DATA,TRIES-1);
    END;

GRASP:SUBR(DIAMETER,F);
    FMONS:NEW APPLY($MONITOR,PINCH_FORCE(F));
    MOVE(GRIPPER,0,FMONS);
    RETURN(IF QPOSITION(GRIPPER) LE DIAMETER/2
        THEN 'NO PART'
        ELSE 'PART');
    END;

INSERT:SUBR(PART_DATA,HOLE);
    FMONS:NEW APPLY(SMONITOR,
        TIP_FORCE(LANDING_FORCE));
    MOVE(<1,2,3>,HOLE+<0,0,25>);
    DMOVE(3,-1.0,FMONS);
    IF QMONITOR(FMONS)=1
        THEN RETURN('NO HOLE');
    MOVE(3,HOLE(3) + PART_LENGTH(PART_DATA));
    END;

PART_IN_HOLE:SUBR(PART_DATA,HOLE);
    PICKUP(PART_DATA,2.);
    INSERT(PART_DATA,HOLE);
    END;

```

Следующая программа, написанная на AML для манипуляционного робота IBM 7565, приводит в движение шесть степеней подвижности, схват. Она перемещает робот в семь различных положений и устанавливает расстояние между губками схвата, а также скорость.

```
JOINT MOTION WARMUP FOR AN IBM 7565 (WHITE CLOUD)
ROBOTIC MANIPULATOR
```

```
EXERCISE: SUBR[N,S];
  N: NEW IF ? N THEN N ELSE 10;
  S: NEW IF ? S THEN S ELSE 1.0;
10 OLDS: NEW SPEED;
  STARTUP;
  DELAY[5];
  SPEED[S];
  CLEANUP[$3XCLN];
  MOVE[ARM,0];
  WHILE <N:=N-1> GE 0 DO(
    MOVE[ARM,<5,18,8,134,89,135,3>],
    MOVE[ARM,<-2,-3,-4,-134,-89,-134,0>],
    MOVE[ARM,<8,15,8,124,79,105,2>],
    MOVE[ARM,<-6,-24,-7,-57,-78,-90,3>],
    MOVE[ARM,<7,24,7,120,70,120,2.8>],
    MOVE[ARM,<-7,-24,-7,-120,-50,-120,2>];
    MOVE[ARM,<-3,10,-7,-120,-64,-120,0>]);
  EXCLN: SUBR;
  MOVE[ARM,0];
  SPEED[OLDS];
  END;
END;

TYPE[EOL, 'EXERCISE[REPS,SPEED];',EOL,
'CAUTION: MOVE ARM TO SAFE LOCATION FOR MOVE TO
ZERO]',EOL];
```

Среди программного обеспечения, разработанного для управления движением роботов, можно отметить TEACH, созданное Руофом [24, 25] для Bendix Corporation; PAL, созданное Тэйксом и др. [29], которое способно осуществлять преобразования координат; JARS, разработанное группой исследования роботов и телеоператоров лаборатории реактивного движения НАСА [1] как средство программирования высокого уровня для управления роботами; MAPLE, разработанное Даррингером и Блэсгеном [2] для IBM; SIGLA, разработанное Сэлмо-

ном [26] для роботов SIGMA фирмы Olivetti; MAL, разработанное Джини и др. [12] из Миланского политехнического института в Италии; LAMA-S, созданное Фалеком и Парентом [5] во Франции; LM, разработанное Латомбе и Мазером [17] из IMAG во Франции; MCL, разработанное фирмой McDonnell-Douglas [19] как расширение языка программирования APT для машин с числовым управлением; RAIL, созданное Франклином и Вандебургом [7] из Automation Inc. для управления системой технического зрения и движением манипуляционных роботов; RPS, разработанное Парком [21, 22] для SRI International для управления сборочными операциями, выполняемыми группой роботов, а также HELP, разработанное General Electric Company [8, 9] для управления многостепенными роботами, работающими в декартовой системе координат.

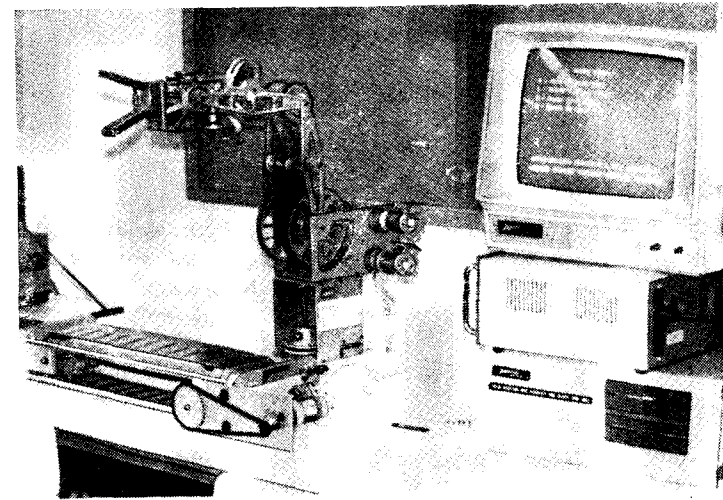


Рис. 9.5.1. Типичный учебный робототехнический комплекс робототехнической лаборатории Университета Нью-Мексико.

Читатель опять отсылается к уже указанным обширным обзорам Лозана — Переза [18] и Грувера и др. [14] по программированию роботов. Более поздние разработки показывают, что BASIC и C будут использоваться в качестве основных языков программирования, и поэтому остальную часть этой главы мы посвятим программированию движения роботов на языке BASIC.

Ниже мы представим набор программ на языке BASIC для программирования сборочных процессов, выполняемых широким классом роботов, и в частности для учебного робототехнического модуля на базе Rhino XR-2. На рис. 9.5.1 показаны типичный учебный робототехнический модуль, включающий пятиступенной робот Rhino XR-2, конвейерную ленту, карусель, и соответствующий управляющий компьютер.

9.6. ПОЛНЫЙ НАБОР СБОРОЧНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ РОБОТОВ

Эти программы применимы к манипуляционным роботам Rhino XR-2. Однако они имеют достаточно общий вид и могут использоваться для любого робота, контроллер которого обменивается с ЭВМ верхнего уровня посредством кодов ASCII через асинхронный последовательный интерфейс RS-232. Ниже будут использоваться следующие команды языка:

LPRINT «An»	Переместить привод A на n шагов
LPRINT «AX»	Остановить привод A
LPRINT «Af»	Считать положение концевого переключателя для привода A
LPRINT «I»;	Послать управляющий код в последовательный порт
X=INP(PORT)-32	Считать положение привода A
LPRINT «A?»	Получить сообщение об ошибке из порта
X=INP(PORT)-3	

Если приведенные ниже программы предполагается использовать для роботов, отличных от Rhino XR-2, то эта библиотека команд должна быть заменена в программах подходящей библиотекой команд для рассматриваемых роботов. Похожие языки программирования роботов были разработаны на основе популярного языка, такого, как BASIC или PASCAL, с добавлением библиотеки специфичных для роботов подпрограмм. После этого пользователь может написать BASIC-программу, используя обращения к заранее сформированным подпрограммам. Примерами являются AR-BASIC, разработанный American Robot Corporation (см. [11]), и ROBOT-BASIC, разработанный в Intelledex [16]. Разумеется, программное обеспечение JPL JARS НАСА является еще одним примером языка программирования роботов с использованием языка PASCAL.

9.6.1. ПРОГРАММА RESET (УСТАНОВКА)

Программа устанавливает пятиступенной робот в произвольное начальное положение, определяемое вектором углов сочленений, который задается массивом оператора с меткой 1080. Это обеспечивается путем перемещения всех сочленений так, чтобы сработали тактильные датчики и в случае Rhino XR-2 — концевые переключатели. После этого сочленение останавливается и движется в противоположную сторону, пока не будет достигнута базовая конфигурация:

```

1000 PROGRAM RESET (HOME)
1010
1020 PURPOSE-RESET THE XR-2 TO THE "HOME" POSITION
1030
1040 DEFINT A-Z
1050 DIM OFFSET(8),MAP(8),RDIR(8),IPOS(8),NET(8)
1060
1070 DATA 8,7,4,3,2,1,6,5
1080 DATA 0,0,-45,+278,-322,-870,24,25
1090 DATA 1,1,-1,-1,1,1,1,-1
1100
1110 NCON = 8
1120 NAXIS = 6

```

```

1130 ISTEP = 25
1140 PORT = &H3F8 (changes for other computers)
1150
1160 FOR I = 1 TO NCON : READ MAP(I) : NEXT I
1170 FOR I = 1 TO NCON : READ OFFSET(I) : NEXT I
1180 FOR I = 1 TO NCON : READ RDIR(I) : NEXT I
1190 FOR I = 1 TO NCON : NET(I) = 0 : NEXT I
1200
1210 MR$="HGFEDCBA"
1220 I$ = "I"
1230
1240 DISPLAY MENU
1250
1260 K$ = INKEYS 'CLEAR KEYBOARD
1270 CLS 'CLEAR SCREEN
1280 GOSUB 2360 'MOTORS QUIET
1290
1300 PRINT "RESET PROGRAM:"
1310 PRINT
1320 PRINT " [1] = RESET ALL JOINTS MICROSWITCH"
1330 PRINT
1340 PRINT " [2] = RESET BASE"
1350 PRINT " [3] = RESET SHOULDER"
1360 PRINT " [4] = RESET ELBOW"
1370 PRINT " [5] = RESET WRIST PITCH"
1380 PRINT " [6] = RESET WRIST ROLL"
1390 PRINT " [7] = RESET FINGERS"
1400
1410 PRINT " [8] = RETURN TO TEST PROGRAM"
1440 LOCATE 15,1
1450
1460 PRINT "PLEASE CHOOSE ONE OF THE ABOVE"
1470
1480 K$ = INKEY$ : IF K$ = " " THEN 1480
1490 X = VAL(K$)
1500 JLOW = 2 : JHIGH = NAXIS + 1
1510 IF K$ = "1" THEN GOSUB 1600 : GOTO 1440
1520 FOR I = 2 TO 7
1530 IF X <> I THEN 1550
1540 JLOW = I : JHIGH = I
1550 NEXT I
1560 IF X > 1 AND X < 8 THEN GOSUB 1600 : GOTO 1440
1570 IF K$ = "8" THEN CHAIN "TEST"
1580 IF K$ = "9" THEN CHAIN "TEST"
1590 GOTO 1440
1600

```

```

1610 EXECUTE THE SELECTED RESET COMMAND
1620
1630 FOR J = JHIGH TO JLOW STEP -1
1640 I = J + 1
1650 MASK = 2^(MAP(I) - 1)
1660 M$ = MID$(MR$,I,1)
1670 SO$ = M$ + "O"
1680 SX$ = M$ + "X"
1690 SQ$ = M$ + "?"
1700 SIGN = RDIR(I)
1710 K$ = INKEY$
1720 LOCATE 2+I,9 : PRINT "->"
1730 LOCATE 2+I,49 : PRINT "<-"
1740 ZSTEP = SIGN*ISTEP : IF I = 8 THEN ZSTEP = SIGN
1750 GOSUB 1840 'ROUGH SEARCH
1760 ZSTEP = -RDIR(I)
1770 GOSUB 2190 'ROUGH OFFSET
1780 ZSTEP = RDIR(I)
1790 GOSUB 1840 'FINE SEARCH
1800 GOSUB 2020 'OFFSET
1810 IPOS(I) = 0
1820 NEXT J
1830 RETURN
1840
1850 MOVE FORWARD TO CLOSE MICROSWITCH USING RESOLUTION
ZSTEP
1860
1870 SZ$ = M$ + STR$(ZSTEP)
1880 LPRINT SO$
1890 LPRINT SQ$
1900 X = (INP(PORT) - 32) AND MASK
1910 LOCATE 2+I,42
1920 IF X = 0 THEN PRINT "CLOSED" : BEEP : GOTO 1990
1930 IF X <> 0 THEN PRINT "OPEN"
1940 LPRINT SQ$
1950 IF INP(PORT) - 32 > ISTEP THEN 1890
1960 LPRINT SZ$
1970 NET(I) = NET(I) + ZSTEP
1980 GOTO 1880
1990 LPRINT M$ + STR$(-3*ZSTEP)
2000 NET(I) = NET(I) - 3*ZSTEP
2010 RETURN
2020
2030 OFFSET ROUTINE
2040
2050 LOCATE 2+I,42 : PRINT "OPEN" : BEEP

```



```

2060 JHOLE = ABS(OFFSET(I))
2070 JSIGN = SGN(OFFSET(I))
2080 SJ$ = M$ + STR$(JSIGN*ISTEP)
2090 LPRINT SQ$
2100 IF INP(PORT) - 32 > ISTEP THEN 2090
2110 IF JHOLE < ISTEP THEN 2150
2120 LPRINT SJ$
2130 JHOLE = JHOLE - ISTEP
2140 GOTO 2090
2150 LPRINT M$ + STR$(JSIGN*JHOLE)
2160 NET(I) = NET(I) + OFFSET(I)
2170 GOSUB 2430
2180 RETURN
2190
2200 ROUGH OFFSET TO OPEN THE MICROSWITCH
2210
2220 SZ$ = M$ + STR$(ZSTEP)
2230 LPRINT SO$
2240 LPRINT I$
2250 X = (INP(PORT) - 32) AND MASK
2260 LOCATE 2+I,42
2270 IF X = 0 THEN PRINT "CLOSED" : BEEP
2280 IF X <> 0 THEN PRINT "OPEN"
2290 IF X <> 0 THEN 2350
2300 LPRINT SQ$
2310 IF INP(PORT) - 32 > ISTEP THEN 2240
2320 LPRINT SZ$
2330 NET(I) = NET(I) + ZSTEP
2340 GOTO 2230
2350 RETURN
2360
2370 TURN OFF ALL MOTORS
2380
2390 FOR J = 1 TO NCON
2400 LPRINT MID$(MR$,J,1) + "X"
2410 NEXT J
2420 RETURN
2430
2440 UPDATE MOVE DISPLAY
2450
2460 LOCATE 2+I,9 : PRINT " "
2470 LOCATE 2+I, 42 : PRINT " "
2480 RETURN
2490
2500 END

```

9.6.2. ПРОГРАММА TEST (ТЕСТ)

Эта программа связана с программами RESET, CMOV, PMOVE, EMOVE и INKIN.

```

100 PROGRAM TEST
110 -
115 CLOSE
120 PURPOSE--TEACH THE XR-2 TO FOLLOW A SERIES OF MOVES
130
140 DIM IPOS(8),PMIN(8),PMAX(8)
150
160 NCON = 8
170 NAXIS = 6
180
190 DATA -1000,-1000,-1300,-1000,-1000,-1000,-1000,-1000
200 DATA 1000,1000,1300,1000,1000,1000,1000,1000
210
220 FOR I = 1 TO NCON : READ PMIN(I) : NEXT I
230 FOR I = 1 TO NCON : READ PMAX(I) : NEXT I
240
250 K$ = INKEY$ 'CLEAR KEYBOARD
260 CLS 'CLEAR SCREEN
270
280 PRINT "TEST PROGRAM:"
290 PRINT
300 PRINT "[1] = RESET ROBOT TO 'HOME' POSITION"
310 PRINT "[2] = CREATE A NEW MOVE FILE"
320 PRINT "[3] = PLAYBACK AN EXISTING MOVE FILE"
330 PRINT "[4] = EDIT AN EXISTING MOVE FILE"
340 PRINT "[5] = EXIT THE TEST PROGRAM"
341 PRINT "[6] = INVERSE KINEMATICS FILE"
350 PRINT
360 PRINT "PLEASE SELECT ONE OF THE ABOVE"
370 PRINT
380 K$ = INKEY$ : IF K$ = " " THEN 380
390 X = VAL(K$)
400
410 IF X = 1 THEN CHAIN "HOME"
420 IF X = 2 THEN CHAIN "CHU"
430 IF X = 3 THEN CHAIN "PHU"
440 IF X = 4 THEN CHAIN "EHU"
450 IF X = 5 THEN GOTO 500
451 IF X = 6 THEN CHAIN "INVERSE"
460

```

```

470 GOTO 260
480
500 INPUT "ARE YOU SURE? [Y OR N]";K$
510 IF K$='Y' THEN GOTO 540
520 GOTO290
540 END

```

9.6.3. ПРОГРАММА CREATE A MOVE FILE (СОЗДАНИЕ ФАЙЛА ДВИЖЕНИЯ)

Эта программа позволяет пятистепенной руке робота обучиться множеству движений для сборочных процессов, выполняемых совместно с ленточным конвейером. Программа также позволяет руке робота захватывать и освобождать предметы в заданные моменты времени, а также осуществлять начальную установку в базовую конфигурацию. Полный набор движений после обучения может быть запомнен в памяти ЭВМ и воспроизведен любым способом и любое число раз.

```

610 PORT = &H3F8
1000 PROGRAM CMOVE(Create a move file)
1010
1020 PURPOSE - CREATE AN XR-2 MOVE FILE
1030
1040 DEFINT A-Z
1050 DIM STEPS(8),MK$(4),IFOS(8),JPOS(8),DMAP(8)
1060
1070 DATA 100,10,-10,-100,10,1,-1,-10
1080 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0
1090 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0
1100 DATA 1,1,-1,-1,1,1,-1,-1
1110
1111 BLOCK - 1
1112 FLAG1 = 0, SET GRIPPER IN OPEN STATUS
1120 NCON = 8
1130 NAXIS = 6
1140 ISTEP = 40
1150 PORT = &H3F8
1160
1170 FOR I = 1 TO 8 : READ STEPS(I) : NEXT I
1180 FOR I = 1 TO NCON : READ IPOS(I) : NEXT I
1190 FOR I = 1 TO NCON : READ JPOS(I) : NEXT I
1200 FOR I = 1 TO NCON : READ DMAP(I) : NEXT I
1210
1220 MR$="HAFEDCBG"
1230 MK$(1) = "YI123456"
1240 MK$(2) = "UIQWERTY"

```

```

1250 MK$(3) = "JKASDFGH"
1260 MK$(4) = "M,ZXCVBN"
1270
1280 K$ = INKEY$ 'CLEAR KEYBOARD
1290 CLS 'CLEAR SCREEN
1300
1310 PRINT "CMOVE PROGRAM:"
1320 PRINT
1330 INPUT "ENTER FILENAME";MFILE$
1340
1350 OPEN "O",1,MFILE$
1360 PRINT CHR$(27);"x"; "k" 'DISABLE KEYBOARD AUTO REPEAT
1370
1380 CLS
1390 PRINT "-----"
1400 PRINT " : BASE : SHOULDER : ELBOW : FITCH : ROLL : CONVEYER : "
1410 PRINT "-----"
1420 PRINT " : [1] : [2] : [3] : [4] : [5] : [6] : "
1430 PRINT " : CW 100 : UP 100 : UP 100 : UP 100 : CW 100 : RH 100 : "
1440 PRINT "-----"
1450 PRINT " : [Q] : [W] : [E] : [R] : [T] : [Y] : "
1460 PRINT " : CW 10 : UP 10 : UP 10 : UP 10 : CW 10 : RH 10 : "
1470 PRINT "-----"
1480 PRINT " : [A] : [S] : [D] : [F] : [G] : [H] : "
1490 PRINT " : CCW -10 : DN -10 : DN -10 : DN -10 : CCW -10 : LF -10 : "
1500 PRINT "-----"
1510 PRINT " : [Z] : [X] : [C] : [V] : [B] : [N] : "
1520 PRINT " : CCW -100 : DN -100 : DN -100 : DN -100 : CCW -100 : LF -100 : "
1530 PRINT "-----"
1540 PRINT " : : : : : : "
1550 PRINT "-----"
1560 PRINT " : : : : : : "
1570 PRINT "-----"
1571 PRINT " BLOCK #"
1580 PRINT
1590 PRINT "[L] TOGGLES THE SENSITIVITY"
1600 PRINT "[P] ENDS A MOVE BLOCK [O] ENDS THE FILE"
1610 PRINT "[M] RESETS GRIPPER [K] GRIPS AN OBJECT [I]
RELEASES AN OBJECT"
1620
1630 FOR I = 3 TO NCON
1640 LOCATE 17,11*I-25 : PRINT " "
1650 LOCATE 17,11*I-28 : PRINT IPOS(I)
1660 NEXT I
1670
1680 FOR I = 3 TO NCON
1690 LOCATE 15,11*I-25 : PRINT " "
1700 LOCATE 15,11*I-28 : PRINT JPOS(I)
1710 NEXT I
1720
1721 LOCATE 19,36 :PRINT BLOCK

```

```

1730 K$ = INKEY$ : IF K$ = " " THEN 1730
1731 LOCATE 19,36 : PRINT BLOCK
1740 IF K$ = "L" THEN GOSUB 2340 : GOTO 1730
1750 IF K$ = "P" THEN GOSUB 2030 : GOTO 1680
1760 IF K$ = "O" THEN GOSUB 2140 : GOTO 1730
1761 IF K$ = "K" THEN GOSUB 2600 : GOSUB 2030
      GOTO 1730
1762 IF K$ = "I" THEN GOSUB 2721 : GOTO 1730
1763 IF K$ = "M" THEN GOSUB 2480 : GOTO 1730
1770
1780 FOR I = 3 TO NCON
1790 FOR J = 1 TO 4
1800 IF K$ = MID$(MK$(J),I,1) THEN 1850
1810 NEXT J
1820 NEXT I
1830 GOTO 1730
1840
1850 GOSUB 1870 'MOVE MOTOR
1860 GOTO 1730
1870
1880 'MOVE MOTOR STEPS(J) HOLES
1881 COLOR 0,7,6
1890
1891 LOCATE 3*J+1,11*I-27 : PRINT STEPS(J)
1900 SIZE = ABS(STEPS(J))
1910 SIGN = DMAP(I)*SGN(STEPS(J))
1920 M$ = MID$(MR$,I,1)
1930 LPRINT M$ + "?"
1940 IF INP(PORT) - 32 > ISTEP THEN 1930
1950 IF SIZE < ISTEP THEN 1990
1960 LPRINT M$ + STR$(SIGN*ISTEP)
1970 SIZE = SIZE - ISTEP
1971 IPOS(I)=IPOS(I)+ISTEP*SIGN*DMAP(I)
1972 JPOS(I)=JPOS(I)+ISTEP*SIGN*DMAP(I)
1973 COLOR 7,0,6
1975 LOCATE 17,11*I-28 : PRINT IPOS(I)
1976 LOCATE 15,11*I-28 : PRINT JPOS(I)
1980 GOTO 1930
1990 LPRINT M$ + STR$(SIGN*SIZE)
1991 COLOR 7,0,6
1992 LOCATE 3*J+1,11*I-27 : PRINT STEPS(J)
2001 IPOS(I)=IPOS(I)+SIZE*SIGN*DMAP(I)
2002 JPOS(I)=JPOS(I)+SIZE*SIGN*DMAP(I)
2203 LOCATE 17,11*I-28 : PRINT IPOS(I)
2204 LOCATE 15,11*I-28 : PRINT JPOS(I)

```

```

2020 RETURN
2030
2040 'SAVE MOVE ON DISK : [P]
2050
2060 FOR L = 1 TO NOCON : WRITE #1,JPOS(L) : NEXT L
2061 WRITE#1 ,BLOCK:BLOCK=BLOCK +1
2065 JPOS(2)=0
2070 FOR L = 3 TO NCON
2080 JPOS(L) = 0
2090 LOCATE 17,11*L-25 : PRINT " "
2100 LOCATE 17,11*L-28 : PRINT IPOS(L)
2110 NEXT L
2120 RETURN
2130
2140 'CLOSE FILE : [0]
2150
2160 CLOSE#1
2170 CLS
2180 K$ = INKEY$
2190 PRINT "THE FILE";MFILE$ : "HAS BEEN CREATED"
2200 PRINT
2210 PRINT "[1] = CREATE ANOTHER MOVE FILE"
2220 PRINT "[2] = RETURN TO THE TEST PROGRAM"
2240 PRINT
2250 PRINT "PLEASE SELECT ONE OF THE ABOVE"
2260 PRINT
2270 K$ = INKEY$ : IF K$ = " " THEN 2270
2280
2290 IF K$ = "1" THEN 1310
2300 PRINT CHR$(27) ; "Y"; "<" 'ENABLE KEYBOARD AUTO
      REPEAT
2310 IF K$ = "2" THEN CHAIN "TEST"
2330 GOTO 2270
2340
2350 CHANGE THE SENSITIVITY OF THE KEYS : [I]
2360
2370 FOR L = 1 TO 4
2380 X = STEPS(L)
2390 STEP(L) = STEPS (L+4)
2400 STEPS (L+4) = X
2410 FOR K = 1 TO NAXIS
2420 LOCATE 1+3*L,11*K-4
2430 PRINT ABS(STEPS(L))
2440 NEXT K
2450 NEXT L
2460 RETURN

```

```

2470
2480 'GRIPPER RESET ROUTINE
2490 PORT = &H3F8
2500 LPRINT "A126"
2510 FOR I= 1 TO 10 :I=I+1 : NEXT
2520 LPRINT "A?"
2530 X1=INP(PORT)-32
2540 2550 FOR I= 1 TO 10 : I-I+1 : NEXT
2550 LPRINT "A?"
2560 X1=INP(PORT)-32
2570 IF X1<>X2 THEN GOTO 2520
2580 LPRINT "AX"
2590 LPRINT "A-60"
2591 FLAG1=0
2592 JPOS(2)=3
2595 RETURN
2600 'GRIP ROUTINE
2601 IF FLAG1=1 THEN GOTO 2720
2610 PORT = &H3F8
2620 LPRINT "A126"
2630 FOR I= 1 TO 50 : I=I+1 : NEXT
2640 LPRINT "A?"
2650 X1=INP(PORT)-32
2660 FOR I= 1 TO 50 : I=I+1 : NEXT
2670 LPRINT "A?"
2680 X2= INP(PORT)-32
2690 IF X1 <> X2 THEN GOTO 2640
2700 LPRINT "AX"
2705 FOR I= 1 TO 50 :I=I+1 : NEXT
2710 LPRINT "A-2"
2711 FLAG1=1
2712 JPOS(2)=1
2720 RETURN
2721 LPRINT "A-20"
2722 FLAG1=0
2723 JPOS(2)=2
2724 RETURN
2725 END

```

9.6.4. ПРОГРАММА PLAY BACK A MOVE FILE (ИСПОЛНЕНИЕ ФАЙЛА ДВИЖЕНИЯ)

Эта программа позволяет любым способом воспроизвести файл движения, который был уже получен в результате обучения робота при использовании конвейерной ленты.

```

10 PROGRAM PMOVE(PLAY BACK A MOVE FILE)
20
30 PURPOSE=PLAYBACK A MOVE FILE
40
50 DEFINT A-Z
60 DIM IPOS(8),MOVES(100,9),DMAP(8),JPOS(8)
61 DIM MK$(8)
70
80 DATA 1,1,-1,-1,1,1,-1,-1
90
91 FLAG1=0 'SET GRIPPER IN OPEN STATUS
100 NCON = 8
110 NAXIS = 6
120 ISTEP = 40
130 PORT = &H3F8
131 MK$(1) = "CCW CW"
132 MK$(2) = "DOWNUP"
133 MK$(3) = "DOWNUP"
134 MK$(4) = "DOWNUP"
135 MK$(5) = "CCW CW"
136 MK$(6) = "LEFTRIGHT"
140
150 FOR I = 1 TO NCON : READ DMAP(I) : NEXT I
170
180 MR$="HAFEDCBG"
190
200 CLS
210 PRINT "PROGRAM PHU:"
220 PRINT
230 INPUT "ENTER FILENAME";MFILE$
240 OPEN "I",1,MFILE$
250
260 I = 1
270 IF EOF(1) THEN 310
280 FOR J = 1 TO NCON+1:INPUT#1, MOVES(I,J): NEXT J
290 I = I + 1
300 GOTO 270
310 IROW = I - 1
320
330 K$ = INKEY$ 'CLEAR KEYBOARD
340 CLS 'CLEAR SCREEN
350 PRINT
360 PRINT "PROGRAM PMOVE:"
370 PRINT
380 PRINT " [1] = PLAY MOVE FILE FORWARD"
390 PRINT " [2] = PLAY MOVE FILE REVERSE"
400 PRINT " [3] = CYCLE THROUGH MOVE FILE"

```

```

410 PRINT "      [4] = RETURN TO THE TEST PROGRAM"
420 PRINT "      [5] = EXIT"
430 PRINT
440 PRINT "PLEASE SELECT ONE OF THE ABOVE"
450 PRINT
451 PRINT "                BLOCK #"
452 PRINT "
453 PRINT "-----"
454 PRINT ":  BASE  : SHOULDER : ELBOW  : PITCH  : ROLL   : CONVEYER : "
455 PRINT "-----"
456 PRINT ":  CW    : UP      : UP     : UP     : CW     : RIGHT  : "
457 PRINT "-----"
458 PRINT ":  CCW   : DOWN   : DOWN   : DOWN   : CCW    : LEFT   : "
459 PRINT "-----"
460 PRINT ":      :      :      :      :      :      : "
461 PRINT "-----"
462 PRINT ":      :      :      :      :      :      : "
463 PRINT "-----"
474 K$=INKEY$ : IF K$ = " " THEN 474
475 FLAG0=1 'SET FORWARD MOTION STATUS
476 IR1 = 1 : IR2 = IROW : IR3 = 1
480 IF K$ = "1" OR K$ = "3" THEN GOSUB 550
490 IR1 = IROW : IR2 = 1 : IR3 = -1 : FLAG0 = -1
500 IF K$ = "2" THEN GOSUB 550
510 IF K$ = "4" THEN CHAIN "TEST"
520 IF K$ = "5" THEN END
530
540 GOTO 474
550
560 PLAYBACK THE MOVE FILE
570
580 FOR I = IR1 TO IR2 STEP IR3
620 FOR J = 3 TO NCON
621 LOCATE 12,36 : PRINT MOVES(I,9)
630 M$ = MID$(MR$,J,1)
640 IMOVE = MOVES(I,J)*FLAG0
641 JPOS(J)=IMOVE : TSGN=SGN(IMOVE)
642 IF TSGN = 0 THEN GOTO 770
643 COLOR 0,7,5
644 H$=MID$(MK$(J-2), TSGN*2+3,4)
645 LOCATE -TSGN +17,11*J-28 :PRINT USING "&"; H$
650 SIZE = ABS(IMOVE)
660 SIGN = DMAP(J)*SGN(IMOVE)
670 LPRINT M$ + "?"
680 IF INP(PORT) - 32 > ISTEP THEN 670
690 IF SIZE < ISTEP THEN 730
700 LPRINT M$ + STR$(SIGN*ISTEP)
710 SIZE = SIZE - ISTEP

```

```

711 IPOS(J)=IPOS(J)+SIGN*ISTEP*DMAP(J)
712 JPOS(J)=JPOS(J)-SIGN*ISTEP*DMAP(J)
713 COLOR 7,0,5
714 LOCATE 20,11*J-28 : PRINT JPOS(J)
715 LOCATE 22,11*J-28 : PRINT IPOS(J)
720 GOTO 670
730 LPRINT M$ + STR$(SIGN*SIZE)
740 LPRINT M$ + "?"
750 IF INP(PORT) - 32 > 0 THEN 740
751 COLOR 7,0,5
752 LOCATE -TSGN + 17,11*J-28 : PRINT USING "&"; H$
753 IPOS(J)=IPOS(J)+SIGN*SIZE*DMAP(J)
754 JPOS(J)=JPOS(J)-SIGN*SIZE*DMAP(J)
755 LOCATE 20,11*J-28 : PRINT JPOS(J)
756 LOCATE 22,11*J-28 : PRINT IPOS(J)
770 Q$ = INKEY$
780 IF K$ = "3" AND Q$ <> " " THEN RETURN
790 NEXT J
791 IF MOVES(I,2) = 1 THEN GOSUB 990
792 IF MOVES(I,2) = 2 THEN GOSUB 1110
793 IF MOVES(I,2) = 3 THEN GOSUB 880
794 FOR K=1 TO 40 : K=K+1 : NEXT
800 NEXT I
810 IF K$ = "1" OR K$ = "2" THEN RETURN
820 IR3 = -IR3 : FLAG0 = -FLAG0
830 IF IR3 > 0 THEN IR1 = 1 ELSE IR1 = IROW
840 IF IR3 < 0 THEN IR2 = IROW ELSE IR2 = 1
850 GOTO 580
860
870 'GRIP RESET ROUTINE
880 LPRINT "A126"
890 FOR K=1 TO 10 : K=K+1 : NEXT
900 LPRINT "A?"
910 X1= INP(PORT)-32
920 FOR K= 1 TO 10 : K=K+1 : NEXT
930 PRINT "A?"
940 X2= INP(PORT)-32
950 IF X1 <> X2 THEN GOTO 900
960 LPRINT "AX"
970 LPRINT "A-65"
971 FLAG1=0
980 RETURN
990 'GRIP ROUTINE
991 IF FLAG1=1 THEN GOTO 1100
1000 LPRINT "A126"
1010 FOR K=1 TO 10 : K=K+1 : NEXT

```

```

1020 LPRINT "A?"
1030 X1= INP(PORT)-32
1040 FOR K=1 TO 10: K=K+1 :NEXT
1050 LPRINT "A?"
1060 X2= INP(PORT)-32
1070 IF X1<> X2 THEN GOTO 1020
1080 LPRINT "AX"
1090 LPRINT "A-2"
1091 FLAG1=1
1100 RETURN
1110 'RELEASE ROUTINE
1120 LPRINT "A-20"
1121 FLAG1=0
1130 RETURN
1140 END

```

9.6.5. ПРОГРАММА EDIT A MOVE FILE (ИСПОЛНЕНИЕ ФАЙЛА ДВИЖЕНИЯ)

Эта программа позволяет пользователю полностью отредактировать файл движения робота, который был получен в процессе обучения робота и затем сохранен. Для этого пользователю предоставляется возможность перемещения маркера вперед, назад, вставки и замены шагов.

```

100 PROGRAM EMOVE(Edit A Move File)
110
120 PURPOSE-EDIT A MOVE FILE
130
140 DIM IPOS(8),MOVES(100,8),NMOVES(100,8),DMPA(8)
150 DIM JPOS(8),MK$(4),STEPS(8)
160
170 DATA 1,1,-1,-1,1,1,1,1
180 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0
190 DATA 10,1,-1,-10,10,10,-10,-100
200
210
220 NCON = 8
230 NAXIS = 6
240 2ISTEP = 30
250 PORT = &H3F8
260 FOR I = 1 TO NCON
270 MOVES(0,I) = IPOS(I)
280 NMOVES(0,I) = IPOS(I)
290 NEXT I
300
310 FOR I = 1 TO NCON : READ DMPA(I) : NEXT I

```

```

320 FOR I = 1 TO NCON : READ JPOS(I) : NEXT I
330 FOR I = 1 TO 8 : READ STEPS(I) : NEXT I
340
350 MR$ = "HGFEDCBA"
360 MK$(1) = "78123456"
370 MK$(2) = "UIQWERTY"
380 MK$(3) = "JKASDFGH"
390 MK$(4) = "M,ZXCVBN"
400
410 CLS
420 PRINT "PROGRAM EMOVE:"
430 PRINT
440 INPUT "ENTER FILENAME";MFILE$
450 OPEN "I",1,MFILE$
460
470 I = 1
480 IF EOF(1) THEN 550
490 FOR J = 1 TO NCON
500 INPUT#1, MOVES(I,J)
510 NMOVES(I,J) = MOVES(I,J)
520 NEXT J
530 I = I + 1
540 GOTO 480
550 IROW = I - 1
560 NROW = IROW
570 IR = 0
580
590 K$ = INKEY $ 'CLEAR KEYBOARD
600 CLS 'CLEAR SCREEN
610 PRINT
620 PRINT "PROGRAM EMOVE:"
630 PRINT
640 PRINT " [1] = SINGLE STEP FORWARD"
650 PRINT " [2] = SINGLE STEP REVERSE"
660 PRINT " [3] = INSERT STEPS"
670 PRINT " [4] = REPLACE STEPS"
680 PRINT " [5] = END THE FILE"
700 PRINT
710 PRINT "PLEASE SELECT ONE OF THE ABOVE"
720 PRINT
730 K$ = INKEY$ : IF K$ = " " THEN 730
740 IF K$ = "1" THEN INC = 1
750 IF K$ = "2" THEN INC = -1
760 IF K$ = "3" THEN INC = 0
770 IF K$ = "4" THEN INC = 1
780 IF K$ = "5" THEN GOTO 1940

```

```

790 IF K$ = "6" THEN GOTO 1940
800 IR = IR + INC
810 IF IR < 0 OR IR > IROW THEN 730
820 IF K$ = "1" OR K$ = "2" THEN GOSUB 850
830 IF K$ = "3" OR K$ = "4" THEN GOSUB 1040
840 GOTO 600
850
860 'PLAYBACK A MOVE FROM THE FILE
870
880 FOR J = 3 TO NCON
890 M$ = MID$(MR$,J,1)
900 IMOVE = MOVES(IR,J) - IPOS(J)
910 SIZE = ABS(IMOVE)
920 SIGN = DMAP(J)*SGN(IMOVE)
930 LPRINT M$ + "?"
940 X = ABS((INP(PORT) AND 127) - 32)
950 IF X > ISTEP THEN 930
960 IF SIZE < ISTEP THEN 1000
970 LPRINT M$ + STR$(SIGN*ISTEP)
980 SIZE = SIZE - ISTEP
990 GOTO 930
1000 LPRINT M$ + STR$(SIGN*SIZE)
1010 IPOS(J) = IPOS(J) + IMOVE
1020 NEXT J
1030 RETURN
1040
1050 'INSERT OR REPLACE MOVES
1060
1070 K$ = INKEY$ 'CLEAR KEYBOARD
1080 CLS 'CLEAR SCREEN
1090

```

```

1100 PRINT "-----"
1110 PRINT " : BASE : SHOULDER : ELBOW : PITCH : ROLL : CONVEYER : "
1120 PRINT "-----"
1130 PRINT " : [1] : [2] : [3] : [4] : [5] : [6] : "
1140 PRINT " : CW 10 : UP 10 : UP 10 : UP 10 : CW 10 : IN 10 : "
1150 PRINT "-----"
1160 PRINT " : [Q] : [W] : [E] : [R] : [T] : [Y] : "
1170 PRINT " : CW 1 : UP 1 : UP 1 : UP 1 : CW 1 : IN 1 : "
1180 PRINT "-----"
1190 PRINT " : [A] : [S] : [D] : [F] : [G] : [H] : "
1200 PRINT " : CCW 1 : DOWN 1 : DOWN 1 : DOWN 1 : CCW 1 : OUT 1 : "
1210 PRINT "-----"
1220 PRINT " : [Z] : [X] : [C] : [V] : [B] : [N] : "
1230 PRINT " : CCW 10 : DOWN 10 : DOWN 10 : DOWN 10 : CCW 10 : OUT 10 : "
1240 PRINT "-----"
1250 PRINT " : : : : : : "
1260 PRINT "-----"
1270 PRINT " : : : : : : "
1280 PRINT "-----"

```

```

1300 PRINT "[L] TOGGLES THE SENSITIVITY"
1310 PRINT "[P] STORES EACH MOVE"
1320 PRINT "[O] RETURNS TO PLAYBACK MODE"
1330
1340 FOR I = 3 TO NCON
1350 LOCATE 18,11*I-25 : PRINT " "
1360 LOCATE 18,11*I-28 : PRINT IPOS(I)
1370 NEXT I
1380
1390 FOR I = 3 TO NCON
1400 LOCATE 16,11*I-25 : PRINT " "
1410 LOCATE 16, 11*I-28 : PRINT JPOS(I)
1420 NEXT I
1430
1440 K$ = INKEY$ : IF K$ = " " THEN 1440
1450 IF K$ = "L" THEN GOSUB 2210 : GOTO 1440
1460 IF K$ = "P" THEN GOSUB 1750 : RETURN
1470 IF K$ = "O" THEN RETURN
1480 '
1490 FOR I = 3 TO NCON
1500 FOR J = 1 TO 4
1510 IF K$ = MID$(MK$(J),I,1) THEN 1560
1520 NEXT J
1530 NEXT I
1540 GOTO 1440
1550 '
1560 GOSUB 1580 'MOVE MOTOR
1570 GOTO 1390
1580 '
1590 'MOVE MOTOR STEPS(J) HOLES
1600 '
1610 SIZE = ABS(STEPS(J))
1630 M$ = MID$(MR$,I,1)
1640 LPRINT M$ + "?"
1650 X = ABS((INP(PORT) AND 127) - 32)
1660 IF X > ISTEP THEN 1640
1670 IF SIZE < ISTEP THEN 1710
1680 LPRINT M$ + STR$(SIGN*ISTEP)
1690 SIZE = SIZE - ISTEP
1700 GOTO 1640
1710 LPRINT M$ + STR$(SIGN*SIZE)
1720 IPOS(I) = IPOS(I) + STEPS(J)
1730 JPOS(I) = JPOS(I) + STEPS(J)
1740 RETURN
1750 '
1760 'SAVE NEW MOVE

```

```

1770 '
1780 FOR L = 1 TO NCON
1790   NMOVES(IR,L) = IPOS(L)
1800 NEXT L
1810 IF INC = 1 THEN 1880
1820 FOR L = IR TO IROW
1830   FOR M = 1 TO NCON
1840     NMOVES(L-1,M) = MOVES(L,M)
1850   NEXT M
1860 NEXT L
1870 NROW = NROW + 1
1880 FOR L = 3 TO NCON
1890   JPOS(L) = 0
1900   LOCATE 18,11*L-25 : PRINT " "
1910   LOCATE 18,11*L-28 : PRINT IPOS(L)
1920 NEXT L
1930 RETURN
1940 '
1950 CLOSE FILE
1960 '
1970 CLOSE#1
1980 OPEN "O",1,MFILE$
1990 FOR I = 1 TO NROW
2000   FOR J = 1 TO NCON
2010     WRITE#1,NMOVES(I,J)
2020   NEXT J
2030 NEXT I
2040 CLOSE#1
2050 CLS
2060 K$ = INKEY$
2070 PRINT "THE FILE";MFILE$;"HAS BEEN UPDATED"
2080 PRINT
2090 PRINT "      [1] = EDIT ANOTHER MOVE FILE"
2100 PRINT "      [2] = RETURN TO THE TEACH PROGRAM"
2110 PRINT "      [3] = EXIT"
2120 PRINT
2130 PRINT "PLEASE SELECT ONE OF THE ABOVE"
2140 PRINT
2150 '$ = INKEY$ : IF K$ = " " THEN 2150
2160
2170 'F K$ = "1" THEN 410
2180 'F K$ = "2" THEN CHAIN "TEST"
2190 'F K$ = "3" THEN END
2200 CHAIN "TEACH"
2210 '

```

```

2220 CHANGE THE SENSITIVITY OF THE KEYS : [I]FOR L = 1
      TO 4
2230 '
2240 FOR L = 1 TO 4
2250   X = STEPS(L)
2260   STEPS(L) = STEPS(L+4)
2270   STEPS(L+4) = X
2280   FOR K = 1 TO NAXIS
2290     LOCATE 2+3*L,11*K-4
2300     PRINT ABS(STEPS(L))
2310   NEXT K
2320 NEXT L
2330 RETURN
2340 '
2350 END

```

9.6.6. ПРОГРАММА INVERSE KINEMATICS (ОБРАТНАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА)

Эта программа требует, чтобы пользователь задал положение и ориентацию руки робота. Затем находится вектор углов сочленений, необходимых для достижения заданного кинематического положения, и реализуются движения сочленений, необходимые для перемещения руки робота в желаемые позицию и ориентацию.

```

10 PROGRAM INVERSE KINEMATICS
15
20 MOHSEN SHAHINPOOR
25
30 PURPOSE-IMPLEMENT THE INVERSE KINEMATICS EQUATIONS
40
50 DIM T(4,4),CMAP(8),RES(8),W(5),PHI(8),D(5),A(5)
60 DIM HOLES(5),SIGN(5),MOT$(5)
70
80 DATA 45,&H3F8,"HGFEDCBA"
90 DATA 1.570797,57.29578
100 DATA 9.75,0,0,0,7.125
110 DATA 0,9,9,9.375,0.0
120 DATA 1,1,1,1,-1,-1,-1,1
130 DATA 1.0,1.0,0.1374,0.1145,0.1145,0.0793,0.2406,1.0
140 DATA 0.0,0.0,0.0,-90.0,90.0,-90.0,0.0,0.0
150 '
160 READ ISTEP, PORT,MR$
170 READ P2,RAD
180 FOR I = 1 TO 5: READ D(I) : NEXT I
190 FOR I = 1 TO 5: READ A(I) : NEXT I

```


ЛИТЕРАТУРА

1. Craig J. J., JARS: JPL Autonomous Robot System, Robotics and the Operators Group, JPL, Pasadena, CA, 1980.
2. Darringer J. A., Blasgen M. W., Maple: A High Level Language for Research in Mechanical Assembly, IWM Thomas J. Watson Research Center, Tech. Rept. RC 5606 (Sept.), 1975.
3. Ernst H. A., A Computer-Controlled Mechanical Hand, Sc. D. thesis, M. I. T., Cambridge, MA, 1981.
4. Evans R. C., Garnett D. C., Grossman D. D., Software System for a Computer-Controlled Manipulator, IBM Thomas J. Watson Research Center, Tech. Rept. RC 6210 (May), 1976.
5. Falek D., Parent M., An Evolutionary Language for an Intelligent Robot, *Indus. Robots*, 7, 168—171, 1980.
6. Finkel R., Taylor R., Bolles R., Paul R. P., Feldman A., AL Programming System for Automation Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Rept. AIM-177 (Nov.), 1974.
7. Franklin J. W., Vanderberg G. J., Programming Vision and Robotics Systems with RAIL, *SME Robots*, VI, 392—406, 1982.
8. General Electric, A12 Assembly Robot Maintenance and Installation Manual, #P50VE005 (Dec.), General Electric Co., Orlando, FL, 1981.
9. General Electric, Allegro Operator's Manual (A12 Assembly Robot), #P50VE025 (Feb.), General Electric Co., Orlando, FL, 1982.
10. General Electric, GE Allegro Documentation, Tech. Rept., 1982.
11. Gilbert A., et al., AR-BASIC: An Advanced and User Friendly Programming System for Robots, American Robot Corp., Clinton, PA (June), 1984.
12. Gini G., Gini M., Gini R., Gruse D., Introducing Software Systems in Industrial Robots, Proceedings of the 9th International Symposium on Industrial Robots, Washington, DC, Mar., pp. 309—321, 1979.
13. Grossman D.D., Robotic Software, *Mech. Eng.*, 104(8), 46—47, 1982.
14. Gruver W. A., Soroka B. I., Craig J. J., Turner T., Industrial Robot Programming Languages: A Comparative Evaluation, *IEEE Trans. Syst. Man Cybernet.*, SMC-14(4), 565—570, 1984.
15. IBM Corporation, IBM Robot System/1-AML, Reference Manual, SC34-0410-1 (Sept. 1981); IBM Robot System/1: AML, Concepts and User's Guide, 1st ed, SC34-0411-0 (Sept. 1981); IBM Robot System/1: General Information Manual and User's Guide, 3rd ed., 0180-2 (Mar. 1982); IBM Corporation, Boca Raton, FL.
16. Intellex, Model 605 Operator's Manual, Section 3, Intellex Inc., Corvallis, OR, 1983.
17. Latombe J. C., Mazer E., LM: A High-Level Language for Controlling Assembly Robots, Proceedings of the 11th International Symposium on Industrial Robots, Tokyo, Japan, Oct., 1981.
18. Lozano-Perez T., Robot Programming, *Proc. IEEE*, 71(7), 821—841, 1983.
19. McDonnell-Douglas, Robotic System for Aerospace Batch Manufacturing, Task B—High Level Language User Manual, Wright Patterson Air Force Base, OH, Tech. Rept. AFML-JR-79-4202 (Oct.), 1981.
20. Mujtaba S., Goldman R., AL User's Manual, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Rept. AIM-323 (Jan.), 1979.
21. Park W. T., How to Generate a New Version of the SRI Robot Programming System (RPS). SRI International, Menlo Park, CA, Aug. 6, 1979.
22. Park W. T., The SRI Robot Programming System (RPS) — An Executive Summary, SRI International, Menlo Park, CA, Mar. 29, 1981.
23. Paul R. P., WAVE: A Model-Based Language for Manipulator Control, *Indust. Robot*, 4(1), 10—17, 1977.

```

1140 PRINT " "
1150 PRINT "          THE JOINT ANGLES:"
1160 PRINT
1170 PRINT "    BASE          = " ; W(1)*RAD , "degrees"
1180 PRINT "    SHOULDER     = " ; W(2)*RAD , "degrees"
1190 PRINT "    ELBOW        = " ; W(3)*RAD , "degrees"
1200 PRINT "    WRIST PITCH  = " ; W(4)*RAD , "degrees"
1210 PRINT "    WRIST ROLL   = " ; W(5)*RAD , "degrees"
1220 '
1230 '
1240 'EXECUTE MOVE BY USE OF THESE EQUATIONS
1250 '
1260 FOR I = 1 TO 5
1270 PSI(I) = RAD*W(I) - PHI(I+2)
1280 HOLES(I) = ABS(FIX(PSI(I)/RES(I+2)))
1290 SIGN(I) = SGN(CMAP(I+2)*PSI(I))
1300 MOT$(I) = MID$(MR$,I+2,1)
1310 NEXT I
1320 FOR I = 1 TO 5
1330 IF HOLES(I) = 0 THEN 1380
1340 IF HOLES(I) < ISTEP THEN QSTEP = HOLES(I) ELSE
    QSTEP = ISTEP
1350 LPRINT MOT$(I) + "?" : IF INP(PORT) - 32 > ISTEP
    THEN 1350
1360 LPRINT MOT$(I) + STR$(SIGN(I)*QSTEP)
1370 HOLES(I) = HOLES(I) - QSTEP
1380 NEXT I
1390 FOR I = 1 TO 5
1400 IF HOLES(I) > 0 THEN 1320
1410 NEXT I
1420 FOR I = 1 TO 5
1430 PHI(I+2) = PHI(I+2) + PSI(I)
1440 NEXT I
1450 '
1460 LOCATE 20,1 : PRINT "Press ~ to RESET"
1465 PRINT "PRESS : Y TO MAKE ANOTHER MOVE"
1470 K$ = INKEY$ : IF K$ = " " THEN 1470
1475 IF K$ = "~" THEN 1485
1480 IF K$ = "Y" THEN 240
1485 W(1) = 0: W(2) = -90/RAD : W(3) = 90/RAD : W(4) =
    -90/RAD: W(5) = 0
1490 CLS
1500 GOTO 1110
1510
1520 END

```

24. Ruoff C. F., TEACH-A Concurrent Robot Control Language, Proceedings of the IEEE COMPSAC, Chicago, IL, Nov., pp. 422—445, 1979.
25. Ruoff C. F., An Advanced Multitasking Robot System, *Indus. Robot*, 7(1), 26—32, June, 1980.
26. Salmon M., SIGLA: The Olivetti SIGMA Robot Programming Language, Proceedings of the 8th International Symposium on Industrial Robots, Stuttgart, West Germany, June, 1981.
27. Shimano W., VAL: An Industrial Robot Programming and Control System, Progress IRIA Seminar on Languages and Methods of Programming Industrial Robots, Roquencourt, France, pp. 47—59, 1979.
28. Silver D., The Littler Robot System, M. I. T. Artificial Intelligence Lab., Rept. AIM237, Jan., 1973.
29. Takase K., Paul R. P., Berg E. J., A Structured Approach to Robot Programming and Teaching, in Proceedings of the IEEE COMPSAC, Chicago, IL, Nov., 1979.
30. Taylor R. H., Summers P. D., Meyer J. M., AML: A Manufacturing Language, *Robotics Res.*, 1(3), 31—38, 1982.
31. Unimation Inc., User's Guide to VAL: A Robot Programming and Control System, Version 12, Unimation Int., Danbury, CT, June, 1980.
32. Unimation Inc., User's Guide to VAL-II, Part 1: Control from the System Terminal, Version X2; Part 2: Communications with the Supervisory System, Version X2; Part 3: Real-Time Path Control, Version X2, Unimation Inc., Danbury, CT, Apr., 1983.
33. Will P. M., Grossman D. D., An Experimental System for Computer Controlled Mechanical Assembly, *IEEE Trans. Comput.* C-24(9), 879—888, 1975.

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Напишите программу DANCE на языке BASIC для робота, командой движения для которого является LPRINT и у которого приводы обозначаются как A, B, C, D, E и F. Заметим, что LPRINT «A50» означает, что привод A повернется на 50 градусов.

2. Напишите программу для Rhino XR-2, чтобы он мог танцевать под музыку типа вальса.

3. Опишите завязывание узла простыми командами и используйте созданную систему команд в качестве основы для программного обеспечения робота.

4. Напишите программу на языке BASIC для Rhino XR-2 такую, чтобы робот писал печатными буквами любое требуемое предложение на горизонтальной плоскости.

5. Напишите программу на языке BASIC для Rhino XR-2, чтобы он выкладывал любое слово перед собой из объемных печатных букв, беря буквы из двух желобов.

6. Разработайте необходимое программное и аппаратное обеспечение для двух роботов Rhino XR-2, выполняющих сборочную задачу, взаимодействуя друг с другом.

7. Напишите программу для Rhino XR-2, укладывающего столбиком блоки с разноцветными боковыми гранями так,

чтобы ни один цвет не повторялся по вертикали (задача с «мгновенным помешательством!»).

8. Напишите программу на языке C для решения обратной кинематической задачи Rhino XR-2.

9. Разработайте необходимое программное и аппаратное обеспечение для схвата робота Rhino XR-2, чтобы он мог чувствовать жесткость предмета и передавать информацию ЭВМ верхнего уровня.

10. Напишите программу на AML для манипуляционного робота IBM 7565, чтобы он мог брать печатные буквы из двух желобов и выкладывать вдоль прямой заданное предложение.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоматизированная сборка 415
 Автоматизированное производство 74, 472
 Адьюнкт А 82
 Активные датчики 463
 — связи управления 262
 Алгоритм пропорционального управления 357
 А-матрица 100
 Амплитудно-моделированная интенсивность 438, 463
 Аналоговый датчик касания 444
 — электрический сигнал 478
 Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) 34, 52, 358, 359, 367, 444
 Асинхронный последовательный интерфейс RS-232 494

 Базовая система координат 74, 78, 111, 336
 Барьер 431
 Белградский протез 21
 Булевы операции 490
 Буферная память 436, 445

 Вектор 77
 — возмущающего момента 371
 — дифференциального перемещения 179
 — — переноса 183
 — — поворота 180, 183
 — единичный 79, 91
 — момента количества движения 305
 — нормалей 76, 100, 401
 — однородный 83, 84
 — ориентации 76, 100, 401
 — относительной скорости 304
 — полярного момента 459
 — положения 77, 89
 — — узла схвата 159
 — — центра масс 305
 — скорости 175
 — углов 89
 — управления моментом 371
 — ускорения 175, 304
 Векторная алгебра 77
 Вероятность столкновения 57
 Взаимно-корреляционная мера 454
 Видиконовая трубка 438, 440
 Визуальная обработка данных 447
 Виртуальная работа 409
 Вращение 53, 74, 86, 90, 165
 — сложное 94, 106
 Время просчета траекторий 219
 Выделение изображения 453, 459
 — края 451

 Гиратор 264, 265, 366
 Гироскоп 264
 Гравитационная нагрузка 37
 Гравитационный возмущающий момент 375
 Границы рабочего пространства 196, 211
 Граф преобразования 187

 Дальномер 474, 480
 Датчик визуальной информации 24
 — внешний 431
 — внутренний 431
 — давления 14
 — дальности 26
 — деформации 24
 — импульсный 51, 90
 — локационный 472
 — магнитоэластичный 472

- многокомпонентный 384
 — моментов 384, 431, 468
 — положения 27
 — пьезоэлектрический 471
 — робототехнический 463
 — сил 384, 431, 468, 478
 — тактильный 476
 — температуры 432
 — усилия 24
 — химический 432
 Двухплечевой контур привода 368
 Демпфирование 342, 362, 363
 — вязкое 342
 — критическое 362
 Демпфированный отклик 372
 Деформация роботов 409
 Диссекторная видеотрубка 440, 441
 Допустимая рабочая область 205, 233
 Допустимое движение схвата 223, 232

- Задача разбора навала 446
 Закон *Кирхгофа* 287
 — кубический изменения углов 219
 — пропорционально-дифференциальный 377
 — пропорционально-интегрально-дифференциальный 380
 — «робот—поверхность» 419
 Зрительное восприятие данных 447

- Изображение бинарное 445, 448, 449, 460
 — полутоновое 445
 Иконоскоп 440
 Имитатор 482
 Индуктивность обмотки 365, 395
 Интеллектуальный сенсор 25
 Интерпретатор механической руки 485
 Информационный поток 463, 465
 «Искусственная кожа» 26
 Источник потока 266
 — усилия 267

- Калибровка телевизионной камеры 459
 Кинематика роботов 25, 73, 89
 Кинематическое положение схвата 65, 74, 215
 Кинетическая энергия системы 312
 — — Т-манипулятора 319

Предметный указатель

- Кодовый преобразователь 359, 364
 Компенсация ускорения 392
 Контакты линейные 108
 — точечные 108
 Координируемое движение 387
 Коэффициент гириации 366
 — демпфирования 295, 361, 372
 — жесткости 295, 419, 420
 — масштабирования 83
 — передачи двигателя 367
 — — усилителя 395
 — противо-з. д. с. 395
 — трения 363, 365, 424
 Критерий заклинивания *Симуновича* 422, 425
 — устойчивости *Рауса* 382

ЛИСП-система 485

- Манипулятор многозвенный 43
 — шестистепенной 122
 — PUMA 600 131, 160
 Масштабирование 86, 457
 Матрица вращения 76, 86, 90, 96
 — *Денавита—Хартенберга* 113
 — емкостная 477
 — общего положения 175
 — регулирования 384
 — резисторная 477
 — *Якоби* 193
 Матричная алгебра 77
 Метод вычисления момента 378
 — *Лагранжа—Эйлера* 299, 300, 312
 — пороговой сегментации изображения 452
 — проектирования траекторий 217
 — связанных графов 262, 274, 288, 350
 — синтеза оптимальных траекторий 28
 Микровыключатель 431, 476
 Минимальная подсистема 357
 Момент 334
 — *Д'Аламбера* 341, 406
 Моменты роботов 396
 — эквивалентные в сочленениях 406
 Мостовая схема 368
 Мультипроцессорная обработка информации 25, 26

- Напряжение аналоговое 444
 Непрерывность по скорости 225, 226
 — — ускорению 225, 226
 Несбалансированность 374

Предметный указатель

- Обработка изображения 444
 — — бинарная 445
 — — градационная 445
 Обратная задача кинематики 75, 76, 89, 134
 — — статики 407
 Обратная связь по силе 13, 26, 28, 383
 — — — положению 26, 51
 Обратные итерации 346
 Обучение робота ведением 55, 482
 — — ручное 482
 — — сопровождением 482
 Общие узлы потока 265
 — — усилий 265
 Одноходовые элементы мощности 263
 — — сопротивления 263
 — — инерционные элементы 263
 Оператор вращения 197
 Операция сборки 60
 Опорная поверхность 223
 Оптический датчик 472
 — кодировщик 359
 Ориентация схвата 73, 76, 86, 100
 Ортиконовая трубка 438, 439
 Отклик системы 362
 Открытая кинематическая цепь 357
 Отслеживание объекта 186
 0-узлы 265, 287
 Оценка поворота изображения 458
 Ошибка квантования 367
 — механическая 416
 — позирования 39
 — пространственная 57
 — размерная 56
 — слежения 386
 Пассивные датчики 463
 ПД-регулятор 371, 378
 Перенос 74, 86, 105
 Перспективные проекции 86, 98
 ПЗС-камера 442
 ПИД-закон 379, 380
 — регулятор 381, 384
 — управление 380, 383
 Планирование траекторий 223
 Плоскость 84
 — однородная 84
 Плюмбиконовая трубка 440
 Повторяемость 52, 55
 Податливая рука 385
 Податливое окружение 385
 Податливость 385, 414—418
 — механическая 416
 Подгонка по шаблону 450
 Позицирование схвата 96
 Положение схвата 73, 76, 86
 Постоянная момента двигателя 366
 Потенциальная энергия V манипулятора 320
 Пределы досягаемости схвата 207
 Предметная библиотека 453, 456
 Преобразование вращательное 94
 — вращения—качания 102, 134, 139
 — — переноса 105
 — Денавита—Хартенберга 100, 191, 312
 камеры 459
 — Лапласа 359, 374
 — моментов 400
 — однородное 86, 103, 175
 — перспективное 86, 104, 455
 — С 78
 — скоростей 175, 301
 — ускорений 175, 301
 — Эйлера 101
 Преобразователь 264
 — давления 384
 — модулированный 271
 Прибор с зарядовой связью (ПЗС) 442
 — — — инъекцией (ПЗИ) 442
 — — — передачей заряда (ППЗ) 442
 Привод 74
 — гидравлический 50
 — линейного перемещения 50
 — модульный 45
 — пневматический 47, 50, 74
 — поводковый 49
 — электромеханический 51
 Принцип виртуальной работы 409
 — Гамильтона 311
 — Д'Аламбера 340, 409
 — силового очувствления 14
 — триангуляции 474
 — цифрового управления 14
 Причинность 287
 — интегральная 267
 — одновходовая 267
 Программирование «он-лайн» 481
 Программное обеспечение 481
 — — EMITU 59, 60
 — — MAPLE 492
 — — ML 59, 60
 Проектирование траекторий 217
 Пространственное кольцо 197
 Пространство рабочее 35, 196, 198, 205
 — схвата 175
 Противо-э. д. с. 366

Предметный указатель

- Профиль изменения скорости 218
 — — ускорения 218
 Процесс сборки 24, 25, 370, 463
 Прямая задача кинематики 74, 76, 89, 112
 Прямые итерации 346
 Разрешающая способность 52, 56
 Разрешение пространственное 52, 54
 — угловое 56
 Распознавание изображения 453
 — объектов 447
 Растяжение 86
 Регулирование 364
 Регулятор гибридный 384, 417
 — переменной скорости 387
 — постоянной скорости 388
 — пропорционально-дифференциальный 371
 — релейный 388, 389
 — с компенсацией ускорения 376
 Редуктор 51, 365
 Рекурсивные уравнения динамики 340
 — — — Ньютона—Эйлера 344
 — — — обратные 343
 — — — прямые 343
 Робот 11
 — интеллектуальный 429
 — манипулятор 12, 13, 59, 74
 — многозвенный 39, 41
 — промышленный 12
 САПР 30
 Связный граф 271, 275, 276, 283, 290, 292
 СДТ-I 210
 СДТ-II 210
 Сегментация изображения 451
 — — пороговая 452
 Сила Д'Аламбера 333
 Силы роботов 396, 397
 — — обобщенные в схвате 396, 406
 Система второго порядка 361
 — градационная 445
 — отслеживания шва 462
 — приводов 50, 51, 74
 — тактильная 25
 — технического зрения 187, 433, 436
 — ультразвуковая 25, 33
 — управления роботом 358
 — — — замкнутая 359
 — — — разомкнутая 359
 — SRI 461
 — UNIVISION II 462
 Скважность 368
 Скорость видеосигнала 445
 — вращения 51
 — линейная 298
 — сочленений 316
 — угловая 176, 298, 337
 Собственная частота системы 361
 Собственные колебания 374
 Согласователь 466—468
 Состояние покоя 220
 Сочленения «высшая пара» 108
 — «низшая пара» 108
 — поворотные 106
 — поступательные 53
 — призматические 106, 109
 Стереонализ 459
 Схват адгезионный 47
 — вакуумный 47
 — Капорали—Шахинпура 47
 — магнитный 47
 — стержневидный 47
 — Сэлисбьюри 48
 — Utah—MIT 49
 Тактили 476
 Тактовая частота 379
 Тахометр 359
 ТВ-камера 186, 432, 436, 438, 454
 Телеоператор 13, 59
 Тензор инерции 307, 410
 Тензоэлемент 384
 Теорема Ли—Янга 206
 — о параллельных осях 309
 Терминальная подсистема 357
 Тетраэдр состояний 262
 Т-матрица 100
 Траектория движения 75, 223, 232
 — перемещения 217, 218
 — типа 4—3—4 227, 233
 — — 3—5—3 232
 Триангуляция 432
 Угол качания занястья 211
 — Эйлера 89, 101, 138
 Узлы с общими усилиями 287
 — схвата 43
 Ультразвук 25
 Ультразвуковые анализаторы изображений 34
 Управление динамикой робота по ошибке 364
 — комбинированное 384
 — моментом 369
 — — податливой руки 385

Предметный указатель

- пропорциональное 364
- силовое 383, 384
- с квантованием по времени 379
- Управляемые углы 156
- Уравнение Гамильтона 311
 - динамики 291, 323, 331
- Лагранжа 273, 278, 300, 310
- Лагранжа—Эйлера 312, 315, 318, 321
- Ньютона 309
- Ньютона—Эйлера 323, 333
- Эйлера 309
- Усиление изображения 451
- Усилитель 358
 - привода 367
- Усилия контактные 414
- Устойчивость динамическая 361
- Устройство очувствления 59
 - УДП 464—467

- Функция Лангранжа 299, 300, 310, 319, 321
 - передаточная 367, 372

- ЦАП 34, 52, 358, 359, 367
- Целевая точка 57
- Центр масс звеньев 397, 398
 - податливости 418, 420, 421
 - удаленный (УЦП) 463, 464
 - тяжести изображений 449
- Цепь звеньев 74

- ЧПУ 13, 28, 30
- Шаблоны 453, 454
- Шестистепенный манипулятор 122, 135, 331
- Широтно-импульсная модуляция 368

- Эйлеровы преобразования 78, 101
 - углы 100, 102
- Эйнштейновы соглашения 80
- Экстремум траектории 225, 226
- Эксцентриситет 374
- Элементы пьезокерамические PZT 384
 - пьезоэлектрические 384
 - C, I, O, R 265—270
- Эффект задержки 379
 - памяти 49

- Язык программирования 482
 - — AL 486—488
 - — ALGOL 486
 - — AML 60, 492
 - — AML/E 490
 - — APT 60, 492
 - — AR—BASIC 494
 - — BASIC 493
 - — MINI 485
 - — ROBOT-BASIC 494
 - — VAL 489
 - — VAL II 490
 - — WAVE 485

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	6

Глава 1. Общие сведения о манипуляционных роботах 11

1.1. Введение	11
1.2. Краткая история телеоператоров и манипуляторов	13
1.3. Краткая история схватов роботов	18
1.4. Краткая история развития датчиков и систем управления роботами	24
1.5. Манипуляционные роботы с управлением от ЭВМ	32
1.6. Геометрические конфигурации роботов	35
1.7. Узлы схвата и кисти	43
1.8. Системы приводов роботов	50
1.9. Статистический анализ ошибок робота и размерных ошибок	56
1.10. Краткая история программного обеспечения роботов	59
Литература	60
Домашние задания	66

Глава 2. Кинематика манипуляционных роботов 73

2.1. Введение	73
2.2. Общее описание манипуляционных роботов	74
2.3. Краткое описание математических обозначений	77
2.4. Предварительные сведения о векторах и матрицах	78
2.5. Представление объектов с помощью однородных преобразований	83
2.6. Системы координат сочленений манипуляционного робота	100
2.7. Эйлеровы углы и преобразования	101
2.8. Преобразования вращения — качания	102
2.9. Некоторые примеры базовых однородных преобразований	103
2.10. Представление Денавита — Хартенберга	106
2.11. Прямая задача кинематики	112
2.12. Решение обратной задачи кинематики	134
2.13. Геометрический подход к обратной задаче кинематики	159
Литература	164
Домашние задания	165

Глава 3. Однородные дифференциальные преобразования в робототехнике	175
3.1. Введение	175
3.2. Якобиан преобразования	188
Литература	194
Домашние задания	194
Глава 4. Рабочее пространство робота и планирование траекторий	196
4.1. Введение	196
4.2. Общая структура рабочих пространств роботов	197
4.3. Манипуляторы с N поворотными сочленениями	200
4.4. Показатель качества рабочего пространства робота	205
4.5. Пределы досягаемости схвата	207
4.6. Описание робототехнической задачи (манипулирование робот — объект)	215
4.7. Проектирование траекторий перемещения роботов	217
4.8. Общие аспекты планирования траекторий	223
4.9. Допустимые траектории движения	232
Приложение А: Процедура обращения матриц	233
Приложение Б: Техника обращения матриц	252
Приложение В: Программа для ЭВМ	255
Литература	258
Домашние задания	258
Глава 5. Динамика манипуляционных роботов	260
5.1. Введение	260
5.2. Представление манипуляционных роботов методом связанных графов	262
5.3. Более сложные манипуляторы	280
5.4. Некоторые примеры представления динамики манипуляционных роботов методом связанных графов	287
5.5. Представление манипуляционных роботов методом Лагранжа — Эйлера (краткий обзор)	299
5.6. Представление динамики манипуляционных роботов методом Лагранжа — Эйлера	312
5.7. Уравнения динамики роботов Ньютона — Эйлера	333
5.8. Рекурсивные уравнения динамики манипуляционных роботов	340
5.9. Рекурсивные уравнения Ньютона — Эйлера в системах координат звеньев	344
5.10. Заключительные замечания	350
Литература	351
Домашние задания	351
Глава 6. Управление движением манипуляционных роботов	357
6.1. Введение	357
6.2. Разомкнутые и замкнутые системы управления роботами	359
6.3. Системы второго порядка	361
6.4. Нелинейные уравнения движения для замкнутого контура	363
6.5. Управление динамикой робота по ошибке	364

6.6. Структура управляющей части усилителя	367
6.7. Управление одноосной рукой робота	371
6.8. Обобщенные законы управления движением для манипуляционных роботов	377
6.9. Распространенные системы управления промышленными роботами	379
6.10. Силовое управление манипуляционными роботами	383
6.11. Анализ ошибки слежения	386
6.12. Координируемое движение	387
Литература	390
Домашние задания	391
Глава 7. Анализ сил, моментов и упругости роботов	396
7.1. Введение	396
7.2. Силы и моменты роботов: общие положения	396
7.3. Преобразования сил и моментов	400
7.4. Обобщенные силы в схвате и эквивалентные моменты в сочленениях	406
7.5. Виртуальная работа и принцип д'Аламбера	409
7.6. Анализ податливости и податливое движение	414
7.7. Понятие об удаленном центре податливости (УЦП)	418
7.8. Критерий заклинивания Симуновича	422
Литература	425
Домашние задания	425
Глава 8. Очувствление и зрение роботов	429
8.1. Введение	429
8.2. Классификация датчиков роботов	431
8.3. Системы технического зрения роботов	436
8.4. Робототехнические датчики для сборки	463
8.5. Другие виды датчиков для интеллектуальных роботов	471
Литература	478
Домашние задания	479
Глава 9. Программирование движения роботов	481
9.1. Введение	481
9.2. Ручное обучение, или показ-и-обучение	482
9.3. Обучение ведением, или сопровождение	482
9.4. Языки программирования	482
9.5. Обзор роботоориентированных языков программирования	485
9.6. Полный набор сборочных программ для роботов	494
Литература	517
Домашние задания	518
Предметный указатель	520